
Continuidad de las funciones. Derivadas

1. Estudiar en $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$ la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x}{\pi} + 2 & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ 2 + \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$$

Solución

f es claramente continua en todo \mathbb{R} salvo, quizás, en $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$. Estudiemos la continuidad en estos puntos:

• $x=0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x}{\pi} + 2 \right) = 2 \end{cases} . \text{Entonces no existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ por ser distintos los límites laterales y, por tanto, } f$$

no es continua en 0 (discontinuidad de salto de longitud $L=1$)

• $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{2x}{\pi} + 2 \right) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (2 + \operatorname{sen} x) = 3 \end{cases} . \text{Entonces } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 3 = f\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ con lo que } f \text{ es continua en } x = \frac{\pi}{2}.$$

Resumiendo: f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$, con derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi} & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } x > \pi/2 \end{cases} .$$

En $x=0$ no es derivable pues no es continua, y en $x=\frac{\pi}{2}$ se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} f' \left(\frac{\pi^-}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \left(\frac{2}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \\ f' \left(\frac{\pi^+}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} (\cos x) = 0 \end{array} \right. , \text{ con lo que } f \text{ no es derivable en el punto } x = \frac{\pi}{2}, \text{ ya que las derivadas}$$

laterales son distintas.

Resumiendo: f es derivable en $\mathbb{R} - \left\{ 0, \frac{\pi}{2} \right\}$.

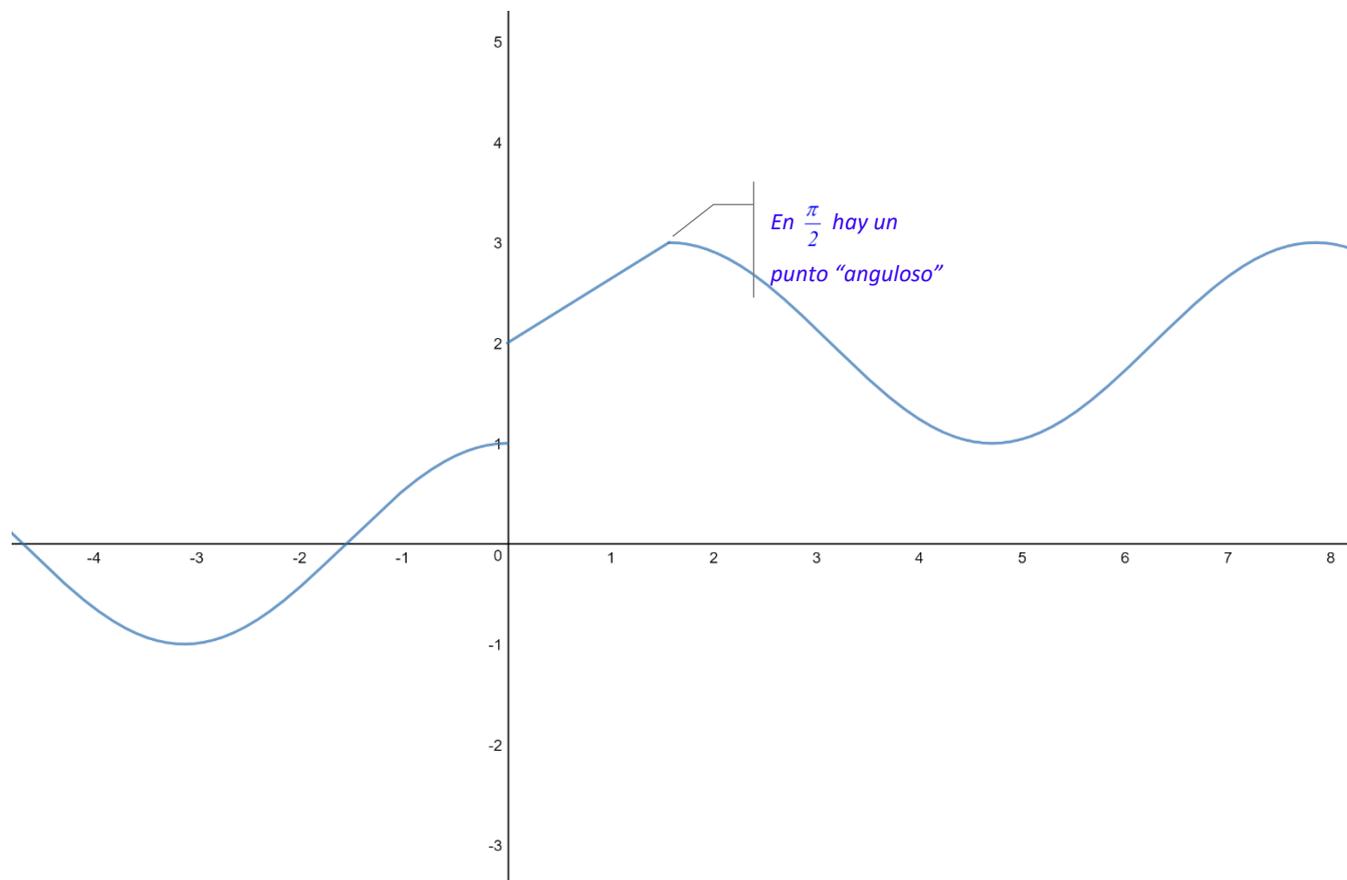
La derivabilidad en $x = \frac{\pi}{2}$ también se podría haber estudiado utilizando la definición de derivada de una función para

hallar las derivadas laterales a la izquierda y a la derecha de $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\left(\frac{2x}{\pi} + 2\right) - \left(2 + \sin \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\frac{2x}{\pi} + 2 - 3}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\frac{2x - \pi}{\pi}}{\frac{2x - \pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{(2 + \sin x) - \left(2 + \sin \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \cos x = 0 \text{ (en este último paso se}$$

ha utilizado la regla de L'Hôpital). †



2. Calcular a y b para que $f(x)$ sea continua en $x=0$ y $x=1$.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ a + x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ b/2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudiar la derivabilidad en $x=0$ y $x=1$.

Solución:

Para que f sea continua en 0 debe existir el límite cuando x tiende a 0 y coincidir con la imagen de la función en 0.

El límite en 0 existirá si existen los límites laterales y son iguales. Simbólicamente, f es continua en cero si:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \cos 0 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + x^3) = a \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Análogamente, f es continua en $x=1$ si:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = a + 1^3 = 2 \Leftrightarrow (\text{acabamos de hacer uso de que } a = 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a + x^3) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{2x} = \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b}{2} = 2 \Leftrightarrow b = 4.$$

Para estos dos valores de a y b la función queda de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$, con derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -\text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -2/x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

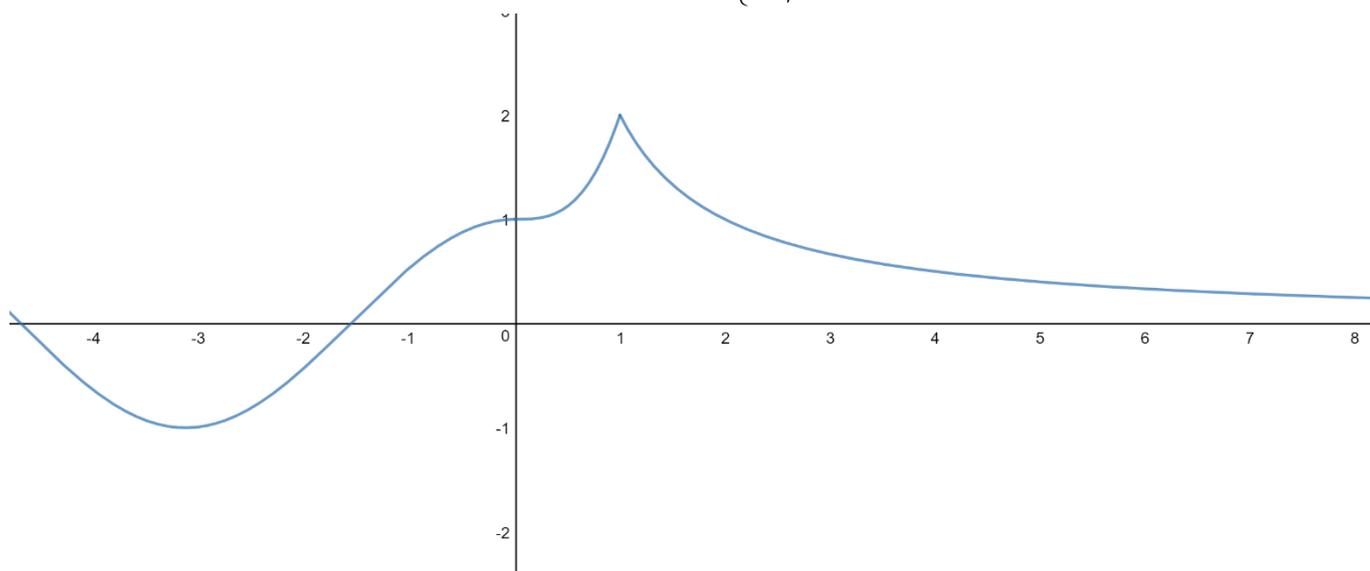
En $x=0$ tenemos: $\begin{cases} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\text{sen } x) = 0 \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 = 0 \end{cases}$. Entonces f es derivable en el punto $x=0$, pues las

derivadas laterales coinciden. Además $f'(0) = 0$.

En $x=1$ se tiene:
$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2) = 3 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = -2 \end{cases}$$
 . Entonces f no es derivable en el punto $x=1$, pues las

derivadas laterales son distintas.

Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} -\text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2/x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



3. Calcular a y b para que $f(x)$ sea continua en $x=0$ y $x=1$.

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ b/2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

Solución

Para que f sea continua en 0 debe existir el límite cuando x tiende a 0 y coincidir con la imagen de la función en 0. El límite en 0 existirá si existen los límites laterales y son iguales. Simbólicamente, f es continua en cero si:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = e^0 = +a = 1+a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + a) = 1+a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + 2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1+a = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

Análogamente, en $x=1$: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = a+2 = 3 \Leftrightarrow$ (recuérdese que $a=1$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{2x} = \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b}{2} = 3 \Leftrightarrow b = 6.$$

Para estos dos valores de a y b la función queda de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$, con derivada

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -3/x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = 0$ se tiene: $\begin{cases} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \end{cases}$. Entonces f no es derivable en el punto $x = 0$, pues las

derivadas laterales son distintas.

En $x = 1$ se tiene: $\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{3}{x^2}\right) = -3 \end{cases}$. Entonces f no es derivable en el punto $x = 1$, pues las

derivadas laterales son distintas.

Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -3/x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

4. Determinar a y b para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$ y $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + ax^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{a}{2x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ e^{x-1} + 2b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar si $f(x)$ es derivable en $x = 1$.

Solución

Para que f sea continua en $x = -1$ debe existir el límite cuando x tiende a -1 y coincidir con la imagen de la función en -1 . El límite en -1 existirá si existen los límites laterales y son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 2(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = a - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^3 + ax^2 - 1) = 2(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = a - 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{a}{2x} \right) = -\frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - 3 = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow 2a - 6 = -a \Leftrightarrow 3a = 6 \Leftrightarrow a = 2.$$

$$\text{Análogamente, en } x = 1: \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1 \Leftrightarrow (\text{recuérdese que } a = 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{x-1} + 2b) = e^0 + 2b = 1 + 2b \end{cases} \Leftrightarrow 1 = 1 + 2b \Leftrightarrow 0 = 2b \Leftrightarrow b = 0.$$

Para estos dos valores de a y b la función queda de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1/x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Obsérvese en primer lugar que f está definida en $\mathbb{R} - \{0\}$, por tanto, en $x = 0$ la función no es continua ni derivable.

De hecho, en $x = 0$ hay una asíntota vertical.

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) - \{0\}$, con

$$\text{derivada } f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 4x & \text{si } x < -1 \\ -1/x^2 & \text{si } -1 < x < 1. \\ e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{En } x = -1 \text{ tenemos: } \begin{cases} f'(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (6x^2 + 4x) = 2 \\ f'(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -1 \end{cases} \text{ . Entonces } f \text{ no es derivable en el punto } x = -1$$

pues las derivadas laterales son distintas.

$$\text{En } x = 1 \text{ se tiene: } \begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -1 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{x-1} = 1 \end{cases} \text{ . Entonces } f \text{ no es derivable en el punto } x = 1, \text{ pues las}$$

derivadas laterales son distintas.

$$\text{Por tanto, } f \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \text{ con derivada } f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 4x & \text{si } x < -1 \\ -1/x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -1/x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \cdot \dagger$$

5. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

La función f es claramente continua en todo \mathbb{R} salvo, quizás, en $x = -1$ y $x = 1$. Estudiemos la continuidad en estos dos puntos.

$$\text{En } x = -1: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x+5) = 3(-1)+5 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 = f(-1).$$

Por tanto, f es continua en $x = -1$.

$$\text{En } x = 1: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 1) = -1 \end{cases}. \text{ Entonces no existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ por ser los límites laterales distintos,}$$

con lo que f no es continua en $x = 1$ (hay una discontinuidad de salto finito en $x = 1$).

La función f es claramente derivable en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ con derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{En } x = -1 \text{ se tiene: } \begin{cases} f'(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 3 \\ f'(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 0 \end{cases}. \text{ Entonces } f \text{ no es derivable en el punto } x = -1, \text{ pues las derivadas}$$

laterales son distintas.

Por otro lado, como f no es continua en $x = 1$, f no es derivable en $x = 1$.

Resumiendo, f es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ con derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1. \dagger \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

6. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ a + bx & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, determinar a y b de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudiar la derivabilidad.

Solución

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + bx) = a \end{cases} \Rightarrow \text{para que } f \text{ sea continua en } x = 0 \text{ debe de ser } a = 0 \text{ pues en este caso}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} bx = b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{para que } f \text{ sea continua en } x = 1 \text{ ha de ser } b = 3 \text{ pues en este caso } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$$

Por tanto, si $a = 0$ y $b = 3$, f es continua en todo \mathbb{R} y queda de la siguiente manera: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x & \text{si } 0 < x \leq 1. \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

En principio, f es claramente derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ con derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 1. \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Estudiemos la derivabilidad en $x = 0$ y $x = 1$.

$$\begin{cases} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 0 \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 3 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = 0, \text{ pues las derivadas laterales son}$$

distintas.

$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 3 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = 1, \text{ pues las derivadas laterales son distintas.}$$

En resumen: f es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 1. \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

7. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

La función f es claramente continua en todo \mathbb{R} salvo, quizás, en $x = 1$. Estudiemos la continuidad en este punto:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4x - 2) = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 1 \text{ pues } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1).$$

La función es derivable en todo $\mathbb{R} - \{1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ -2x+4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x=1$: $\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(2-x)^2} = 1 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x+4) = 2 \end{cases} \Rightarrow f$ no es derivable en el punto

$x=1$, pues las derivadas laterales no coinciden.

Resumiendo: f es derivable en todo $\mathbb{R} - \{1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ -2x+4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

8. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determina k para que $f(x)$ sea continua en $x=1$.

b) ¿Es la función $f(x)$ para el valor k calculado derivable en $x=1$?

Solución:

a) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+5) = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+k) = 1+k \end{cases} \Rightarrow 7 = 1+k \Rightarrow k = 6$. Por tanto, si $k = 6$ se cumple que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7 = f(1)$

y f es continua en $x = 1$.

b) Si $k = 6$ la función es: $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, que es derivable en todo \mathbb{R} salvo, quizás en $x=1$, con

derivada $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 1$:

$\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2 \end{cases} \Rightarrow f$ es derivable en $x=1$ pues coinciden las derivadas laterales.

Por tanto, f es derivable en todo \mathbb{R} con derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

9. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2 + bx & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ x-4 & \text{si } 4 < x \end{cases}$, determina a y b de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad.

Solución:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x+1) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (ax^2 + bx) = 4a - 2b \end{cases} \Rightarrow f \text{ será continua en } x = -2 \text{ si } -3 = 4a - 2b.$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (ax^2 + bx) = 16a + 4b \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x-4) = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ será continua en } x = 4 \text{ si } 16a + 4b = 0.$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 4a + 2b = -3 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases}$, se obtiene $a = -\frac{1}{4}$ y $b = 1$. Para estos dos valores f es continua en todo \mathbb{R}

y la función queda de la forma: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + x & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ x-4 & \text{si } 4 < x \end{cases}$.

En principio, f es claramente derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 4\}$ con derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -\frac{1}{2}x + 1 & \text{si } -2 < x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = -2$ y $x = 4$.

$$\begin{cases} f'(-2^-) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = 2 \\ f'(-2^+) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow f \text{ es derivable en el punto } x = -2, \text{ pues las derivadas laterales}$$

coinciden.

$$\begin{cases} f'(4^-) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = -1 \\ f'(4^+) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = 4, \text{ pues las derivadas laterales}$$

son distintas.

En resumen: f es derivable en $\mathbb{R} - \{4\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{3}{2}x - 3 & \text{si } -2 < x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$.

10. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en el punto $x = 0$. Calcula cuánto valen las constantes b y c .

Solución:

Como es derivable en $x = 0$, entonces es continua en $x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = c = f(0)$ y los límites laterales deben coincidir y ser iguales a c :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = c.$$

Utilicemos la regla de L'Hôpital para calcular el límite a la derecha de cero:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Por tanto, para que f sea derivable en $x = 0$ debe de ser $c = 1$,

La derivada de la función f es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

pues la derivada de la función $y = \frac{\ln(1+x)}{x}$ es:

$$y' = \frac{\frac{1}{1+x} \cdot x - \ln(1+x) \cdot 1}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

Como f es derivable en $x = 0$, coinciden las derivadas laterales en $x = 0$:

$$\begin{cases} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + b) = b \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

El segundo de los límites se ha hecho volviendo a utilizar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \left(\ln(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} \right)}{2x(1+x) + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(1+x)}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{6x + 2} = \frac{-1}{2}.$$

11. Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

- a) Define continuidad de una función en un punto.
 b) ¿En qué puntos es continua la función $f(x)$?
 c) ¿En qué puntos es derivable la función $f(x)$?
 d) Si una función no es continua en un punto, ¿puede ser derivable en él?
-

Solución:

a) Una función f es continua en un punto $x = a$ si existe el límite de la función en $x = a$ y es finito, y coincide con la imagen de la función en dicho punto:

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \text{existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, L \in \mathbb{R} \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = f(a)$$

b) f es continua en todo \mathbb{R} , salvo quizás en $x = 3$. Estudiemos la continuidad en este punto:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4x + 3) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x - 4) = 2 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es continua en } x = 3, \text{ pues al no coincidir los límites laterales, no}$$

existe el límite de la función en $x = 3$ (hay una discontinuidad de salto finito en $x = 3$).

c) Si f no es continua en un punto, entonces no es derivable en dicho punto. Por tanto, f no es derivable en $x = 3$.

En el resto de puntos sí que es derivable (las funciones polinómicas son derivables en todo \mathbb{R}), con derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

d) No. Una condición necesaria para que una función sea continua es que sea derivable, pero no es suficiente: es decir, una función continua no tiene porqué ser derivable. De aquí se deduce que toda función que no es continua en un punto, no es derivable en dicho punto. Simbólicamente:

$$[f \text{ derivable} \Rightarrow f \text{ continua}] \Rightarrow [f \text{ no continua} \Rightarrow f \text{ no derivable}] +$$

12. Determina b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) Sea derivable en todos los puntos de \mathbb{R} .
 b) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1.
-

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 8$ y para que exista $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ deben de existir los

laterales y ser iguales: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + bx + c) = -4 + 2b + c \end{cases} \Rightarrow 8 = -4 + 2b + c \Rightarrow 2b + c = 12 (*)$

La función derivada en $\mathbb{R} - \{2\}$ es: $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 2 \\ -2x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

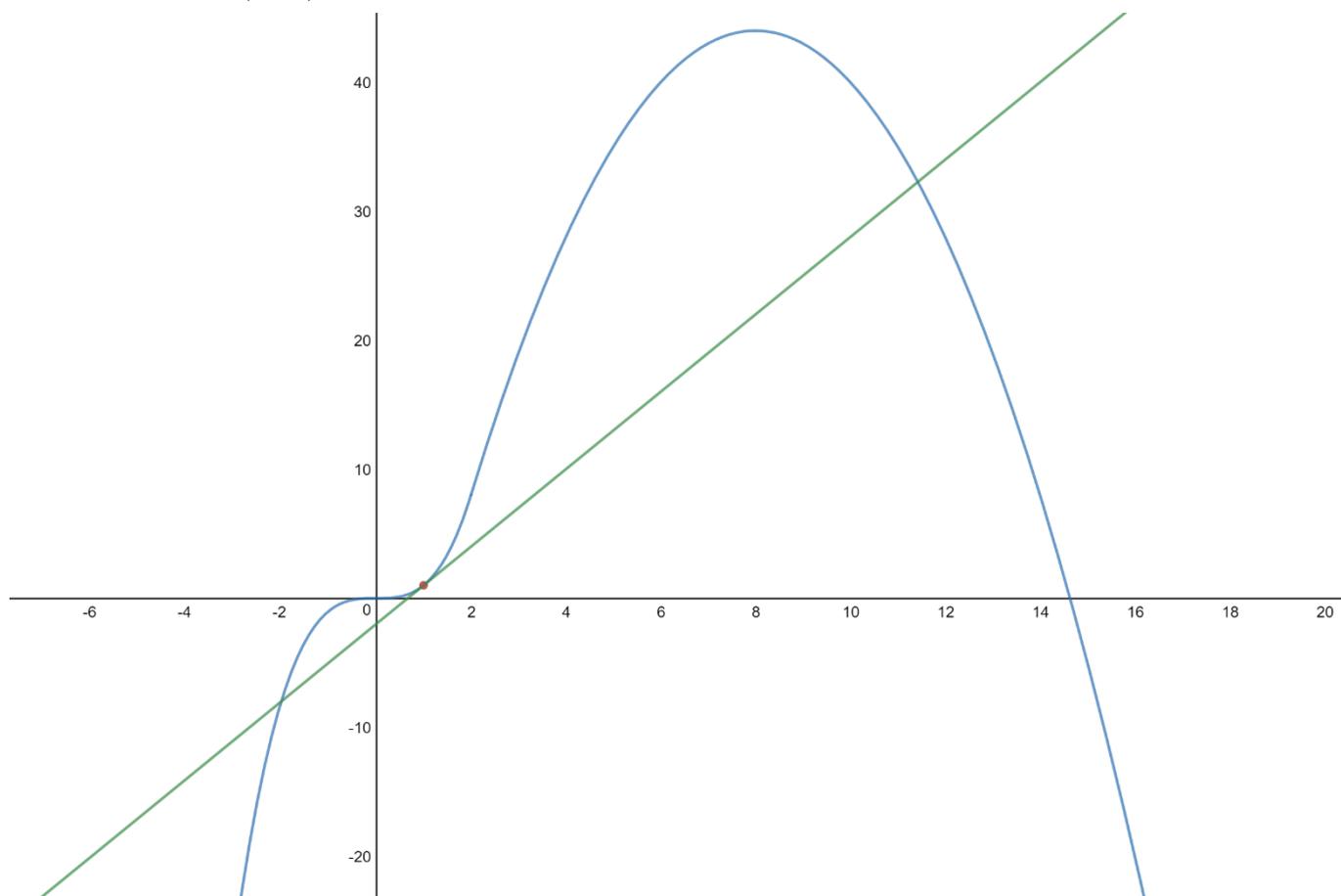
Para que f sea derivable en $x = 2$ las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$$\begin{cases} f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2) = 12 \\ f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2x + b) = -4 + b \end{cases} \Rightarrow 12 = -4 + b \Rightarrow b = 16.$$

Sustituyendo en (*), $32 + c = 12 \Rightarrow c = -20$.

b) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

Entonces: $y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 2$



13. Considera la función siguiente $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Determina los valores de a y b para que sea derivable en todos los puntos.
- Esboza la gráfica de la curva representativa de la función para los valores de a y b calculados.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - x^2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \end{cases} \Rightarrow a + b = 0 \quad (*)$$

La derivada de f en $\mathbb{R} - \{1\}$ es: $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Para que f sea derivable en $x = 1$ deben de coincidir las derivadas laterales:

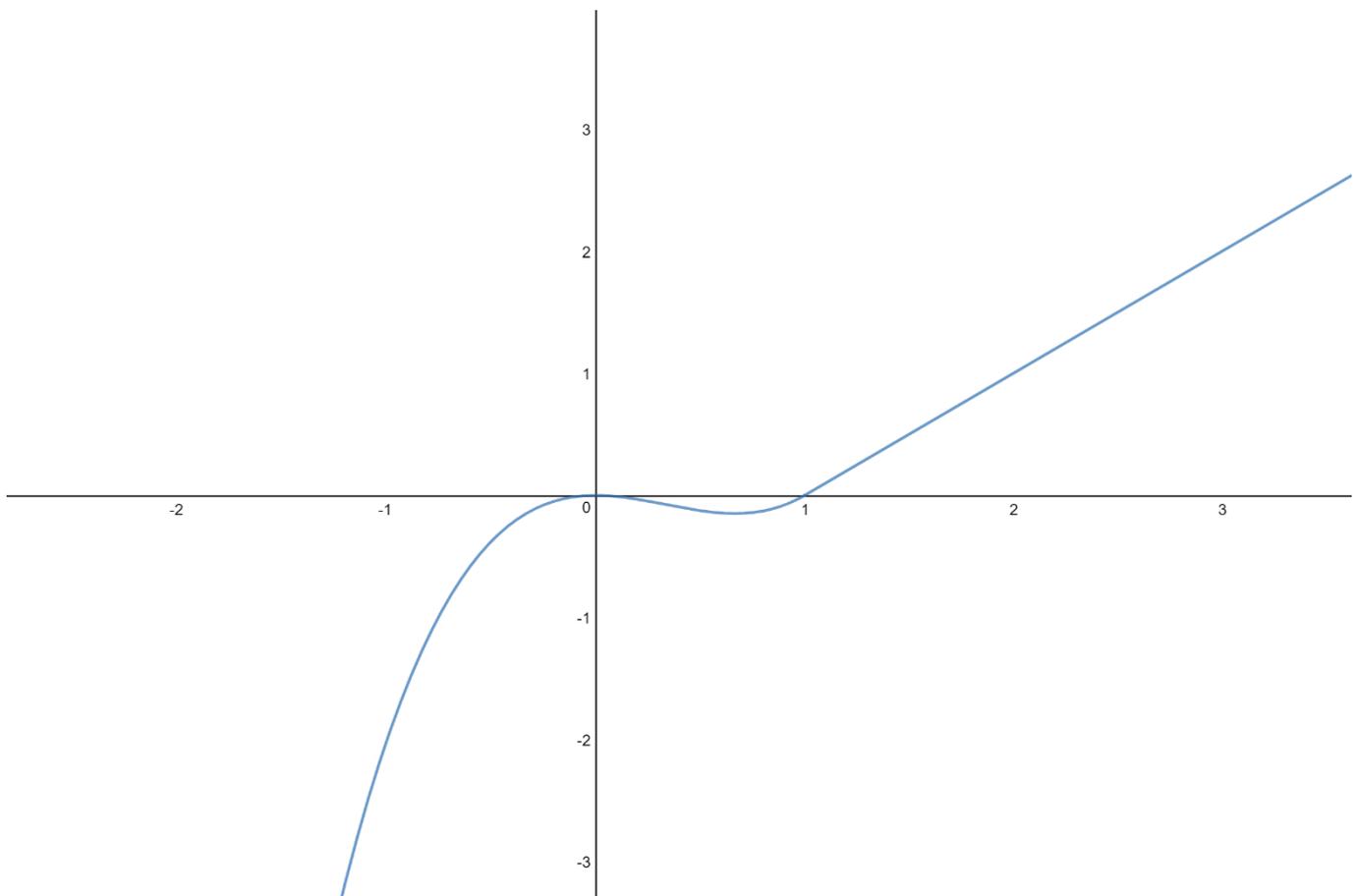
$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 2x) = 1 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = a \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

Sustituyendo en (*), $1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$.

Por tanto, para que f sea derivable en todos los puntos han de ser $a = 1$ y $b = -1$.

En este caso la función es: $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

- b) Obsérvese, en la gráfica de la función, lo “bien que pega” el trozo a la izquierda de $x = 1$ con el trozo a la derecha de $x = 1$, para no formar un “punto anguloso” y, de este modo, la función sea derivable en $x = 1$.



†

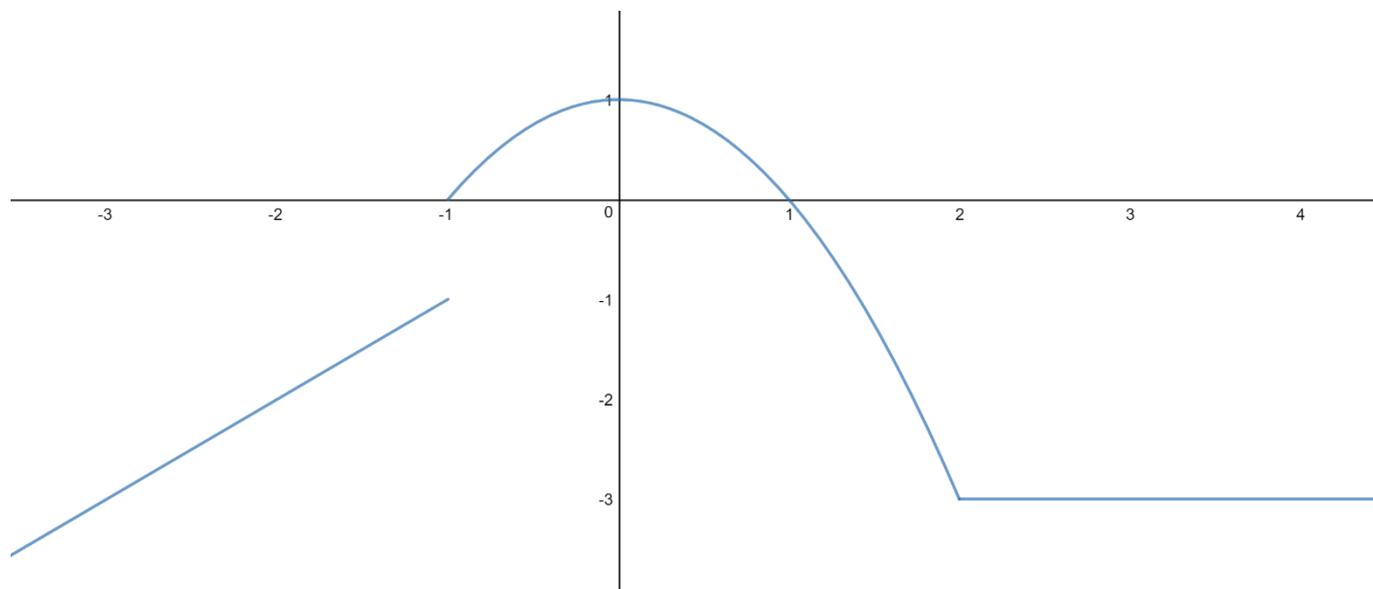
14. Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$ es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 2$. Representa gráficamente dicha función.

Solución:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ porque los límites laterales no coinciden, con lo que } f \text{ no es}$$

continua en $x = -1$ (discontinuidad de salto finito de longitud 1).

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (1-x^2) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3 = f(2) \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 2. \dagger$$



15. Determina, si es posible, los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & \text{si } x < 0 \\ (2x-k)^2 - 6 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ sea continua en } x = 0.$$

Solución:

El límite por la izquierda de cero lo calcularemos utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} = \left[\frac{0}{0} \rightarrow \text{L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-e^x}{2-2e^{2x}} = \left[\frac{0}{0} \rightarrow \text{L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^x}{-4e^{2x}} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

El límite por la derecha de cero es:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((2x - k)^2 - 6) = k^2 - 6.$$

Para que exista el límite deben de coincidir los límites laterales:

$$k^2 - 6 = \frac{1}{4} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4} + 6 \Rightarrow k^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow k = \pm \frac{5}{2}.$$

Para estos valores de k , f será continua en $x = 0$ pues entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. †

16. a) Define el concepto de función continua en un punto.

b) Si $f(x) = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x = a$ no está definida $f(x)$.

c) Calcula el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la función $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$ sea continua.

Solución:

a) Una función f es continua en un punto $x = a$ si existe el límite de la función en $x = a$ y es finito, y coincide con la imagen de la función en dicho punto:

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \text{existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, L \in \mathbb{R} \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = f(a)$$

b) f no está definida en $x = 0$ porque anula el denominador de la expresión $\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$.

c) g es continua en todo punto donde lo sea f , o sea, en $\mathbb{R} - \{0\}$. Es decir, la función $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$,

es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. Para que g sea continua en $x = 0$, debe existir $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = b$.

Entonces: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} + 3e^{-3x}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, donde se ha utilizado la regla de L'Hôpital.

Por tanto, el valor de b para que g sea continua es $b = \frac{3}{2}$. †

17. Enuncia el teorema de Bolzano. Como aplicación de este teorema, demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^{x^2}$ y $g(x) = 2 \cos(x^2)$ se cortan en, al menos, un punto.

Solución:

Enunciado del teorema de Bolzano.

Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Consideremos la función auxiliar definida de la siguiente forma: $h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow h(x) = e^{x^2} - 2\cos(x^2)$.

Esta función es claramente continua en todo \mathbb{R} .

La idea ahora consiste en buscar un intervalo $[a, b]$, en el que $h(a)$ y $h(b)$ tengan distinto signo. Por el teorema de Bolzano, existirá $c \in (a, b)$, tal que $h(c) = 0$, es decir, tal que $f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$, lo que demostraría que f y g se cortan en al menos un punto (un punto donde f y g tienen la misma imagen).

Vamos a probar con el intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$. Usamos el valor $\sqrt{\pi}$ porque en la función h la variable x se encuentra elevada al cuadrado, lo que hará que al evaluar $\sqrt{\pi}$, desaparezca la raíz y sea más o menos fácil hacer cálculos.

$$h(0) = e^0 - 2\cos 0 = 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$h(\sqrt{\pi}) = e^{\sqrt{\pi}^2} - 2\cos(\sqrt{\pi}^2) = e^\pi - 2\cos \pi = e^\pi - 2 \cdot (-1) = e^\pi + 2 > 0$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, \sqrt{\pi})$ tal que $h(c) = 0$, es decir, tal que $f(c) = g(c)$, tal y como queríamos demostrar.