GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Dadas las rectas: $r \equiv (y = -2x + 4)$; $s \equiv \left(\frac{x+1}{3} = y - 2 \right)$ y $t \equiv (4x + 2y - 5 = 0)$. Halla:

   1.1. Distancia entre las rectas r y s. *(Razonamiento 1/2 punto. Resolución 1/2 punto).*
   1.2. Distancia entre las rectas r y t. " " " " " "
   1.3. Ángulo que forman las rectas r y s. " " " " " "
   1.4. Ángulo que forman las rectas r y t. " " " " " "
   1.5. Los vectores unitarios paralelos a la recta r. " " " " " "
   1.6. Pendiente de los vectores perpendiculares a la recta s. " " " " " "
   1.7. Ecuación segmentaria de la recta t. " " " " " "

2. Halla analíticamente la ecuación general de la recta respecto a la que $P(-2\,,4)$ y $Q(3\,,-1)$ son puntos simétricos. *(Razonamiento 1 punto. Resolución 2 puntos).*

1.1. La distancia entre r y s es 0 puesto que estas rectas son secantes. La pendiente de r es $m_r = -2$ y la de s es $m_s = 1/3$ por lo tanto r y s son secantes ya que tienen distinta dirección.

La distancia entre las rectas r y s es: $d(r,s) = 0$

1.2. La distancia entre r y t la hallaremos expresando sus ecuaciones en la forma general con iguales coeficientes de las incógnitas:

$t \equiv (4x + 2y - 5 = 0)$ y

$r \equiv (y = -2x + 4) \Leftrightarrow r \equiv (\ 2x + y - 4 = 0) \Leftrightarrow r \equiv (4x + 2y - 8 = 0)$

Aplicando la fórmula de distancia entre rectas paralelas: $d(r,t) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ en este caso: $A = 4$, $B = 2$, $C = -8$ y $C' = -5$ por lo que $d(r,t) = \frac{|-8 - (-5)|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{20}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

La distancia entre las rectas r y t es: $d(r,t) = \frac{3\sqrt{5}}{10} u.l.$

1.3. Vectores directores de r y s son, respectivamente; $\overrightarrow{u_r} = (1\ ,\ -2)$ y $\overrightarrow{u_s} = (3\ ,\ 1)$ obtenidos a partir de las ecuaciones de las rectas. Por lo tanto:

$$\cos(\widehat{r,s}) = \left|\cos(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u_s}\right|} = \frac{|(1,-2)\cdot(3,1)|}{\left(\sqrt{1^2 + (-2)^2}\right)\left(\sqrt{3^2 + 1^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{50}} \Rightarrow (\widehat{r,s}) = \arccos\frac{1}{\sqrt{50}} = 81'87^{\circ}$$

El ángulo que forman las rectas r y s es: $(\widehat{r,s}) =$ $81'87^{\circ}$

1.4. Como las rectas r y t tienen la misma dirección, el ángulo que forman es de 0°.

El ángulo que forman las rectas r y t es: $(\widehat{r,t}) = 0^{\circ}$

1.5. $\overrightarrow{u_r} = (1\ ,\ -2)$ y $\left|\overrightarrow{u_r}\right| = \sqrt{5}$ por lo tanto los vectores unitarios, es decir, de módulo 1, que tengan la dirección de r son: $\overrightarrow{u_{0r}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(1\ ,\ -2) = \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}, \mp\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Los vectores unitarios paralelos a la recta r son:
$\overrightarrow{u_{01r}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ y $\overrightarrow{u_{02r}} = \left(\frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

1.6. Las rectas perpendiculares y, por lo tanto, también los vectores que sean perpendiculares tienen sus pendiente opuestas e inversas.

Como la pendiente de s es $m_s = 1/3$, la de los vectores perpendiculares es $m_{\perp s} = -3$

La pendiente de los vectores perpendiculares a la recta s es: $m_{\perp s} = -3$

1.7. $4x + 2y - 5 = 0 \xrightarrow{+5} 4x + 2y = 5 \xrightarrow{:5} \frac{4x}{5} + \frac{2y}{5} = \frac{5}{5} \Rightarrow t \equiv \left(\frac{x}{5/4} + \frac{y}{5/2} = 1\right)$

La ecuación segmentaria de la recta t es: $\frac{x}{5/4} + \frac{y}{5/2} = 1$

2. La recta respecto a la que $P(-2\,,4)$ y $Q(3\,,-1)$ son simétricos, pasa por el punto medio del segmento PQ y tiene la dirección perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}$.

El punto medio del segmento PQ es: $M\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{4-1}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Por otro lado $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (3\,,-1) - (-2\,,4) = (5,-5)$ un vector perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ es, por ejemplo, $\vec{v} = (1\ ,\ 1)$ (podemos comprobar que el producto escalar $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}$ vale 0)

La ecuación de la recta que pasa por el punto $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (1\ ,\ 1)$ es, en la forma continua: $\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \frac{3}{2}}{1}$ que en la forma general o implícita es $x - y + 1 = 0$

Los puntos $P(-2\,,4)$ y $Q(3\,,-1)$ son simétricos respecto a la recta:
$x - y + 1 = 0$