OPCIÓN A

19_mod1_jun_EJERCICIO 1 (A)

(2'5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camisera lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800g de poliéster.
Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución

Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camisera lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800g de poliéster.
Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de camisetas lisas.
Sea y = nº de camisetas estampadas.

	Algodón	Poliester	Relaciones	Beneficio
Lisas (x)	70 g	20 g		5 €
Estampadas (y)	60 g	10 g	≥ 10 y $(2y \ge x)$	4 €
Total	4200 g	800 g		

De “una camisera lisa necesita 70 g de algodón y una estampada 60 g de algodón”
$\rightarrow$ $70x + 60y \le 4200$.

De “una camisera lisa necesita 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 10 g de poliéster”
$\rightarrow$ $20x + 10y \le 800$.

De “para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas” $\rightarrow$ $y \ge 10$.

De “para que sea rentable, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas”
$\rightarrow$ $2y \ge x$.

De “se necesita fabricar alguna camiseta lisa y estampada” $\rightarrow$ $x \ge 0$.

De “cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, tenemos que la función beneficio a optimizar es $F(x,y) = 5x + 4y$.

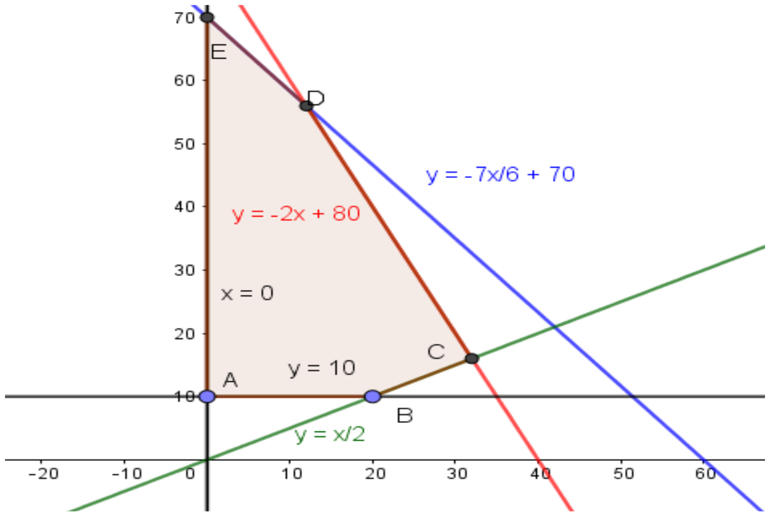
Resumiendo:
Función a optimizar es $F(x,y) = 5x + 4y$.
Restricciones: $70x + 60y \le 4200$; $20x + 10y \le 800$; $y \ge 10$; $2y \ge x$; $x \ge 0$.

Las desigualdades $7x + 6y \le 420$; $2x + y \le 80$; $y \ge 10$; $2y \ge x$; $x \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $7x + 6y = 420$; $2x + y = 80$; $y = 10$; $2y = x$; $x = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos
$y = -7x/6 + 70$; $y = -2x + 80$; $y = 10$; $y = x/2$; $x = 0$.

Representamos gráficamente el recinto cerrado convexo delimitado por las desigualdades, y observamos que los vértices de dicho recinto son el A, B, C, D y E.

Calculamos dichos vértices A, B, C, D y E resolviendo las ecuaciones de dos en dos.



Calculamos los vértices A y B válidos.

De $x = 0$ e $y = 10$, tenemos el vértice es A(0,10).
De $y = 10$ e $y = x/2$, tenemos $10 = x/2$, de donde $x = 20$ y el vértice es B(20,10).
De $y = x/2$ e $y = -2x + 80$, tenemos $x/2= -2x + 80 \rightarrow x = -4x + 160 \rightarrow 5x = 160$ con lo cual $x=32$ e $y=16$, y el vértice es C(32,16).
De $y = -2x + 80$ e $y = -7x/6 + 70$, tenemos $-2x + 80 = -7x/6 + 70 \rightarrow -12x + 480 = -7x + 420 \rightarrow 60 = 5x \rightarrow \rightarrow x = 12$ e $y = 56$, y el vértice es D(12,56).
De $x = 0$ e $y = -7x/6 + 70$, tenemos el vértice es E(0,70).

Veamos el máximo de la función **F(x,y) = 5x + 4y** en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa de limitada por las restricciones, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos *F* en los puntos anteriores A(0,10), B(20,10), C(32,16), D(12,56) y E(0,70). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(0, 10) = 5(0) + 4(10) = 40$; $F_B(20,10) = 5(20) + 4(10) = 140$; $F_C(32, 16) = 5(32) + 4(16) = 224$;
$\mathbf{F_D(12,56)} =$ $5(12) + 4(56)$ $\mathbf{= 284}$; $F_E(0, 70) = 5(0) + 4(70) = 280$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 284** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice D(12,56), es decir el máximo beneficio es de 284€ y se obtiene fabricando 12 camisetas lisas y 56 estampadas.**

19_mod1_jun_EJERCICIO 2 (A)

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$.
a) (1 punto) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y= 3x - 3$.
b) (1 punto) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.
c) (0'5 puntos) Calcule $\int f(x)dx$.

Solución

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$.
a)
Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.

Sabemos que las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

La pendiente de la recta $y = 3x - 3$ es $y' = 3$.
La pendiente genérica de la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$ es $f'(x) = 3x^2 - 9$.

Igualamos pendientes: $3x^2 - 9 = 3 \rightarrow 3x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{(4)} = \pm 2$.

Me están pidiendo las rectas tangentes a la gráfica de f en x = -2 y x = 2.

Tenemos $f(x) = x^3 - 9x + 2$ es $f'(x) = 3x^2 - 9$, de donde *f(-2)* = $(-2)^3 - 9(-2) + 2$ = *12*, *f '(-2)* = $3(-2)^2 - 9$ = *3*, *f(2)* = $(2)^3 - 9(2) + 2$ = *-8*; *f '(2)* = $3(2)^2 - 9$ = *3.*

La recta tangente en x = -2 es: y – f(-2) = f '(-2)·(x – (-2)) → y – 12 = 3·(x + 2) → y = 3x + 18.

La recta tangente en x = 2 es: y – f(2) = f '(2)·(x – 2) → y – (-8) = 3·(x - 2) → y = 3x - 14.

b)

Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la 1ª derivada y la curvatura el estudio de la 2ª derivada.

Calculamos f '(x) y resolvemos la ecuación f '(x) = 0

Ya tenemos $f(x) = x^3 - 9x + 2$ y $f'(x) = 3x^2 - 9$.

De $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \cong \pm 1'7$, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(-2) = 3(-2)^2 - 9 = 3 > 0$, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,-\sqrt{3})$.

Como $f'(0) = 3(0)^2 - 9 = -9 > 0$, f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-\sqrt{3},+\sqrt{3})$.

Como $f'(2) = 3(2)^2 - 9 = 3 > 0$, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(+\sqrt{3}, +\infty)$.

Por definición $x = -\sqrt{3}$ es un máximo relativo y vale $f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9(-\sqrt{3}) + 2 = 2 + 12\sqrt{3} \cong 22'78$.

Por definición $x = \sqrt{3}$ es un mínimo relativo y vale $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9(\sqrt{3}) + 2 = 2 - 6\sqrt{3} \cong -8'39$.

Calculamos f ''(x) y resolvemos la ecuación f ''(x) = 0

Ya tenemos $f(x) = x^3 - 9x + 2$; $f'(x) = 3x^2 - 9$ luego $f''(x) = 6x$.

De $f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$, que será el posible punto de inflexión.

Como $f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$, f es cóncava $(\cap)$ en $(-\infty, 0)$.

Como $f''(1) = 6(1) = +6 > 0$, f es convexa $(\cup)$ en $(o, +\infty)$.

Por definición x = 0 es un punto de inflexión y vale $f(0) = (0)^3 - 9(0) + 2 = 2$.

c)

Calcule $\int f(x)dx = \int (x^3 - 9x + 2)dx = \int x^3dx - 9\int xdx + 2\int dx = \frac{x^4}{4} - 9\cdot\frac{x^2}{2} + 2x + K = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + K.$

19_mod1_jun_EJERCICIO 3 (A)

El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) (1 punto) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Solución

El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

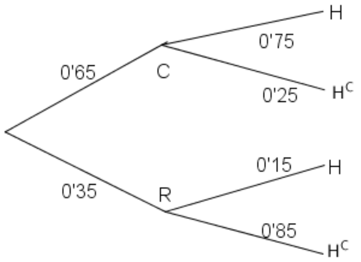
a)

¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

Llamemos C, R, H y H^C, a los sucesos siguientes, "alojarse en la capital", "alojarse en zona rural", "hospedarse en un hotel" y "no hospedarse en un hotel", respectivamente.

Datos del problema: p(C) = 65% = 0'65; p(H/C) = 75% = 0'75 ; p(H/R) = 15% = 0'15, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:
Me piden **p(H) =** p(C).p(H/C) + p(R).p(H/R) = (0'65)·(0'75) + (0'35)·(0'15) **= 27/50 = 0'54**.
b)
Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

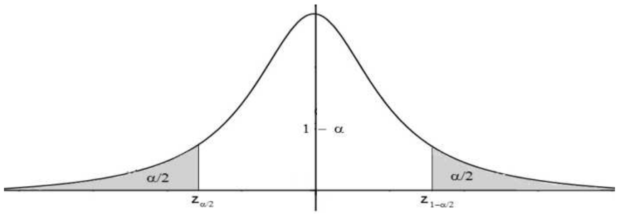
Me piden **p(R/H^C)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(R/H^C) =} \frac{p\left(R \cap H^C\right)}{p(H^C)} = \frac{p(R)\cdot p(H^C/R)}{1 - p(H)} = \frac{(0'35)\cdot(0'85)}{1 - 0'54} \mathbf{= 119/184 \cong 0'64674}.$$

19_mod1_jun_EJERCICIO 4 (A)
Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partirlo político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.
a) (1'5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.
b) (1 punto) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestre para estimar la proporción con un error inferior al 2%.

Solución

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$, y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$ o $\hat{p} \rightarrow N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que en la proporción es $\hat{p} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es E =

$= z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ =

= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{E^2} =$

$= \frac{2 \cdot (z_{1-\alpha/2})^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{(b-a)^2}$.

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partirlo político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a)
Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

Datos del problema: n = 300, $\hat{p} = \frac{135}{300}$ = 0'45, $\hat{q}$ = 1 - $\hat{p}$ = 1 – 0'45 = 0'55, nivel de confianza =97% = 0'97 = = 1 - α, de donde α = 0'03, con la cual $\alpha/2$ = (0'03)/2 = 0'015.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'015 = 0'985, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que la probabilidad 0'975 si viene y corresponde a 2'17, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'45 - 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'45\cdot 0'55}{300}}, 0'45 + 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'45\cdot 0'55}{300}}\right) \cong$$

$\cong$ **(0'38767; 0'512328)**

b)
Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestre para estimar la proporción con un error inferior al 2%.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0'45, $\hat{q}$ = 0'55, error = E ≤ 2% = 0'02, nivel de confianza = el mismo 97%, por tanto $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17.

De $E \le z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'17)^2\cdot 0'45\cdot 0'55}{(0'02)^2}$ = 2913'6318, por tanto **el tamaño mínimo de individuos que sería preciso seleccionar es de n = 2914.**

OPCION B

19_mod1_jun_EJERCICIO 1 (B)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (0'5 puntos) Razone si la matriz, A es simétrica.
b) (1 punto) Calcule A^{-1}.
c) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial $2X\cdot A - A^2 - 3\cdot I_3 = O$.

Solución

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a)
Razone si la matriz, A es simétrica.

Sabemos que una matriz cuadrada A es simétrica si $A = A^t$, es decir coincide con su traspuesta.

Como $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ne A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **la matriz A no es simétrica.**

b)
Calcule A^{-1}.

Sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$ si $|A| \ne 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} F_2 + F_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{array} = 1\cdot(3-4) = -1.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c)
Resuelva la ecuación matricial $2X\cdot A - A^2 - 3\cdot I_3 = O$.

De $2X\cdot A - A^2 - 3\cdot I_3 = O \rightarrow 2X\cdot A = A^2 + 3\cdot I_3$. Multiplicando la expresión $2X\cdot A = A^2 + 3\cdot I_3$, por la derecha por A^{-1} tenemos $2X\cdot A\cdot A^{-1} = A\cdot A\cdot A^{-1} + 3\cdot I_3\cdot A^{-1} \rightarrow 2X\cdot I_3 = A\cdot I_3 + 3\cdot A^{-1} \rightarrow 2X = A + 3\cdot A^{-1}$, es decir:

$$\mathbf{X = (1/2)\cdot(A + 3A^{-1}) =} \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -1/2 & -2 \\ 3 & 2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

19_mod1_jun_EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) (1 punto) Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.
b) (1'5 puntos)| Para a = -2, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a)
Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.

La rama $\dfrac{1}{x-1}$ si $x < 0$ es continua y derivable en R – {1}, en particular es continua y derivable en $x < 0$.
La rama $x^2 + a$ si $x \geq 0$ es continua y derivable en R, en particular es continua y derivable en $x > 0$.

Falta ver la continuidad y después derivabilidad en x = 0.
La función f es continua en x = 0 si $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

$f(0) = (0)^2 + a = a$.
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} [\,1/(x-1)\,] = 1/(-1) = -1$.
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + a) = (0)^2 + a = a$.

Igualando tenemos **a = -1, luego para a = -1 la función f es continua en x = 0 y por tanto en R**.

Si a = -1 tenemos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, y derivada $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La función f sería derivable en x = 0 si $f'(0^+) = f'(0^-)$. (Estudiamos la continuidad de la derivada).

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} [\,-1/(x-1)^2\,] = -1(-1)^2 = -1\cdot(1) = -1$.
$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x) = 2(0) = 0$.
Como $f'(0^+) = 0 \neq f'(0^-) = -1$, **la función no es derivable en x = 0 para a = -1, luego sólo es derivable en R – {0}.**

b)
Para a = -2, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Para a = -2, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^3} & \text{si } x < 0, \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ya vimos en el EJERCICIO 1A el estudio de la monotonía y la curvatura.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la 1ª derivada y la curvatura el estudio de la 2ª derivada.

Calculamos f '(x) y resolvemos la ecuación f '(x) = 0

Para x < 0 tenemos $f'(x) = -1/(x - 1)^2$.

De f '(x) = 0 $\rightarrow$ -1 = 0 lo cual es absurdo luego la función siempre es creciente o decreciente y no tiene extremos.

Como $f'(-1) = -1/(-1 - 1)^2 = -1/4 < 0$, **f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-\infty,0)$**.

Para x > 0 tenemos f '(x) = 2x.

De f '(x) = 0 $\rightarrow$ 2x = 0 $\rightarrow$ x = 0 que sería un posible extremo, pero no lo es porque para a = -2 la función f no es continua en x = 0, luego la función siempre es creciente o decreciente.

Como f '(1) = 2(1) = 2 > 0, **f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(0, +\infty)$.**

Calculamos f ''(x) y resolvemos la ecuación f ''(x) = 0

Para x < 0 tenemos $f''(x) = 2/(x - 1)^3$.

De f ''(x) = 0 $\rightarrow$ 2 = 0, lo cual es absurdo, luego la función siempre es cóncava o convexa y no tiene puntos de inflexión.

Como $f''(-1) = 2/(-1 - 1)^3 = 2/(-8) < 0$, **f es cóncava $(\cap)$ en $(-\infty,0)$**.

Para x > 0 tenemos f ''(x) = 2.

De f ''(x) = 0 $\rightarrow$ 2 = 0, lo cual es absurdo, luego la función siempre es cóncava o convexa y no tiene puntos de inflexión.

Como f '(1) = 2 > 0, **f es convexa $(\cup)$ en $(0, +\infty)$, y no tiene punto de inflexión.**

19_mod1_jun_EJERCICIO 3 (B)

El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.
a) (0'75 puntos) Calcule la probabilidad de que vea series o películas.
b) (1 punto) Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.
c) (0'75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Solución

El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.
a)
Calcule la probabilidad de que vea series o películas.

Sean los sucesos A = "ver series" y B = "ver películas".

Me están pidiendo **p(A o B) = p(A∪B)**.

Nos dan p(A) = 69% = 0'69, p(B) = 35% = 0'35, p(no ven ni series ni películas) = 18% = 0'18 =
= p(noA y noB) = $p(A^C \cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A \cup B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - p(A∪B). Por tanto igualando tenemos: **p(A∪B) =** 1 – 0'18 **= 0'82, que es lo que me han pedido.**

b)
Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.

Me están pidiendo **p(A sabiendo que se ha realizado B) = p(A/B) =** $\frac{p(B \cap A)}{p(B)}$

Sabemos que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \rightarrow$ 0'82 = 0'69 + 0'35 - $p(A \cap B)$, de donde *$p(A \cap B)$ = 0'22*.

Por tanto **p(A/B) =** $\frac{p(B \cap A)}{p(B)}$ **= 0'22/0'35 ≅ 0'62857**

c)
¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Me están pidiendo **p(B y no A) = $p(B \cap A^C)$ =** $p(B) - p(B \cap A)$ = 0'35 – 0'22 **= 0'13.**

19_mod1_jun_EJERCICIO 4 (B)

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

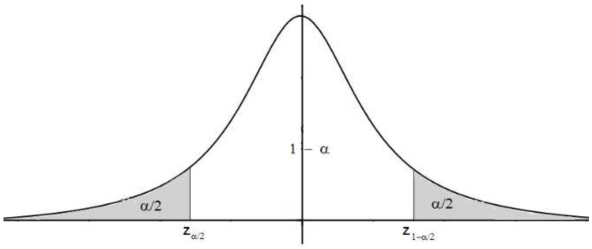
a) (1'5 puntos) Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional.
b) (1 punto) Con una confianza del 95'5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1'5 minutos?

Solución

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b)

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2} . \sigma}{E}\right)^2$.

a)
Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional.

Datos del problema: media muestral $\overline{x}$ = (10+17+8+27+6+9+32+5+21)/9 = 135/9 = 15; σ = 8; n = 9; nivel de confianza = 92% = 0'92 = 1 - α, de donde α = 0'08, con la cual α/2 = (0'08)/2 = 0'04.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'04 = 0'96$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'96 no viene, y la más próxima es 0'9599 y corresponde a 1'75, luego $z_{1-\alpha/2} = 1'75$ (*si interpoláramos entre 0'9599 y 0'9608 tendríamos* $z_{1-\alpha/2} = 1'751$), por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(15 - 1'75\cdot\frac{8}{\sqrt{9}}, 15 + 1'75\cdot\frac{8}{\sqrt{9}}\right) \cong$ **(10'3333,19'65667)**

b)
Con una confianza del 95'5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1'5 minutos?

Datos del problema: $\sigma = 8$; error = $E < 1'5$; nivel de confianza = 95'5% = 0'955 = $1 - \alpha$, de donde $\alpha = 0'045$, es decir $\alpha/2 = 0'045/2 = 0'0225$.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'0225 = 0'9775$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'9775 no viene, las más próximas son 0'9772 y 0'978 que corresponden a probabilidades 2'00 y 2'01, por tanto el punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ es la media de ambos valores, es decir $z_{1-\alpha/2} = (2'00 + 2'01)/2 = 2'005$.

De el error $E \leq z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'5$, tenemos $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'005\cdot 8}{1'5}\right)^2 \cong 114'3474$, tenemos que **el tamaño mínimo de la muestra es de n = 115 empleados.**