Continuidad de las funciones. Derivadas

1. Estudiar en $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$ la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si} \quad x\le 0\\ \frac{2x}{\pi}+2 & \text{si} \quad 0<x<\pi/2\\ 2+senx & \text{si} \quad x\ge \pi/2\end{cases}$$

Solución

f es claramente continua en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizás, en $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$. Estudiemos la continuidad en estos puntos:

- $x=0$

  $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{\pi}+2\right)=2\end{cases}$. Entonces no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ por ser distintos los límites laterales y, por tanto, f no es continua en 0 (discontinuidad de salto de longitud $L=1$)

- $x=\frac{\pi}{2}$

  $\begin{cases}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{2x}{\pi}+2\right)=3\\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left(2+\operatorname{sen} x\right)=3\end{cases}$. Entonces $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)=3=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, con lo que f es continua en $x=\frac{\pi}{2}$.

Resumiendo: f es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$, con derivada

$$f'(x)=\begin{cases}-\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x<0\\ \frac{2}{\pi} & \text{si} \quad 0<x<\pi/2\\ \cos x & \text{si} \quad x>\pi/2\end{cases}.$$

En $x=0$ no es derivable pues no es continua, y en $x=\frac{\pi}{2}$ se tiene:

$$\begin{cases} f'\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}^+\right) \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\cos x) = 0 \end{cases}$$

, con lo que f no es derivable en el punto $x=\frac{\pi}{2}$, ya que las derivadas laterales son distintas.

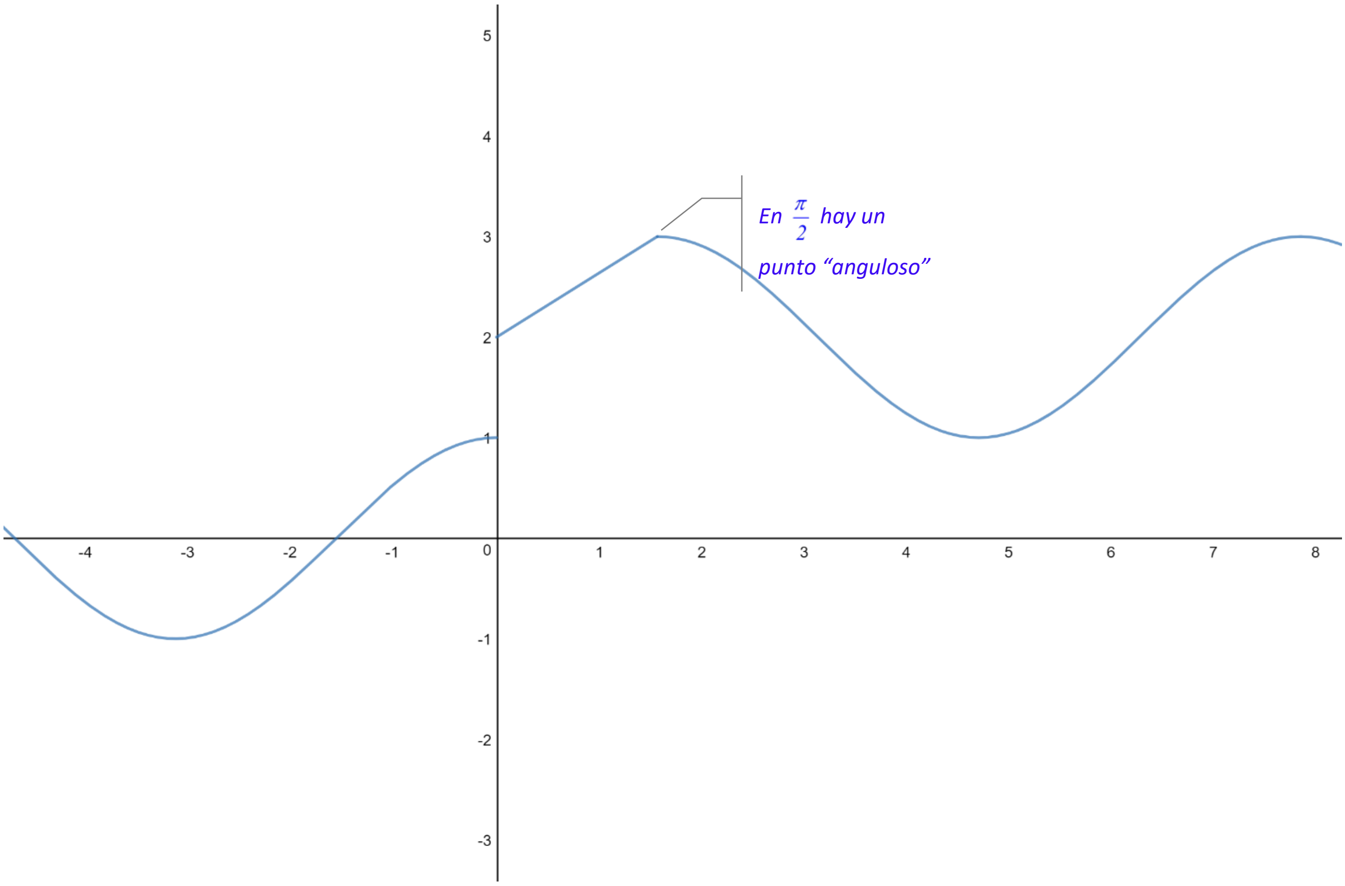
Resumiendo: f es derivable en $\mathbb{R}-\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$.

La derivabilidad en $x=\frac{\pi}{2}$ también se podría haber estudiado utilizando la definición de derivada de una función para hallar las derivadas laterales a la izquierda y a la derecha de $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{2x}{\pi}+2\right)-\left(2+\operatorname{sen}\frac{}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{x}{\pi}+2-3}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{2x-\pi}{\pi}}{\frac{2x-\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{(2+\operatorname{sen}x)-\left(2+\operatorname{sen}\frac{}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos x = 0$$

(en este último paso se ha utilizado la regla de L'Hôpital). †



2. Calcular a y b para que $f\left(x\right)$ sea continua en $x=0$ y $x=1$.

$$|\cos x \quad \text{si} \quad x \le 0$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudiar la derivabilidad en $x=0$ y $x=1$.

Solución:

Para que f sea continua en 0 debe existir el límite cuando x tiende a 0 y coincidir con la imagen de la función en 0. El límite en 0 existirá si existen los límites laterales y son iguales. Simbólicamente, f es continua en cero si:

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right)= f\left(0\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)= \lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)= f\left(0\right)=\cos 0=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} \cos x=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} \left(a+x^3\right)=a \end{cases} \Leftrightarrow a=1.$$

Análogamente, f es continua en $x=1$ si:

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right)= f\left(1\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f\left(x\right)= \lim_{x\to 1^+} f\left(x\right)= f\left(1\right)=a+1^3=2 \Leftrightarrow \text{(acabamos de hacer uso de que } a=1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(a+x^3\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{b}{2x}=\dfrac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b}{2}=2 \Leftrightarrow b=4.$$

Para estos dos valores de a y b la función queda de la siguiente forma:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x\le 0 \\ 1+x^3 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 2/x & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

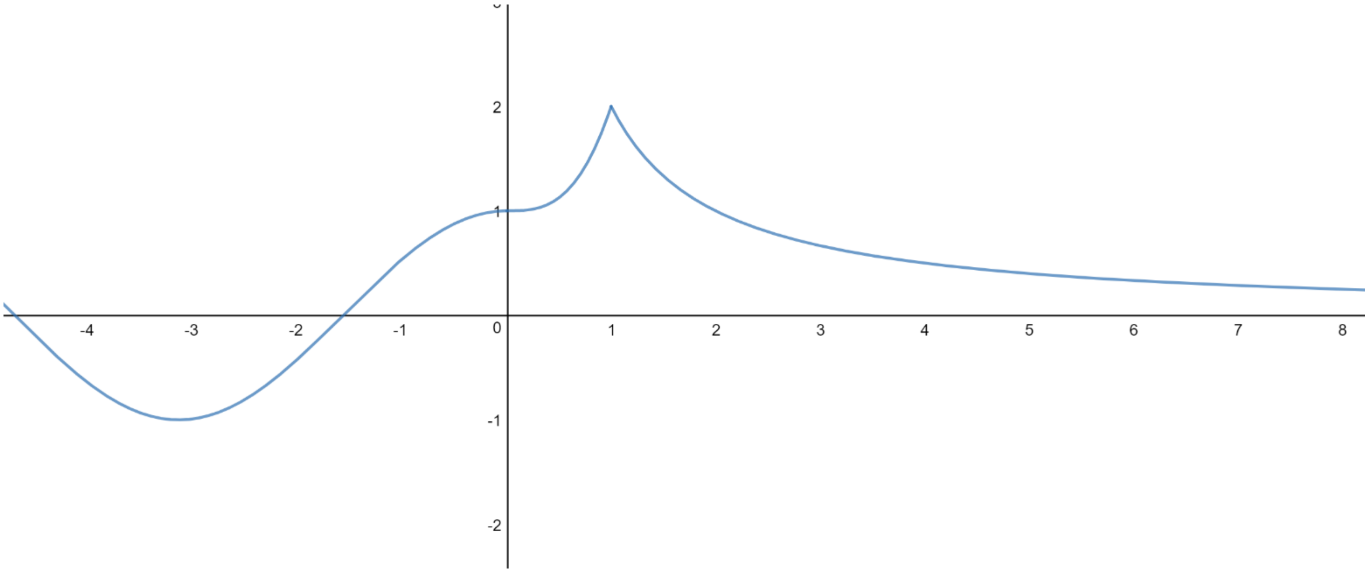
Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$, con derivada

$$f'\left(x\right)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x<0 \\ 3x^2 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ -2/x^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

En $x=0$ tenemos: $\begin{cases} f'\left(0^-\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\operatorname{sen} x\right)=0 \\ f'\left(0^+\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2=0 \end{cases}$. Entonces f es derivable en el punto $x=0$, pues las derivadas laterales coinciden. Además $f'\left(0\right)=0$.

En $x=1$ se tiene: $\begin{cases} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x^2)=3 \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)=-2 \end{cases}$. Entonces f no es derivable en el punto $x=1$, pues las derivadas laterales son distintas.

Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$ con derivada $f'(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x<0 \\ 3x^2 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ -2/x^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$.



3. Calcular a y b para que $f(x)$ sea continua en $x=0$ y $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} e^x+a & \text{si} \quad x\le 0 \\ ax^2+2 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ b/2x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

Solución

Para que f sea continua en 0 debe existir el límite cuando x tiende a 0 y coincidir con la imagen de la función en 0. El límite en 0 existirá si existen los límites laterales y son iguales. Simbólicamente, f es continua en cero si:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\mathrm{e}^0=+a=1+a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\mathrm{e}^x+a)=1+a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow 1+a=2 \Leftrightarrow a=1.$$

Análogamente, en $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=a+2=3 \Leftrightarrow$ (recuérdese que $a=1$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+2\right) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{b}{2x} = \dfrac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b}{2} = 3 \Leftrightarrow b = 6 .$$

Para estos dos valores de *a* y *b* la función queda de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 3/x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$, con derivada

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -3/x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

En $x=0$ se tiene: $\begin{cases} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x = 1 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0 \end{cases}$. Entonces f no es derivable en el punto $x=0$, pues las derivadas laterales son distintas.

En $x=1$ se tiene: $\begin{cases} f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2x = 2 \\ f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right) = -3 \end{cases}$. Entonces f no es derivable en el punto $x=1$, pues las derivadas laterales son distintas.

Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -3/x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ †

---

4. Determinar a y b para que $f(x)$ sea continua en $x=-1$ y $x=1$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + ax^2 - 1 & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{a}{2x} & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ e^{x-1} + 2b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar si $f(x)$ es derivable en $x=1$.

Solución

Para que f sea continua en $x=-1$ debe existir el límite cuando x tiende a -1 y coincidir con la imagen de la función en -1. El límite en -1 existirá si existen los límites laterales y son iguales:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 2(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = a-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(2x^3 + ax^2 - 1\right) = 2(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = a-3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(\dfrac{a}{2x}\right) = -\dfrac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a-3 = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow 2a-6 = -a \Leftrightarrow 3a = 6 \Leftrightarrow a = 2 .$$

Análogamente, en $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \dfrac{2}{2\cdot 1} = 1 \Leftrightarrow$ (recuérdese que $a=2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(e^{x-1} + 2b\right) = e^0 + 2b = 1 + 2b \end{cases} \Leftrightarrow 1 = 1 + 2b \Leftrightarrow 0 = 2b \Leftrightarrow b = 0 .$$

Para estos dos valores de a y b la función queda de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x^2 - 1 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 1/x & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ e^{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Obsérvese en primer lugar que f está definida en $\mathbb{R} - \{0\}$, por tanto, en $x=0$ la función no es continua ni derivable. De hecho, en $x=0$ hay una asíntota vertical.

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty) - \{0\}$, con derivada $f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 4x & \text{si} \quad x < -1 \\ -1/x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ e^{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

En $x=-1$ tenemos: $\begin{cases} f'(-1^-) = \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(6x^2 + 4x\right) = 2 \\ f'(-1^+) = \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -1 \end{cases}$. Entonces f no es derivable en el punto $x=-1$ pues las derivadas laterales son distintas.

En $x=1$ se tiene: $\begin{cases} f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -1 \\ f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} e^{x-1} = 1 \end{cases}$. Entonces f no es derivable en el punto $x=1$, pues las derivadas laterales son distintas.

Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R} - \{-1,0,1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 4x & \text{si} \quad x < -1 \\ -1/x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ -1/x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ e^{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$. †

5. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+5 & \text{si} \quad x\le -1 \\ 2 & \text{si} \quad -1<x\le 1 \\ x^2-3x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Solución:

La función f es claramente continua en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizás, en $x=-1$ y $x=1$. Estudiemos la continuidad en estos dos puntos.

En $x=-1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(3x+5)=3(-1)+5=2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=2 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2=f(-1)$.

Por tanto, f es continua en $x=-1$.

En $x=1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-3x+1\right)=-1 \end{cases}$. Entonces no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ por ser los límites laterales distintos, con lo que f no es continua en $x=1$ (hay una discontinuidad de salto finito en $x=1$).

La función f es claramente derivable en $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ con derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & \text{si} \quad x<-1 \\ 0 & \text{si} \quad -1<x<1 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

En $x=-1$ se tiene: $\begin{cases} f'\left(-1^-\right)=\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=3 \\ f'\left(-1^+\right)=\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=0 \end{cases}$. Entones f no es derivable en el punto $x=-1$, pues las derivadas laterales son distintas.

Por otro lado, como f no es continua en $x=1$, f no es derivable en $x=1$.

Resumiendo, f es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ con derivada

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & \text{si} \quad x<-1 \\ 0 & \text{si} \quad -1<x<1 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}. \dagger$$

6. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ a+bx & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ 3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$, determinar *a* y *b* de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudiar la derivabilidad.

Solución

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(a+bx\right) = a \end{cases}$$ $\Rightarrow$ para que f sea continua en $x=0$ debe de ser $a=0$ pues en este caso $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} bx = b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ para que f sea continua en $x=1$ ha de ser $b=3$ pues en este caso $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3 = f(1)$

Por tanto, si $a=0$ y $b=3$, f es continua en todo $\mathbb{R}$ y queda de la siguiente manera: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 3x & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

En principio, f es claramente derivable en $\mathbb{R} - \{0,1\}$ con derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

Estudiemos la derivabilidad en $x=0$ y $x=1$.

$$\begin{cases} f'\left(0^-\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (2x) = 0 \\ f'\left(0^+\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 3 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ f no es derivable en el punto $x=0$, pues las derivadas laterales son distintas.

$$\begin{cases} f'\left(1^-\right) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = 3 \\ f'\left(1^+\right) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ f no es derivable en el punto $x=1$, pues las derivadas laterales son distintas.

En resumen: f es derivable en $\mathbb{R} - \{0,1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$. †

---

7. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Solución:

La función f es claramente continua en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizás, en $x=1$. Estudiemos la continuidad en este punto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2-x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(-x^2 + 4x - 2\right) = 1 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ f es continua en $x=1$ pues $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$.

La función es derivable en todo $\mathbb{R}-\{1\}$ con derivada $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x<1 \\ -2x+4 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$.

Estudiemos la derivabilidad en $x=1$: $\begin{cases} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(2-x)^2}=1 \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x+4)=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ f no es derivable en el punto $x=1$, pues las derivadas laterales no coinciden.

Resumiendo: f es derivable en todo $\mathbb{R}-\{1\}$ con derivada $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x<1 \\ -2x+4 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$. †

---

8. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2+k & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

   a) Determina *k* para que $f(x)$ sea continua en $x=1$.

   b) ¿Es la función $f(x)$ para el valor *k* calculado derivable en $x=1$?

Solución:

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+5)=7 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+k)=1+k \end{cases}$ $\Rightarrow 7=1+k \Rightarrow k=6$. Por tanto, si $k=6$ se cumple que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=7=f(1)$ y f es continua en x = 1.

b) Si $k=1$ la función es: $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$, que es derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizás en $x=1$, con derivada $f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<1 \\ 2x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$.

Estudiemos la derivabilidad en x = 1:

$\begin{cases} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=2 \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x)=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ f es derivable en $x=1$ pues coinciden las derivadas laterales.

Por tanto, f es derivable en todo $\mathbb{R}$ con derivada

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 2x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}. †$$

9. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x\le -2 \\ ax^2+bx & \text{si} \quad -2<x\le 4 \\ x-4 & \text{si} \quad 4<x \end{cases}$, determina a y b de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(2x+1\right)=-3 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(ax^2+bx\right)=4a-2b \end{array}\right. \Rightarrow f \text{ será continua en } x=-2 \text{ si } -3=4a-2b.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\left(ax^2+bx\right)=16a+4b \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\left(x-4\right)=0 \end{array}\right. \Rightarrow f \text{ será continua en } x=4 \text{ si } 16a+4b=0.$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 4a+2b=-3 \\ 16a+4b=0 \end{cases}$, se obtiene $a=-\dfrac{1}{4}$ y $b=1$. Para estos dos valores f es continua en todo $\mathbb{R}$ y la función queda de la forma: $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x\le -2 \\ -\dfrac{1}{4}x^2+x & \text{si} \quad -2<x\le 4 \\ x-4 & \text{si} \quad 4<x \end{cases}$.

En principio, f es claramente derivable en $\mathbb{R}-\{-2,4\}$ con derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<-2 \\ -\dfrac{1}{2}x+1 & \text{si} \quad -2<x<4 \\ 1 & \text{si} \quad 4<x \end{cases}$.

Estudiemos la derivabilidad en $x=-2$ y $x=4$.

$$\left\{\begin{array}{l} f'\left(-2^-\right)=\lim\limits_{x\to -2^-} f'(x)=2 \\ f'\left(-2^+\right)=\lim\limits_{x\to -2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)=2 \end{array}\right. \Rightarrow f$$ es derivable en el punto $x=-2$, pues las derivadas laterales coinciden.

$$\left\{\begin{array}{l} f'\left(4^-\right)=\lim\limits_{x\to 4^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)=-1 \\ f'\left(4^+\right)=\lim\limits_{x\to 4^+} f'(x)=1 \end{array}\right. \Rightarrow f$$ no es derivable en el punto $x=4$, pues las derivadas laterales son distintas.

En resumen: f es derivable en $\mathbb{R}-\{4\}$ con derivada $f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x\le -2 \\ \dfrac{3}{2}x-3 & \text{si} \quad -2<x<4 \\ 1 & \text{si} \quad 4<x \end{cases}$. †

10. La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ es derivable en el punto $x=0$. Calcula cuánto valen las constantes b y c.

Solución:

Como es derivable en $x=0$, entonces es continua en $x=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=c=f(0)$ y los límites laterales deben coincidir y ser iguales a c:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=c$.

Utilicemos la regla de L'Hôpital para calcular el límite a la derecha de cero:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1.$$

Por tanto, para que f sea derivable en $x=0$ debe de ser $c=1$,

La derivada de la función f es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+b & \text{si} \quad x \quad 0 \\ \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} & \text{si} \quad x>0 \end{cases},$$

pues la derivada de la función $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ es:

$$y'=\frac{\frac{1}{1+x}x-\ln(1+x)\cdot 1}{x^2}=\frac{\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{1+x}}{x^2}=\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

Como f es derivable en $x=0$, coinciden las derivadas laterales en $x=0$:

$$\begin{cases} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+b)=b \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

El segundo de los límites se ha hecho volviendo a utilizar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\left(\ln(1+x)+(1+x)\frac{1}{1+x}\right)}{2x(1+x)+x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln(1+x)}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{1+x}}{6x+2}=\frac{-1}{2}.$$ †

11. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si} \quad x\le 3 \\ 2x-4 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$.

a) Define continuidad de una función en un punto.

b) ¿En qué puntos es continua la función $f\left(x\right)$?

c) ¿En qué puntos es derivable la función $f\left(x\right)$?

d) Si una función no es continua en un punto, ¿puede ser derivable en él?

Solución:

a) Una función f es continua en un punto $x=a$ si existe el límite de la función en $x=a$ y es finito, y coincide con la imagen de la función en dicho punto:

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \text{existe } \lim_{x\to a} f(x)=L,\ L\in\mathbb{R} \text{ y } \lim_{x\to a} f(x)=L=f(a)$$

b) f es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo quizás en $x=3$. Estudiemos la continuidad en este punto:

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^2-4x+3\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(2x-4\right)=2 \end{cases} \Rightarrow f$ no es continua en $x=3$, pues al no coincidir los límites laterales, no existe el límite de la función en x = 3 (hay una discontinuidad de salto finito en $x=3$).

c) Si f no es continua en un punto, entonces no es derivable en dicho punto. Por tanto, f no es derivable en $x=3$.

En el resto de puntos sí que es derivable (las funciones polinómicas son derivables en todo $\mathbb{R}$), con derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{si} \quad x<3 \\ 2 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

d) No. Una condición necesaria para que una función sea continua es que sea derivable, pero no es suficiente: es decir, una función continua no tiene porqué ser derivable. De aquí se deduce que toda función que no es continua en un punto, no es derivable en dicho punto. Simbólicamente:

[f derivable $\Rightarrow$ f continua] $\Rightarrow$ [f no continua $\Rightarrow$ f no derivable] †

12. Determina b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x\le 2 \\ -x^2+bx+c & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

a) Sea derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=8$ y para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ deben de existir los laterales y ser iguales: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^3\right)=8 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-x^2+bx+c\right)=-4+2b+c \end{cases} \Rightarrow 8=-4+2b+c \Rightarrow 2b+c=12$ **(*)**

La función derivada en $\mathbb{R}-\{2\}$ es: $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad x<2 \\ -2x+b & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$.

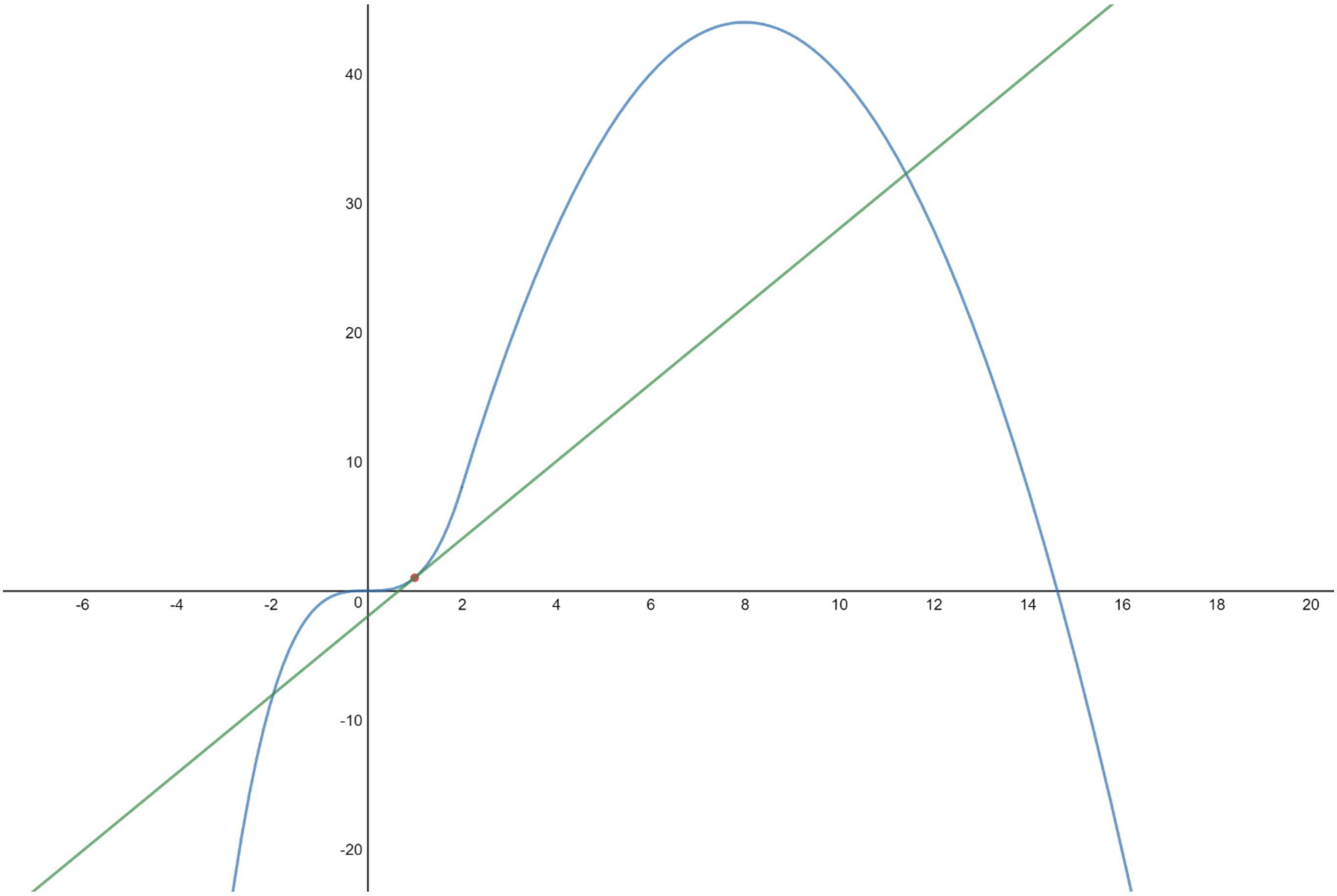
Para que f sea derivable en $x=2$ las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$$\begin{cases} f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(3x^2\right)=12 \\ f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-2x+b\right)=-4+b \end{cases} \Rightarrow 12=-4+b \Rightarrow b=16.$$

Sustituyendo en **(*)**, $32+c=12 \Rightarrow c=-20$.

b) La ecuación de la recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

Entonces: $y-1=3(x-1) \Rightarrow y-1=3x-3 \Rightarrow y=3x-2$ y − 1 = 3(x − 1) ⇒ y − 1 = 3x − 3 ⇒ y = 3x − 2. †



---

13. Considera la función siguiente $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ ax+b & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

a) Determina los valores de a y b para que sea derivable en todos los puntos.

b) Esboza la gráfica de la curva representativa de la función para los valores de a y b calculados.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3-x^2\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(ax+b\right)=a+b\end{array}\right. \Rightarrow a+b=0 \ \textbf{(*)}$$

La derivada de f en $\mathbb{R}-\{1\}$ es: $f\,'(x)=\begin{cases}3x^2-2x & \text{si} \quad x<1\\ a & \text{si} \quad x>1\end{cases}$.

Para que f sea derivable en x = 1 deben de coincidir las derivadas laterales:

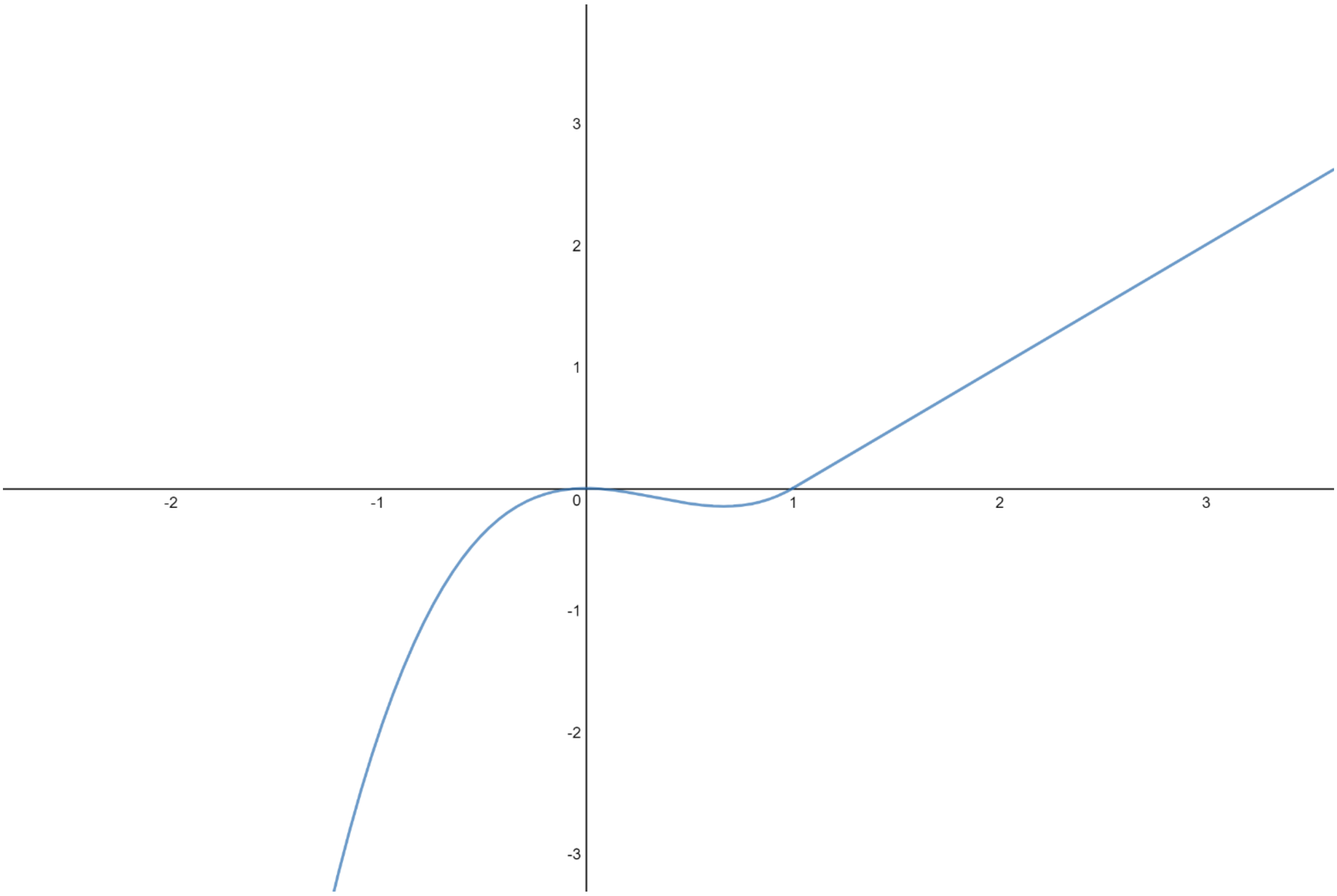
$$\left\{\begin{array}{l} f\,'\left(1^-\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2-2x\right)=1\\ f\,'\left(1^+\right)=\lim\limits_{x\to 1^+} f\,'(x)=a\end{array}\right. \Rightarrow a=1.$$

Sustituyendo en **(*)**, $1+b=0 \Rightarrow b=-1$.

Por tanto, para que f sea derivable en todos los puntos han de ser $a=1$ y $b=-1$.

En este caso la función es: $f(x)=\begin{cases}x^3-x^2 & \text{si} \quad x\le 1\\ x-1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$.

b) Obsérvese, en la gráfica de la función, lo "bien que pega" el trozo a la izquierda de $x=1$ con el trozo a la derecha de $x=1$, para no formar un "punto anguloso" y, de este modo, la función sea derivable en $x=1$.



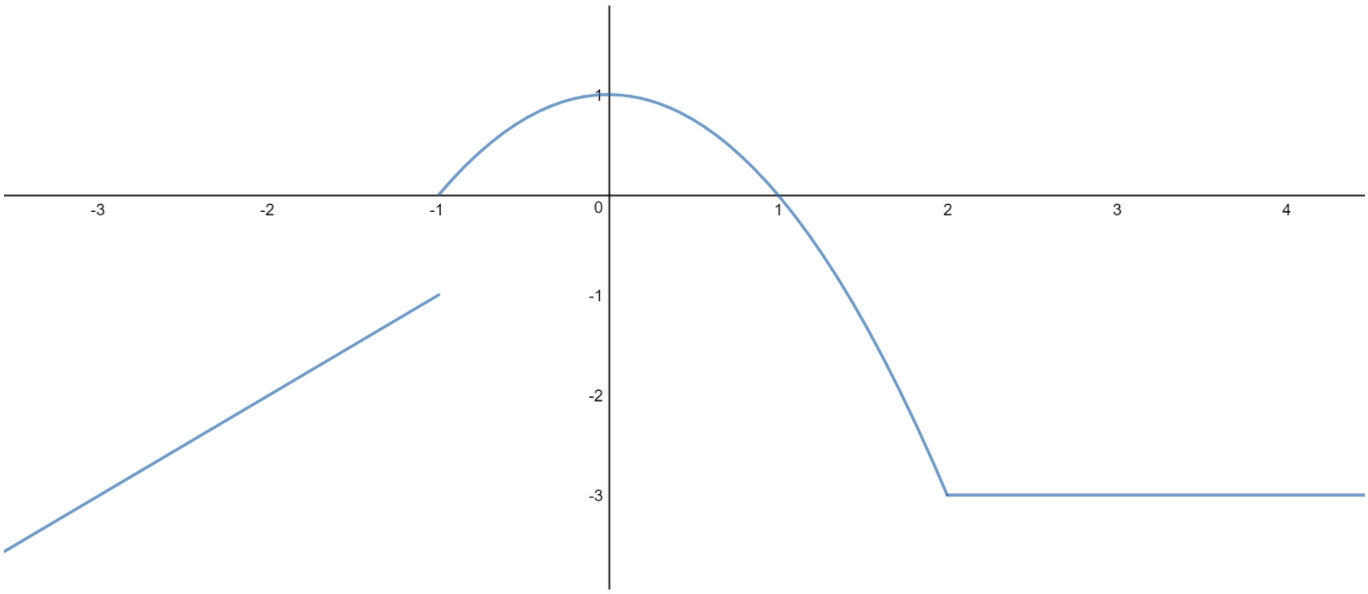
†

14. Estudia si la función $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\le -1 \\ 1-x^2 & \text{si} \quad -1<x\le 2 \\ -3 & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$ es continua en los puntos $x=-1$ y $x=2$. Representa gráficamente dicha función.

Solución:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(1-x^2\right)=0 \end{cases} \Rightarrow$$ no existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ porque los límites laterales no coinciden, con lo que f no es continua en $x=-1$ (discontinuidad de salto finito de longitud 1).

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(1-x^2\right)=-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f\left(x\right)=-3=f\left(2\right) \Rightarrow f \text{ es continua en } x=2.$$ †



15. Determina, si es posible, los valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$ para que la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & \text{si} \quad x<0 \\ (2x-k)^2-6 & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}, \text{ sea continua en } x=0 .$$

Solución:

El límite por la izquierda de cero lo calcularemos utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}}=\left[\frac{0}{0}\to \text{L'Hôpital}\right]=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^x}{2-2e^{2x}}=\left[\frac{0}{0}\to \text{L'Hôpital}\right]=\lim_{x\to 0^-}\frac{-e^x}{-4e^{2x}}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}.$$

El límite por la derecha de cero es:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left((2x-k)^2-6\right)=k^2-6 .$$

Para que exista el límite deben de coincidir los límites laterales:

$$k^2-6=\frac{1}{4}\Rightarrow k^2=\frac{1}{4}+6\Rightarrow k^2=\frac{25}{4}\Rightarrow k=\sqrt{\frac{25}{4}}\Rightarrow k=\pm\frac{5}{2} .$$

Para estos valores de k, f será continua en $x=0$ pues entonces $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$. †

---

16. a) Define el concepto de función continua en un punto.

b) Si $f(x)=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x=a$ no está definida $f\left(x\right)$.

c) Calcula el valor de $b\in\mathbb{R}$ para que la función $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\neq a \\ b & \text{si} \quad x=a \end{cases}$ sea continua.

Solución:

a) Una función f es continua en un punto $x=a$ si existe el límite de la función en $x=a$ y es finito, y coincide con la imagen de la función en dicho punto:

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \text{existe } \lim_{x\to a} f(x)=L\,,\ L\in\mathbb{R} \text{ y } \lim_{x\to a} f(x)=L=f(a)$$

b) f no está definida en $x=0$ porque anula el denominador de la expresión $\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$.

c) g es continua en todo punto donde lo sea f, o sea, en $\mathbb{R}-\left\{0\right\}$. Es decir, la función $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ b & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$, es continua en $\mathbb{R}-\left\{0\right\}$. Para que g sea continua en $x=0$, debe existir $\lim_{x\to 0} g(x)$ y $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)=b$.

Entonces: $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}+3e^{-3x}}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$, donde se ha utilizado la regla de L'Hôpital.

Por tanto, el valor de b para que g sea continua es $b=\dfrac{3}{2}$ †

---

17. Enuncia el teorema de Bolzano. Como aplicación de este teorema, demuestra que las gráficas de las funciones $f\left(x\right)=e^{x^2}$ y $g\left(x\right)=2\cos\left(x^2\right)$ se cortan en, al menos, un punto.

Solución:

Enunciado del teorema de Bolzano.

Si $f\left(x\right)$ es continua en un intervalo cerrado $\left[a\,,\,b\right]$ y el signo de $f\left(a\right)$ es distinto del signo de $f\left(b\right)$, entonces existe $c\in\left(a\,,\,b\right)$ tal que $f\left(c\right)=0$.

Consideremos la función auxiliar definida de la siguiente forma: $h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow h(x) = e^{x^2} - 2\cos(x^2)$.

Esta función es claramente continua en todo $\mathbb{R}$.

La idea ahora consiste en buscar un intervalo $[a, b]$, en el que $h(a)$ y $h(b)$ tengan distinto signo. Por el teorema de Bolzano, existirá $c \in (a, b)$, tal que $h(c) = 0$, es decir, tal que $f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$, lo que demostraría que f y g se cortan en al menos un punto (un punto donde f y g tienen la misma imagen).

Vamos a probar con el intervalo $\left[0, \sqrt{\pi}\right]$. Usamos el valor $\sqrt{\pi}$ porque en la función h la variable x se encuentra elevada al cuadrado, lo que hará que al evaluar $\sqrt{\pi}$, desaparezca la raíz y sea más o menos fácil hacer cálculos.

$$h(0) = e^0 - 2\cos 0 = 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$h\left(\sqrt{\pi}\right) = e^{\sqrt{\pi}^2} - 2\cos\left(\sqrt{\pi}^2\right) = e^{\pi} - 2\cos\pi = e^{\pi} - 2 \cdot (-1) = e^{\pi} + 2 > 0$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in \left(0, \sqrt{\pi}\right)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, tal que $f(c) = g(c)$, tal y como queríamos demostrar.