

REGLA DE L'HÔPITAL

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)}$$

1 Identificar indeterminación

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)} = \frac{\ln(2(1)^2 - 1)}{\tan((1) - 1)} = \frac{\ln(1)}{\tan(0)} = \frac{0}{0}$$

2 Aplicar la regla de L'Hôpital

Derivamos el numerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{4x}{2x^2 - 1}}{\sec^2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{4(1)}{2(1)^2 - 1}}{\sec^2((1) - 1)} = \frac{\frac{4}{1}}{1} = 4$$

3 Obtener el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)} = 4$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{(0) - \sin(0)}{(0)^3} = \frac{0}{0}$$

2 Aplicar la regla de L'Hôpital

Derivamos el numerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \frac{1 - \cos(0)}{3(0)^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Obtenemos nuevamente una indeterminación por lo que aplicaremos la regla de

L'Hôpital otra vez

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{\sin(0)}{6 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

Una vez más

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{\cos(0)}{6} = \frac{1}{6}$$

3 Obtener el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x - 1)}{(\ln(x))^2}$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x - 1)}{(\ln(x))^2} = \frac{1 - \cos((1) - 1)}{(\ln(1))^2} = \frac{0}{0}$$

2 Aplicar la regla de L'Hôpital

Derivamos el numerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sin(x - 1)}{2 \ln(x)}}{\frac{2 \ln(1)}{(1)}} = \frac{\sin((1) - 1)}{\frac{2 \ln(1)}{(1)}} = \frac{0}{0}$$

Volvemos a aplicar la regla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x - 1)}{\frac{2 - 2 \ln(x)}{x^2}} = \frac{\cos((1) - 1)}{\frac{2 - 2 \ln(1)}{(1)^2}} = \frac{1}{2}$$

3 Obtener el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x - 1)}{(\ln(x))^2} = \frac{1}{2}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2}$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2} = \frac{\cos^2(0) - 1}{(0)^2} = \frac{0}{0}$$

2 Aplicar la regla de L'Hôpital

Derivamos el numerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos(x) \sin(x)}{2x} = \frac{-2 \cos(0) \sin(0)}{2(0)} = \frac{0}{0}$$

Utilizamos la siguiente propiedad de las funciones trigonométricas

$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, y volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos(x) \sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(2x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos(2x)}{2} = -1$$

3 Obtener el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2} = -1$$

Formas de Indeterminaciones en potencias

Las formas indeterminadas 0^0 , ∞^0 y 1^∞ se obtienen cuando consideramos expresiones de la forma

$$[f(x)]^{g(x)}$$

Estas indeterminaciones se resuelven primero aplicando propiedades del logaritmo:

Tengo mi función

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

Aplico logaritmo

$$\ln(y) = \ln([f(x)]^{g(x)}) = g(x) \ln(f(x))$$

Aplico exponencial

$$y = e^{g(x) \ln(f(x))}$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln(f(x))} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))}$$

Por lo que para resolver el límite inicial, me basta con obtener el límite de su logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x)) = L$$

Y así, el límite original será

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^L$$

Ejercicios resueltos con indeterminaciones

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}}$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = (\cos(2(0)))^{\frac{3}{(0)^2}} = 1^\infty$$

2 Tomamos límite del logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} \ln(\cos(2x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(\cos(2x))}{x^2} = \frac{3 \ln(\cos(2 \cdot 0))}{0^2} = \frac{0}{0}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{0}{0}$

3 Aplicar regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{-2 \sin(2x)}{\cos(2x)}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \tan(2x)}{x} = \frac{0}{0}$$

Forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Aplicamos regla de L'Hôpital de nuevo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-12 \csc^2(2x)}{2} = \frac{-12 \csc^2(2 \cdot 0)}{2} = -6$$

4 Obtenemos el límite

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} \ln(\cos(2x)) = -6$$

Y entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6}$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} (\cot(x))^{\sin(x)}$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot(x))^{\sin(x)} = (\cot(0))^{\sin(0)} = \infty^0$$

2 Tomamos límite del logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(\cot(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cot(x))}{\csc(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$

3 Aplicar regla de L'Hôpital

Al derivar obtenemos

$$\frac{\frac{-\csc^2(x)}{\cot(x)}}{-\csc(x) \cot(x)} = \frac{\csc(x)}{\cot^2(x)} = \frac{\tan^2(x)}{\sin(x)} = \tan(x) \sec(x)$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) \sec(x) = \tan(0) \sec(0) = 0 \cdot 1 = 0$$

4 Obtenemos el límite original

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(\cot(x)) = 0$$

Y entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot(x))^{\sin(x)} = e^0 = 1$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 0} x^{\tan(x)}$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\tan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (0)^{\tan(0)} = \infty^0$$

2 Tomamos límite del logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\cot(x)} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{-\infty}{\infty}$

3 Aplicar regla de L'Hôpital

Al derivar obtenemos

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2(x)} = -\frac{\sin^2(x)}{x}$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin^2(x)}{x} = -\frac{\sin^2(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital de nuevo

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2 \sin(x) \cos(x)}{1} = -\frac{2 \sin(0) \cos(0)}{1} = 0$$

4 Obtenemos el límite original

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) \ln(x) = 0$$

Y entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\tan(x)} = e^0 = 1$$

4 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \left(\frac{2}{2}\right)^{\frac{1}{(2)-2}} = 1^\infty$$

2 Calculamos el límite del logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{2}\right)}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{0}{0}$

3 Aplicar regla de L'Hôpital

Al derivar obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1/2}{x/2}}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

4 Obtenemos el límite original

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Y entonces

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Ejercicios resueltos de la indeterminación infinito menos infinito

En estos casos tenemos que tener en ver que tan "rápido" las funciones se van a infinito.

Además si son fracciones, se ponen a común denominador.

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right)$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right) = \cot(0) - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

2 Reescribimos la expresión

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)}\right) = \frac{0}{0}$$

3 Aplicar regla de L'Hôpital

Al derivar obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - x \sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + x \cos(x)}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-x \sin(x)}{\sin(x) + x \cos(x)}\right) = \frac{0}{0}$$

Obtengo otra indeterminación, por lo que vuelvo a aplicar la regla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin(x) - x \cos(x)}{2 \cos(x) + x \sin(x)}\right) = \left(\frac{-\sin(0) - (0) \cos(0)}{2 \cos(0) + (0) \sin(0)}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

4 Obtenemos el límite

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{\sin(0)} = \infty - \infty$$

2 Reescribimos la expresión

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} \right) = \frac{0}{0}$$

3 Aplicar regla de L'Hôpital

Al derivar obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)} \right) = \frac{0}{0}$$

Obtengo otra indeterminación, por lo que vuelvo a aplicar la regla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)} \right) = \frac{0}{2} = 0$$

4 Obtenemos el límite

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = 0$$

Indeterminación cero por infinito

Estas formas de indeterminación se pueden transformar a casos que ya vimos, como $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Como se muestra a continuación, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0 \cdot \infty$$

donde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

Entonces lo podemos reescribir de tal manera que sea más fácil sacar la derivada

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

ó

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Teniendo esto ya podemos usar la regla de L'Hôpital

Ejercicios resueltos de la indeterminación cero por infinito

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = (0) \ln(0) = (0)(-\infty)$$

2 Reescribimos la expresión

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$

3 Aplicar regla de L'Hôpital

Al derivar obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

4 Obtenemos el límite

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan(x) - 1) \sec(2x)$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{\sin(0)} = \infty - \infty$$

2 Reescribimos la expresión

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan(x) - 1) \sec(2x) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 \right) \sec\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 0 \cdot \infty$$

Expresamos lo mismo de una manera conveniente para poder aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan(x) - 1) \sec(2x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{\frac{1}{\sec(2x)}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{\cos(2x)} = \frac{0}{0}$$

3 Aplicar regla de L'Hôpital

Al derivar obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2(x)}{-2\sin(2x)} = \frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{-2\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)} = -1$$

4 Obtenemos el límite

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan(x) - 1) \sec(2x) = -1$$

Ejercicios diversos de indeterminaciones y regla de L'Hôpital

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

2 Aplicar la regla de L'Hôpital

Derivamos el numerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

3 Obtener el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x - \frac{3}{2} \sin 2x}$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x - \frac{3}{2} \sin 2x} = \frac{0}{0}$$

2 Aplicar la regla de L'Hôpital

Derivamos el numerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x}{1 - 3 \cos 2x} = -\frac{3}{2}$$

3 Obtener el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x - \frac{3}{2} \sin 2x} = -\frac{3}{2}$$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cot x)$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cot x) = 0 \cdot \infty$$

2 Reformulación del problema

Solo expresando de diferente manera podremos encontrar las condiciones para aplicar regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cot x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \arcsin x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

3 Aplicar la regla de L'Hôpital

Derivamos el numerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x \arcsin x + \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = 1$$

4 Obtener el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cot x) = 1$$

4 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \frac{\sin x}{\tan x} (1 + \tan 2x)^{\frac{4}{x}} \right]$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \frac{\sin x}{\tan x} (1 + \tan 2x)^{\frac{4}{x}} \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 2x)^{\frac{4}{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 2x)^{\frac{4}{x}} = 1^\infty$$

2 Calculamos el límite del logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} \ln(1 + \tan 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \ln(1 + \tan 2x)}{x} = \frac{0}{0}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{0}{0}$

3 Aplicar la regla de L'Hôpital

Derivamos el numerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \ln(1 + \tan 2x)}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 x}{1 + \tan 2x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan 2x} = 8$$

4 Obtener el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \frac{\sin x}{\tan x} (1 + \tan 2x)^{\frac{4}{x}} \right] = \frac{1}{2} e^8$$

5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x \sin x}$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x \sin x} = \frac{0}{0}$$

2 Calculamos el límite del logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} \ln(1 + \tan 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \ln(1 + \tan 2x)}{x} = \frac{0}{0}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{0}{0}$

3 Aplicar la regla de L'Hôpital

Derivamos el numerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de l'opital otra vez

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + \sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = -\frac{1}{2}$$

4 Obtener el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x \sin x} = -\frac{1}{2}$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - e^x}{\arctan^2 x}$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - e^x}{\arctan^2 x} = \frac{0}{0}$$

2 Aplicar la regla de L'Hôpital

Derivamos el numerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\frac{\cos x - e^x}{\frac{2 \arctan x}{1+x^2}} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital otra vez

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - e^x}{\frac{2-4x \arctan x}{(1+x^2)^2}} = -\frac{1}{2}$$

3 Obtener el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - e^x}{\arctan^2 x} = -\frac{1}{2}$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \infty - \infty$$

2 Reescribimos la expresión

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

3 Aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x) + x \ln(1+x) + x} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital otra vez

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x} + \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

4 Obtener el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \frac{1}{2}$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = 1^\infty$$

2 Tomamos límite del logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \ln \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan x) - \ln(1 + \sin x)}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{0}{0}$

3 Aplicar la regla de L'Hôpital

$$\frac{\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x} - \frac{\cos x}{1+\sin x}}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

4 Obtener el límite original

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^0$$

9 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$

Solución

1 Identificar indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = 0^0$$

2 Tomamos límite del logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln(x) = 0 \cdot (-\infty)$$

Rescribimos de manera conveniente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$

3 Aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital otra vez

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} = \frac{0}{1} = 0$$

4 Obtener el límite original

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = e^0 = 1$$