Límites. Regla de L'Hôpital

1. Calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x-8}{\sec x+10}$.

Solución

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x-8}{\sec x+10}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Llamemos $f(x)=\operatorname{tg} x-8$ y $g(x)=\sec x+10=\frac{1}{\cos x}+10$. Entonces f y g son derivables en su domino de definición (en particular en $\frac{\pi}{2}$ y en un entorno suyo):

$f'(x)=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ y $g'(x)=\frac{-1}{\cos^2 x}\cdot(-\operatorname{sen} x)=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$.

De este modo, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x}=1$.

Al ser f y g son derivables en un entorno de $\frac{\pi}{2}$ podemos aplicar la regla de L'Hôpital y se tiene que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)}\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x-8}{\sec x+10}=1 \dagger$$

2. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}$.

Solución

$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{tg\ x-\operatorname{sen} x}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Llamemos $f(x)=x-\operatorname{sen} x$ y $g(x)=\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x$. Entonces f y g son derivables en su domino de definición (en particular en 0 y en un entorno suyo):

$f'(x)=1-\cos x$ y $g'(x)=\sec^2 x-\cos x=\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x=\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}$.

Por tanto $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x(1-\cos x)}{1-\cos^3 x}$ **(1)**, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Llamemos $\cos x=z$. Entonces $1-\cos^3 x=1-z^3$.

Pero, aplicando la regla de Ruffini, $1-z^3=-z^3+1=(z-1)\left(-z^2-z-1\right)=(1-z)\left(z^2+z+1\right)$.

Por tanto, se tiene que $1-\cos^3 x=(1-\cos x)\left(\cos^2 x+\cos x+1\right)$.

Luego la expresión **(1)** es igual a $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x(1-\cos x)}{(1-\cos x)\left(\cos^2 x+\cos x+1\right)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\cos x+1}=\dfrac{1}{3}$.

Como f y g son derivables en un entorno de 0 podemos aplicar la regla de L'Hôpital y se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{tg\, x-\operatorname{sen} x}=\frac{1}{3}$$

Otra forma de hacerlo consiste en aplicar otra vez la regla de L'Hôpital, ya que la derivada de $f(x)$, $f'(x)=\cos^2 x(1-\cos x)=\cos^2 x-\cos^3 x$, y la derivada de $g(x)$, $g'(x)=1-\cos^3 x$, vuelven a ser derivables en un entorno de 0:

$f''(x)=2\cos x(-\operatorname{sen} x)-3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)=\operatorname{sen} x\left(3\cos^2 x-2\cos x\right)$.

$g''(x)=-3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)=3\operatorname{sen} x\cos^2 x$.

Entonces $\lim_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x\left(3\cos^2 x-2\cos x\right)}{3\operatorname{sen} x\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{3\cos^2 x-2\cos x}{3\cos^2 x}=\dfrac{3-2}{3}=\dfrac{1}{3}$, con lo que nuevamente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{tg\, x-\operatorname{sen} x}=\frac{1}{3}\ \dagger$$

---

3. Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{\ln(1+x)}-\dfrac{5}{x}\right)$.

Solución

Tenemos que $\lim_{x\to 0}\dfrac{5}{\ln(1+x)}=\begin{cases}-\infty \text{ si } x\to 0^-\\ +\infty \text{ si } x\to 0^+\end{cases}$, y también que $\lim_{x\to 0}\dfrac{5}{x}=\begin{cases}-\infty \text{ si } x\to 0^-\\ +\infty \text{ si } x\to 0^+\end{cases}$.

En todo caso $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{\ln(1+x)}-\dfrac{5}{x}\right)$ es una indeterminación del tipo $\infty-\infty$.

Operando: $\dfrac{5}{\ln(1+x)}-\dfrac{5}{x}=\dfrac{5x-5\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$, con lo que $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{\ln(1+x)}-\dfrac{5}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\dfrac{5x-5\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$, que ahora es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Haremos uso, como en los ejercicios anteriores, de la regla de L'Hôpital, pues tanto el numerador como el denominador son funciones continuas y derivables en todo su dominio de definición que, por cierto, es el intervalo $(-1,+\infty)$.

Llamando $f(x)=5x-5\ln(1+x)$ y $g(x)=x\ln(1+x)$ tenemos:

$f'(x)=5-\dfrac{5}{\ln(1+x)}$, $g'(x)=\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$.

De nuevo tenemos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5-\dfrac{5}{\ln(1+x)}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}$ vuelve a presentar una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, pero tanto f' como g' son funciones continuas y derivables en un entorno de cero, con lo que podemos aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital.

$f''(x)=\dfrac{5}{\ln^2(1+x)}\cdot\dfrac{1}{\ln(1+x)}=\dfrac{5}{\ln^3(1+x)}$.

$g''(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1(1+x)-x}{(1+x)^2}=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{(1+x)^2}=\dfrac{1+x+1}{(1+x)^2}=\dfrac{2+x}{(1+x)^2}$.

Ahora tenemos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{5}{\ln^3(1+x)}}{\dfrac{2+x}{(1+x)^2}}=\dfrac{5}{2}$.

Usando la regla de L'Hôpital $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{\ln(1+x)}-\dfrac{5}{x}\right)=\dfrac{5}{2}$. †

---

4. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}$.

Solución

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}$ es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Procediendo como en los ejercicios anteriores, aplicamos la regla de L'Hôpital, pues tanto $f(x)=1-\cos x$ como $g(x)=\left(e^x-1\right)^2$ son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(-\text{sen}\,x)}{2\left(e^x-1\right)e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,x}{2\left(e^{2x}-e^x\right)}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Aplicamos pues la regla de L'Hôpital a f '(x) y a g'(x), que son también derivables en todo $\mathbb{R}$:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2\left(2e^{2x}-e^x\right)}=\dfrac{1}{2(2-1)}=\dfrac{1}{2}$. Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{1}{2}\ †$$

5. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\frac{4\left(x-\ln\left(1+x\right)\right)}{x\ln\left(1+x\right)}$.

Solución

Regla de L'Hôpital

Si f y g son funciones continuas y derivables en un intervalo abierto que contiene a un punto x_o verificando:

a) $\lim_{x\to x_o} f\left(x\right)=\lim_{x\to x_o} g\left(x\right)=0$.

b) $g'\left(x\right)\neq 0$ en cualquier $x\neq x_o$ del intervalo.

c) Existe $\lim_{x\to x_o}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$.

Entonces existe $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x\to x_o}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to x_o}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$.

$\lim_{x\to 0}\frac{4\left(x-\ln\left(1+x\right)\right)}{x\ln\left(1+x\right)}$ presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Tanto $f\left(x\right)=4\left(x-\ln\left(1+x\right)\right)$ como $g\left(x\right)=x\ln\left(1+x\right)$ son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (que en ambos casos es $\left(-1,+\infty\right)$, pues el logaritmo está definido para todo $x>0$), en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$.

$$f'\left(x\right)=4\left(1-\frac{1}{1+x}\right)=4\left(\frac{x}{1+x}\right)=\frac{4x}{1+x},\quad g'\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)+\frac{x}{1+x}=\frac{\left(1+x\right)\ln\left(1+x\right)+x}{1+x}.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x}{1+x}}{\frac{\left(1+x\right)\ln\left(1+x\right)+x}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\left(1+x\right)\ln\left(1+x\right)+x}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones $f'\left(x\right)$ y $g'\left(x\right)$, pues estas vuelven a ser derivables en un entorno de cero, con lo que $\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''\left(x\right)}{g''\left(x\right)}$.

$$f''(x)=4,\quad g''\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)+\left(1+x\right)\frac{1}{1+x}+1=\ln\left(1+x\right)+2.$$

Así: $\lim_{x\to 0}\frac{f''\left(x\right)}{g''\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\ln\left(1+x\right)+2}=\frac{4}{0+2}=2\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{4\left(x-\ln\left(1+x\right)\right)}{x\ln\left(1+x\right)}=2$. †

6. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}$.

Solución

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio anterior.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}$ es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Aplicando, como en casos anteriores, la regla de L'Hôpital, tenemos: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{4x^3-4x}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Pero $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{12x^2-4}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$, con lo que

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{g''(x)}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}=\frac{3}{4}$$

Este límite también se podría haber hecho sin aplicar la regla de L'Hôpital. Bastaría simplificar la fracción algebraica.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{(x+1)^2}=\frac{3}{4}\ \dagger$$

7. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos 2x-\operatorname{sen} 2x}{x^3}$.

Solución

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio número 5.

Claramente $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos 2x-\operatorname{sen} 2x}{x^3}$ es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Derivando numerador y denominador y volviendo a hacer el límite en cero, tenemos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x-4x\operatorname{sen} 2x-2\cos 2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x\operatorname{sen} 2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4\operatorname{sen} 2x}{3x}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Pero $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-8\cos 2x}{3}=-\dfrac{8}{3}$, con lo que, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=-\frac{8}{3}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos 2x-\operatorname{sen} 2x}{x^3}=-\frac{8}{3}\ \dagger$$

8. Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Solución

Puedes consultar el enunciado de la regla de L'Hôpital en el ejercicio número 5.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ es una indeterminación del tipo $\infty-\infty$ (ver ejercicio número 3).

Operando tenemos $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$, que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Llamemos $f(x)=x-\ln(1+x)$ y $g(x)=x\cdot\ln(1+x)$, que son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (en ambos casos es $(-1,+\infty)$, pues el logaritmo está definido para todo $x>0$), y en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$, $g'(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}=\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}$.

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones $f'(x)$ y $g'(x)$, pues estas vuelven a ser derivables en un entorno de cero, con lo que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

$f''(x)=1$, $g''(x)=\ln(1+x)+(1+x)\frac{1}{1+x}+1=\ln(1+x)+2$.

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+2}=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{4(x-\ln(1+x))}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\quad\dagger$$

---

9. a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

   b) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

Solución

El enunciado de la regla de L'Hôpital se puede consultar en el ejercicio número 5.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, y $\lim_{x\to 0}\frac{2x\,e^{x^2}}{-\operatorname{sen} x}$ también lo es. Pero $\lim_{x\to 0}\frac{2\,e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{-\cos x}=\frac{2}{-1}=-2$.

Por tanto, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=-\frac{8}{3}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=-2\quad\dagger$$

10. a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Resuelve el límite siguiente: $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}$.

Solución

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio 5.

$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Tanto $f(x)=x-\operatorname{sen} x$ como $g(x)=\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x$ son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y g es derivable en $\mathbb{R}-\{\pi/2+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$), en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$f'(x)=1-\cos x$.

$g'(x)=\sec^2 x-\cos x=\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x=\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}$.

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^3 x}{1-\cos^3 x}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicaremos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones $h(x)=\cos^2 x-\cos^3 x$ y $j(x)=1-\cos^3 x$, pues estas son también derivables en un entorno de cero, con lo que $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{j(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{h'(x)}{j'(x)}$. Realizaremos pues las derivadas de las funciones h y j.

$h'(x)=2\cos x(-\operatorname{sen} x)-3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)=3\cos^2 x\operatorname{sen} x-2\cos x\operatorname{sen} x$.

$j'(x)=-3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)=3\cos^2 x\operatorname{sen} x$.

Entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{h'(x)}{j'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\operatorname{sen} x-2\cos x\cdot\operatorname{sen} x}{3\cos^2 x\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{3\cos x}\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^3 x}{1-\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{3}.$$

Con lo que, finalmente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{3}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}=\frac{1}{3}\quad\dagger$$

11. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x} \text{ ; b) } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$$

Solución

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Tanto $f(x)=x^3-8x^2+7x$ como $g(x)=x^2-x$ son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$, en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$f'(x)=3x^2-16x+7$, $g'(x)=2x-1$.

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-16x+7}{2x-1}=-7\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x}=-7$. †

b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$ da lugar a una indeterminación del tipo 1^∞. Supongamos que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}=l$, entonces $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\left[\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right]=\ln l$ (el logaritmo neperiano es una función continua, por tanto, el logaritmo del límite coincide con el límite del logaritmo).

Entonces: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\left[\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\ln\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)}{\cos x}$, límite que da lugar a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Las funciones $f(\mathrm{x})=\ln\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)$ y $g(x)=\cos x$ son derivables en todo $\mathbb{R}$, en particular lo son en un entorno de $\frac{\pi}{2}$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{2x}{\pi}+\cos x}\cdot\left(\frac{2}{\pi}-\operatorname{sen}x\right)=\frac{\frac{2-\pi\operatorname{sen}x}{\pi}}{\frac{2x+\pi\cos x}{\pi}}=\frac{2-\pi\operatorname{sen}x}{2x-\pi\cos x}\ ;\ g'(x)=-\operatorname{sen}x.$$

Con lo que: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{2-\pi\operatorname{sen}x}{2x-\pi\cos x}}{-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2-\pi\operatorname{sen}x}{-\operatorname{sen}x\left(2x-\pi\cos x\right)}=\frac{2-\pi}{-\left(2\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2-\pi}{-\pi}=1-\frac{2}{\pi}$.

Por tanto, $\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}}=\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{\mathrm{f'(x)}}{\mathrm{g'(x)}}\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\left[\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right]=1-\frac{2}{\pi}$.

De este modo, $\ln l = 1-\dfrac{2}{\pi} \Rightarrow l = e^{1-\frac{2}{\pi}}$ y entonces $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{1-\frac{2}{\pi}}$. †

12. Calcula los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{2x^3}$

Solución

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ es una indeterminación del tipo 1^∞. Tomando logaritmos y procediendo como en el apartado b) del ejercicio anterior tenemos: $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = l \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \ln l \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)}{x-1} = \ln l$.

Llamemos $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$ y $g(x) = x-1$. Entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2x+1}{x+2}}\cdot\frac{2(x+2)-(2x+1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2}{2x+1}\cdot\frac{3}{(x+2)^2} = \frac{3}{(2x+1)(x+2)},\ g'(x)=1.$$

Por tanto, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{3}{(2x+1)(x+2)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{3}$, con lo que $\ln l = \dfrac{1}{3} \Rightarrow l = e^{1/3}$, es decir, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{1/3}$. †

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{2x^3}$ es claramente una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Aplicando varias veces la regla de L'Hôpital, por un argumento varias veces repetido:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - (\cos x - x\operatorname{sen} x)}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x}{6x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{12x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.\ †$$

13. Calcula el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, para que se verifique la igualdad $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{a}{x^2}}$.

Solución

En primer lugar, calcularemos el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$, que presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, haciendo uso de la regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-1$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Procediendo como en los dos ejercicios anteriores calcularemos $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{a}{x^2}}$, que presenta una indeterminación del tipo 1^{∞}. Supongamos que $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{a}{x^2}}=l$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{a}{x^2}}=\ln l\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\ln(\cos x)}{x^2}=\ln l$.

Aplicaremos la regla de L'Hôpital para calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\ln(\cos x)}{x^2}$, que es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-a\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\,\mathrm{tg}\,x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sec^2 x}{2}=-\frac{a}{2}.$$ Luego, $\ln l=-\dfrac{a}{2}\Rightarrow l=\mathrm{e}^{-a/2}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a/2}}$.

Así pues, para que sea $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{a}{x^2}}$, tendrá que ser $\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e^{a/2}}$, de donde claramente $\dfrac{a}{2}=1\Rightarrow a=2$. †

---

14. a) Calcula para qué valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ se verifica la igualdad $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-2}$.

    b) Calcula el límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$.

Solución

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}}$ es una indeterminación del tipo 1^{∞}.

Supongamos que $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}}=l$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}}=\ln l\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(ax))}{x^2}=\ln l$.

Apliquemos la regla de L'Hôpital para calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(ax))}{x^2}$, que presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$: $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-a\,\mathrm{sen}(ax)}{\cos(ax)}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\,\mathrm{tg}(ax)}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-a^2\sec^2(ax)}{2}=-\frac{a^2}{2}.$$

Por tanto, $\ln l=-\dfrac{a^2}{2}\Rightarrow l=\mathrm{e}^{-a^2/2}\Rightarrow l=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a^2/2}}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}(\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a^2/2}}$.

Como $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-2}$, entonces $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a^2/2}}=\mathrm{e}^{-2}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\Rightarrow\dfrac{a^2}{2}=2\Rightarrow a^2=4\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ a=2\end{cases}$. †

b) En el límite $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ se presenta una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Para resolverla, en primer lugar, vamos a multiplicar y a dividir por el conjugado de la expresión $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left((x+1)-(x-1)\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.\ \textbf{(1)}$$

El límite anterior es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. La regla de L'Hôpital también resuelve este tipo de límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1.\ \textbf{(2)}$$

En el último paso se ha hecho uso de que, si en una función racional aparece la indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, y el grado del numerador es igual que el grado del denominador, entonces el límite es igual al cociente de los coeficientes líderes de los polinomios del numerador y del denominador. La función raíz cuadrada de un polinomio se puede considerar a su vez polinómica. Bastará elevar el polinomio del radicando a $\frac{1}{2}$. Como se puede observar en **(2)**, el polinomio de arriba es degrado uno y el de abajo también. Pero esta misma técnica ya se podía haber aplicado en **(1)**, donde los grados son ambos igual a $\frac{1}{2}$ y tendríamos el mismo resultado. Si se ha aplicado la regla de L'Hôpital ha sido para mostrar que también funciona si nos encontramos con la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. †

---

15. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{xe^{\operatorname{sen}x}}\ ,\ \lim_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen}x}}$$

Solución

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{xe^{\operatorname{sen}x}}$ es claramente una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{xe^{\operatorname{sen}x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{e^{\operatorname{sen}x}+x\cos x\,e^{\operatorname{sen}x}}=\frac{\frac{2}{1+0}}{1+0}=2\ †$$

$\lim_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen}x}}$ es una indeterminación del tipo 1^∞. Para resolverla seguiremos el mismo procedimiento visto en ejercicios anteriores.

Llamemos $\lim_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen}x}}=l$. Entonces $\lim_{x\to0}\ln(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen}x}}=\ln l$, y de aquí $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}x)}{x+\operatorname{sen}x}=\ln l$. El límite

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}x)}{x+\operatorname{sen}x}$ presenta ahora una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. La resolveremos aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}x)}{x+\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg}x}}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg}x)}}{1+\cos x}=\frac{\dfrac{1}{1(1+0)}}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Por tanto, $\ln l=\dfrac{1}{2}\Rightarrow l=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$, es decir, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen}x}}=\sqrt{e}$. †