T R I G O N O M E T R Í A

1. Deduce las fórmulas que expresan $sen\,\alpha$, $\cos\alpha$ y $tg\,\alpha$ en función de, únicamente, $\cos 2\alpha$.
2. Resuelve la ecuación: $4\cdot \text{sen}^2(5x+30^\text{o})=3$ con $x\in[0\,,360^\text{o})$.
3. Resuelve la ecuación: $\text{sen}\;\; 3x=\text{sen}\;\; 4x$ con $x\in[0\,,360^\text{o})$.

1. $sen\,\alpha$, $\cos\alpha$ y $tg\,\alpha$ en función de $\cos 2\alpha$

Teniendo en cuenta que α es la mitad de 2α, el resultado es inmediato $\left(x=2\alpha \Rightarrow \dfrac{x}{2}=\alpha\right)$:

Las fórmulas del ángulo mitad:

$$sen\,\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\;;\qquad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\;;\qquad \text{tg}\,\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Se convierten en

$sen\;\;\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$	$\cos\;\;\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\;2\alpha}{2}}$	$\text{tg}\,\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\;2\alpha}{1+\cos\;2\alpha}}$

que nos permiten obtener las razones trigonométricas de α en función de $\cos 2\alpha$.

También las podríamos haber obtenido a partir de de la ecuación fundamental de la trigonometría (E1) y de la fórmula del coseno del ángulo doble (E2) ya que constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas si consideramos que las incógnitas son $sen\,\alpha$ y $\cos\alpha$ y que $\cos 2\alpha$ es un valor conocido:

$$\left\{\begin{array}{ll}\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha=1 & \text{(E1)}\\ \cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=\cos 2\alpha & \text{(E2)}\end{array}\right.$$

$$\text{(E1−E2)}\;\Rightarrow 2\text{sen}^2\alpha=1-\cos 2\alpha\Rightarrow \text{sen}\;\;\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\text{(E1+E2)}\;\Rightarrow 2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha\Rightarrow \cos\;\;\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\;2\alpha}{2}}$$

La $\text{tg}\,\alpha=\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ la obtenemos dividiendo miembro a miembro las dos expresiones anteriores.

2. $4 \cdot \text{sen}^2(5x+30^\circ) = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2(5x+30^\circ) = \dfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,(5x+30^\circ) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow$

Los ángulos del primer giro cuyo seno vale $+\sqrt{3}/2$ son el de 60º (1) y el de 120º (2) y los que su seno es $-\sqrt{3}/2$ son el de 240º (3) y el de 300º (4): por lo tanto:

(1). 5x +30º = 60º + 360º · k ⇒ x = 6º + 72º · k ⇒ x = 6º, 78º, 150º, 222º, 294º

(2). 5x +30º = 120º + 360º · k ⇒ x = 18º + 72º · k ⇒ x = 18º, 90º, 162º, 234º, 306º

(3). 5x +30º = 240º + 360º · k ⇒ x = 42º + 72º · k ⇒ x = 42º, 114º, 186º, 258º, 330º

(4). 5x +30º = 300º + 360º· k ⇒ x = 54º + 72º· k ⇒ x = 54º, 126º, 198º, 270º, 342º

Resultados que hemos obtenido dándole a k los valores 0, 1, 2, 3 y 4 para los cuales $x \in [0,\ 360)$.

La ecuación tiene, por tanto, 20 soluciones que, de menor a mayor, son:

$\boxed{x = 6º, 18º, 42º, 54º, 78º, 90º, 114º, 126º, 150º, 162º, 186º, 198º, 22º, 234º, 258º, 270º, 294º, 306, 330º \text{ y } 342º}$

3. $\text{sen}3x = \text{sen}4x \ \Rightarrow\ \text{sen}4x - \text{sen}3x = 0$ Transformamos en producto el primer miembro de la ecuación aplicando la fórmula $\text{sen A} - \text{sen B} = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\ \text{sen}\dfrac{A-B}{2}$ resultando:

$2\cos\dfrac{7x}{2} \cdot \text{sen}\dfrac{x}{2} = 0$ para que esto se cumpla, alguno de los factores tiene que anularse, por lo tanto hay dos posibilidades (1) y (2) que analizamos:

(1). $\cos\dfrac{7x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{7x}{2} = 90º{+}180º{\cdot}k \Rightarrow x = \dfrac{180º{+}360º{\cdot}k}{7}$ ⇒ Dándole a k los valores 0, 1, 2, … 6 obtenemos siete valores de x que pertenecen al intervalo $[0, 360º)$ que son solución de la ecuación

$k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{180º}{7} \cong 25'71º$; $k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{540º}{7} \cong 77'14º$; $k = 2 \Rightarrow x = \dfrac{900º}{7} \cong 128'57º$

$k = 3 \Rightarrow x = \dfrac{1260º}{7} = 180º$; $k = 4 \Rightarrow x = \dfrac{1620º}{7} \cong 231'43º$; $k = 5 \Rightarrow x = \dfrac{1980º}{7} \cong 282'86º$

$k = 6 \Rightarrow x = \dfrac{2340º}{7} \cong 334'29º$

(2). $\text{sen}\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 0º{+}180º{\cdot}k \Rightarrow x = 360º\,k$

el único valor que pertenece al intervalo $[0, 360º)$ lo obtenemos para $k = 0 \Rightarrow x = 0º$

Hay, por lo tanto, ocho valores de x en el intervalo $[0, 360º)$ que son solución de la ecuación:

$$\boxed{0º,\ \frac{180º}{7} \cong 25'71º,\ \frac{540º}{7} \cong 77'14º,\ \frac{900º}{7} \cong 128'57º,\ 180º,\ \frac{1620º}{7} \cong 231'43º,\ \frac{1980º}{7} \cong 282'86º \text{ y } \frac{2340º}{7} \cong 334'29º}$$