

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Indica los valores de m para los que A es invertible.

b) Resuelve la ecuación $XA - B^t = C$ para $m = 0$. (B^t es la matriz traspuesta de B)

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, luego:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1; m = 3$$

Por lo tanto, la matriz A tendrá inversa para todos los valores de $m \neq 1$ y $m \neq 3$.

b) Calculamos la matriz inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 12 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz X .

$$XA - B^t = C \Rightarrow X = (C + B^t) \cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$

b) Calcula A^{-1} . (Sugerencia: Puedes usar la igualdad del apartado (a)).

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{aligned} 2A - A^2 &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) De la igualdad del apartado a se deduce que:

$$2A - A^2 = I \Rightarrow A \cdot (2I - A) = I \Rightarrow A^{-1} = 2I - A$$

Luego: $A^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Considera las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1} .

b) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} -a+2c & -b+2d \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} a-2c-2b+4d & -b+2d \\ -c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} a-2c-2b+4d & -b+2d \\ -c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{aligned} a-2c-2b+4d &= -1 \\ -b+2d &= 0 \\ -c+2d &= 2 \\ d &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -1; b = 2; c = 0; d = 1 \end{aligned}$$

Luego: $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obtén un vector no nulo $v=(a,b,c)$, de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Para que el rango $(A) = \text{rango}(B) = 2$, sus determinantes deben valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = b + a - c - b = a - c = 0$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} = -2c + 3a - 2b = 0$$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $\left. \begin{matrix} a - c = 0 \\ 3a - 2b - 2c = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a = c ; b = \frac{c}{2} ; c = c$

Luego, el vector que nos piden es $v = \left(c, \frac{c}{2}, c \right)$, siendo c cualquier número distinto de cero.

De la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que $\det(A) = 4$. Se pide:

a) Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indica las propiedades que utilizas.

b) Calcula $\det(A^{-1} \cdot A^t)$

c) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, siendo I la matriz identidad, halla $\det(B)$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\det(-3A^t) = (-3)^2 \det(A^t) = 9 \cdot \det(A) = 9 \cdot 4 = 36$$

$$\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) \det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = -6 \cdot (-1) \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 6 \cdot 4 = 24$$

Si en un determinante cambiamos dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

Si en un determinante hay un número que multiplica a una fila o columna, dicho número sale fuera multiplicando al determinante.

$$\text{b) } \det(A^{-1} \cdot A^t) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A^t) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A) = 1$$

$$\text{c) } \det(B^3) = \det(B \cdot B \cdot B) = \det(B) \cdot \det(B) \cdot \det(B) = [\det(B)]^3 = 1 \Rightarrow \det(B) = \sqrt[3]{1} = 1$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz X que cumpla la ecuación $AXB = C$

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La ecuación que tenemos que resolver es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -a+d & -b+e & -c+f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b+c & -b+2c \\ -a+d & b-e-c+f & b-e-2c+2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a=3 \\ -b+c=1 \\ -b+2c=2 \\ -a+d=0 \\ b-e-c+f=1 \\ b-e-2c+2f=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow a=3; d=3; c=1; b=0; f=-2; e=-4$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

b) Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A^2 + 3A$:

$$A^2 + 3A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 5\lambda + 4 & 0 \\ \lambda + 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de dicha matriz

$$|A^2 + 3A| = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 5\lambda + 4 & 0 \\ \lambda + 3 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 - 10\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = -1; \lambda = -4$$

Luego, la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa para $\lambda = -1$ y $\lambda = -4$, ya que su determinante vale cero.

b) Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ a-c=-1 \\ b-d=3 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema, tenemos que la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \frac{1}{2}$ y $|B| = -2$.

Halla:

a) $|A^3|$

b) $|A^{-1}|$

c) $|-2A|$

d) $|AB^t|$, siendo B^t la matriz traspuesta de B .

e) El rango de B .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $|A^3| = |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) Sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso

será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

c) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8) \cdot \frac{1}{2} = -4$

d) $|A \cdot B^t| = |A| \cdot |B^t| = |A| \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$

e) Como $|B| = -2 \neq 0$, el rango de B es 3.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.

c) Calcula razonadamente A^{100}

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego, se cumple que $A^3 = -I$

b) Calculamos $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 + 12 - 16 - 12 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Tiene inversa

Calculamos la inversa

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^{100} = A^{99} \cdot A = (A^3)^{33} \cdot A = (-I)^{33} \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Hay algún valor de λ para el que A no tiene inversa?.

b) Para $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{No hay ningún valor real de } \lambda \text{ para el cual el determinante valga cero,}$$

luego, siempre tiene inversa

b) Calculamos la matriz X :

$$A^{-1} \cdot X \cdot A = B \Rightarrow A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A :

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2}$$

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y A^2-B^2

b) Resuelve la ecuación matricial $XA-XB-(A+B)^t=2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $A+B$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow 2A=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sustituyendo, tenemos: } B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos: } (A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial: $XA-XB-(A+B)^t=2I \Rightarrow X(A-B)-(A+B)^t=2I$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & 4a+2b \\ 2c-d & 4c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 2a-b=6 \\ 4a+2b=3 \\ 2c-d=2 \\ 4c+2d=4 \end{array} \right\} \Rightarrow a=\frac{15}{8}; b=-\frac{9}{4}; c=1; d=0$$

$$\text{Luego, la matriz que nos piden es: } X=\begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{9}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A - 2I$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Para $\lambda = -2$, resuelve la ecuación matricial $AX = 2X + I$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Igualamos el determinante de dicha matriz a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 2 - \lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \lambda = -1; \lambda = 2$$

Luego, la matriz tiene inversa para todos los valores de $\lambda \neq 1, -1$ y 2

b) Resolvemos la ecuación matricial:

$$AX = 2X + I \Rightarrow AX - 2X = I \Rightarrow (A - 2I)X = I \Rightarrow X = (A - 2I)^{-1} \cdot I$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{((A - 2I)^d)^t}{|A - 2I|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 15 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 15 & -4 \end{pmatrix}^t}{12} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}}{12}$$

Luego, la matriz es $X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que $A^2 + 2A = I$ y que $A^{-1} = A + 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula la matriz X que verifica la ecuación: $A^2 + XA + 5A = 4I$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$a) \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow \text{Es cierto.}$$

Multiplicamos la igualdad anterior por A^{-1} a la izquierda:

$$A^2 + 2A = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot A + 2A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot I \Rightarrow A + 2I = A^{-1} \Rightarrow \text{Es cierto}$$

b) Vamos a resolver la ecuación matricial $A^2 + XA + 5A = 4I$:

Multiplicamos por A^{-1} a la derecha.

$$A^2 + XA + 5A = 4I \Rightarrow A \cdot A \cdot A^{-1} + X \cdot A \cdot A^{-1} + 5A \cdot A^{-1} = 4I \cdot A^{-1} \Rightarrow A + X + 5I = 4A^{-1} \Rightarrow X = 4A^{-1} - A - 5I$$

Sustituimos $A^{-1} = A + 2I$

$$X = 4A^{-1} - A - 5I = 4(A + 2I) - A - 5I = 3(A + I) = 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de A dependiendo de los valores α .

b) Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y los igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1; \alpha = -2$$

Calculamos el rango de A para los distintos valores:

	R(A)
$\alpha = 1$	1
$\alpha = -2$	2
$\alpha \neq 1 \text{ y } -2$	3

b) Calculamos la matriz inversa de A para $\alpha = 2$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{4}$$

Resolvemos la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es $\frac{1}{12}A$.

b) Para $\alpha = -3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz inversa de A

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}^t}{4\alpha} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha} = \frac{\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}}{12} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & -\frac{1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{\alpha}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4\alpha} = \frac{\alpha}{12} \\ -\frac{1}{4\alpha} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} = -\frac{\alpha}{12} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -3$$

El único valor que verifica todas las igualdades es $\alpha = -3$

b) Calculamos la matriz inversa de A para $\alpha = -3$: $(A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}}{-12}$

Por las propiedades de las matrices sabemos que: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, luego, la aplicamos para resolver la ecuación matricial

$$A^t \cdot X = B \Rightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot B = (A^{-1})^t \cdot B = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 2 & -15 & -7 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A ? Justifica la respuesta.

b) Para $k = 0$, resuelve la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Luego, la matriz A no tiene inversa para $k = \frac{1}{2}$, ya que su determinante vale cero.

b) Calculamos la matriz inversa de A para $k = 0$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial:

$$(X + I) \cdot A = A^t \Rightarrow X \cdot A + I \cdot A = A^t \Rightarrow X \cdot A = A^t - I \cdot A$$

Si multiplicamos por A^{-1} a la derecha, tenemos:

$$X \cdot A = A^t - I \cdot A \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = A^t \cdot A^{-1} - I \cdot A \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^t \cdot A^{-1} - I$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$X = A^t \cdot A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica: $A \cdot X \cdot B = C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C .
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A \cdot X \cdot B = C^t \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de B

$$(B)^{-1} = \frac{(B^d)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra la matriz X que satisface la ecuación $XA + A^3B = A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la inversa de A :

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Calculamos la matriz X : Si multiplicamos por A^{-1} a la derecha, tenemos:

$$X \cdot A + A^3B = A \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} + A^3 \cdot B \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \Rightarrow X = I_3 - A^3 \cdot B \cdot A^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = I_3 - A^3 \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.

b) Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 = 13 \neq 0 \Rightarrow$ Tiene inversa

Sabemos que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \Rightarrow |B| = \frac{|A \cdot B|}{|A|} = \frac{-13}{13} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Tiene inversa

b) Si multiplicamos por A a la izquierda, tenemos:

$$A^{-1}X - B = BA \Rightarrow A \cdot A^{-1}X - A \cdot B = ABA \Rightarrow X = ABA + AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 43 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sea } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

- a) Determina los valores de m para que los vectores fila de M son linealmente independientes.
b) Estudia el rango de M según los valores de m .
c) Para $m = 1$, calcula la inversa de M .

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el determinante de la matriz M :

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = -1$$

Para todos los valores de $m \neq 0$ y -1 , el determinante es distinto de cero y los vectores son linealmente independientes.

- b) Calculamos el rango de M según los valores de m .

	Rango(M)
$m = 0$	2
$m = -1$	2
$m \neq 0 \text{ y } -1$	3

- c) Calculamos la inversa de M para $m = 1$:

$$(M)^{-1} = \frac{(M^d)^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1} .

b) Calcula A^{2013} y su inversa.

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Comprobamos que $A^2 = 2I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

Calculamos la inversa:

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

También la podemos calcular de la siguiente forma:

$$A^2 = 2I \Rightarrow A \cdot A = 2I \Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{2}A\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{2013} = A^{2012} \cdot A = (A^2)^{1006} \cdot A = (2I)^{1006} \cdot A = 2^{1006} \cdot (I)^{1006} \cdot A = 2^{1006} \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A^{2013})^{-1} &= A^{-1} \cdot A^{-1} \dots (2013 \text{ veces}) \dots A^{-1} \cdot A^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{2}A \dots (2013 \text{ veces}) \dots \frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{2}A = \\ &= \frac{1}{2^{2013}}A^{2013} = \frac{1}{2^{2013}} \cdot 2^{1006} \cdot A = \frac{1}{2^{1007}} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}} \\ \frac{1}{2^{1007}} & -\frac{1}{2^{1007}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

a) Halla A^{-1} .

b) Calcula la matriz X que satisface $A \cdot X = B^t \cdot C$ (B^t es la traspuesta de B).

c) Halla el determinante de $A^{2013} \cdot B^t \cdot B \cdot (A^{-1})^{2013}$.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la inversa:

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^t}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A \cdot X = B^t \cdot C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C$$

Calculamos la matriz X

$$X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$|B^t \cdot B| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 8 - 4 - 4 = 0$$

Luego:

$$|A^{2013} \cdot B^t \cdot B \cdot (A^{-1})^{2013}| = |A|^{2013} \cdot |B^t \cdot B| \cdot \left| \frac{1}{A} \right|^{2013} = |B^t \cdot B| = 0$$

Sabiendo que el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes

determinantes, indicando en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$

b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8) \cdot 4 = -32$

Por otro lado, sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en

nuestro caso será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$

b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & c \\ d & -e & f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”.

$$\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 = -12$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo”.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ (A^t es la matriz traspuesta de A).

b) Calcula Z tal que $AZ = BZ + A$.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema matricial

$$\begin{cases} X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si cambiamos la primera ecuación de signo y sumamos, tenemos que: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y

sustituyendo en la primera ecuación tenemos que: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $AZ = BZ + A \Rightarrow (A - B)Z = A \Rightarrow Z = (A - B)^{-1} \cdot A$

Calculamos $(A - B) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su inversa: $(A - B)^{-1} = \frac{[(A - B)^d]^t}{|A - B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^t}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Luego, $Z = (A - B)^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sean A y B las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$

a) Calcula las matrices X e Y para las que $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$.

b) Halla la matriz Z que verifica $B^2 + ZA + B^t = 3I$ (I denota la matriz identidad y B^t la matriz traspuesta de B).

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema matricial

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por -2 y sumamos, tenemos que:

$$5Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación tenemos que: $X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B^2 + ZA + B^t = 3I \Rightarrow ZA = 3I - B^2 - B^t \Rightarrow Z = (3I - B^2 - B^t) \cdot A^{-1}$

Calculamos $(3I - B^2 - B^t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix}$

Calculamos su inversa: $A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t}{1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Luego, $Z = (3I - B^2 - B^t) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}$

Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es $\det(M) = 2$. Calcula:

a) El rango de M^3 .

b) El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M).

c) El determinante de $(M^{-1})^2$.

d) El determinante de N , donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $|M^3| = |M \cdot M \cdot M| = |M| \cdot |M| \cdot |M| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 0 \Rightarrow$ El rango es 3

b) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como M es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2M^t| = |2M| = (2)^3 \cdot |M| = (8) \cdot 2 = 16$

c) Sabemos que: $M \cdot M^{-1} = I \Rightarrow |M \cdot M^{-1}| = |M| \cdot |M^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |M^{-1}| = \frac{1}{|M|}$; luego en nuestro

caso será: $|M^{-1}|^2 = \frac{1}{|M|^2} = \frac{1}{4}$

d) Si en un determinante cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo, luego, el determinante de N vale -2

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halla, si es posible, A^{-1} y B^{-1} .

b) Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$, A^t la matriz traspuesta de A .

c) Calcula la matriz X que satisface $A \cdot X - B = AB$.

MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz inversa de A .

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz B no tiene inversa, ya que su determinante vale 0.

$$b) |AB^{2013}A^t| = |A| \cdot |B^{2013}| \cdot |A^t| = 2 \cdot 0^{2013} \cdot 2 = 0$$

c) Resolvemos la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B + AB \Rightarrow X = A^{-1}(B + AB) = A^{-1}B + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2$

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La matriz A tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= A^2 - B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A^2 - A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A - A^{-1} \cdot B = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es -3 , calcula, indicando las

propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$

b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8) \cdot (-3) = 24$

Por otro lado, sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en

nuestro caso será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -7 \cdot 2 \cdot (-3) = 42$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo”.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2 \cdot 5 \cdot 0 = 5 \cdot (-3) = -15$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el tercer paso hemos aplicado la propiedad: “Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero”.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1} .

b) Hallar la matriz X que verifica $A^t \cdot X + B = I$, siendo I la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz A tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz que nos piden:

$$\begin{aligned} A^t \cdot X + B &= I \Rightarrow A^t \cdot X = I - B \Rightarrow (A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X = (A^t)^{-1} \cdot I - (A^t)^{-1} \cdot B \Rightarrow \\ \Rightarrow X &= (A^t)^{-1} \cdot I - (A^t)^{-1} \cdot B = (A^t)^{-1} - (A^t)^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= (A^t)^{-1} - (A^t)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & -10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -3 & 14 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m se verifica que $A^2 = 2A + I$?

b) Para $m = 1$, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $A \cdot X - B = A \cdot B$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+m)^2 + 1 & (1+m) + (1-m) \\ (1+m) + (1-m) & 1 + (1-m)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + 2m + 2 & 2 \\ 2 & m^2 - 2m + 2 \end{pmatrix}$$

$$2A + I = \begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 2A + I \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 + 2m + 2 & 2 \\ 2 & m^2 - 2m + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 2 = 3 + 2m \\ m^2 - 2m + 2 = 3 - 2m \end{cases} \Rightarrow m = \pm 1$$

b) Calculamos la matriz inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X que nos piden:

$$A \cdot X - B = A \cdot B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X - A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B + B$$

$$X = A^{-1} \cdot B + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Halla la matriz X que verifica: $A^{-1} \cdot X \cdot A = B - A$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la matriz inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot X \cdot A &= B - A \Rightarrow A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot A = A \cdot B - A \cdot A \Rightarrow X \cdot A = A \cdot B - A \cdot A \Rightarrow \\ \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} &= A \cdot B \cdot A^{-1} - A \cdot A \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1} - A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= A \cdot B \cdot A^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & 16 & -6 \\ -2 & 40 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 18 & -7 \\ -2 & 45 & -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3, calcula los siguientes

determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) $\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$ y $\det(A + A^t)$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Por otro lado, sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en

nuestro caso será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$

La matriz que nos dan es simétrica, por lo tanto, $A = A^t \Rightarrow |A + A^t| = |2A|$

Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A| = (2)^3 \cdot |A| = 8 \cdot 3 = 24$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ b & d & e \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = -2 \cdot (3) = -6$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo”.

c) $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & a \\ b & d & b \\ c & e & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 3 = -3$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el tercer paso hemos aplicado la propiedad: “Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero”.

Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes

determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) $\det(3A)$. b) $\det(A^{-1})$. c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|3A| = (3)^3 \cdot |A| = (27) \cdot (2) = 54$

b) Sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso

será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2y & z \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -12$

En el primer paso y en el segundo hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el tercer paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo”.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes”. Y también la propiedad: “Si un determinante tiene dos filas o dos columnas proporcionales, el determinante vale cero”.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$

- a) Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.
b) Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de cada matriz y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = -m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

	R(A)
$m = -4$	1
$m \neq -4$	2

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = -4$$

	R(B)
$m = 0$	2
$m = -4$	2
$m \neq 0$ y -4	3

Luego, para $m = 0$ el rango de A es igual al rango de B y vale 2.

b) Igualamos los dos determinantes

$$-m - 4 = m^2 + 4m \Rightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \Rightarrow m = -1 ; m = -4$$

Luego, para $m = -1$ y $m = -4$, el $\det(A) = \det(B)$

Halla la matriz X que verifica la igualdad $A \cdot X \cdot A^{-1} + B = C \cdot A^{-1}$ sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos la matriz X

$$\begin{aligned} A \cdot X \cdot A^{-1} + B &= C \cdot A^{-1} \Rightarrow A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A + B \cdot A = C \cdot A^{-1} \cdot A \Rightarrow A \cdot X \cdot I + B \cdot A = C \cdot I \Rightarrow A \cdot X + B \cdot A = C \Rightarrow \\ \Rightarrow A \cdot X &= C - B \cdot A \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A) \end{aligned}$$

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot (C - B \cdot A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$

a) Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2.

b) Para $m=1$, determina A^{2015} .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix} = -m^3 + 2m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = 1$$

Si $m=0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y como el $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

Si $m=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y como el $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

b) Si $m=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego: $A^{2015} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla el determinante de una matriz X que verifique la igualdad $X^2 \cdot A \cdot X = B$.

b) Determina, si existe, la matriz Y que verifica la igualdad $A^2 \cdot Y \cdot B^{-1} = A$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$X^2 \cdot A \cdot X = B \Rightarrow |X^2 \cdot A \cdot X| = |B| \Rightarrow |X| \cdot |X| \cdot |A| \cdot |X| = |B| \Rightarrow |X|^3 = \frac{|B|}{|A|} = \frac{8}{-1} \Rightarrow |X| = \sqrt[3]{-8} = -2$$

b) Despejamos la matriz Y , para ello multiplicamos por A^{-1} a la izquierda y por B a la derecha

$$A^2 \cdot Y \cdot B^{-1} = A \Rightarrow A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot A \cdot Y \cdot B^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B \Rightarrow A^{-1} \cdot I \cdot A \cdot Y \cdot I = A^{-1} \cdot I \cdot B \Rightarrow Y = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz Y

$$Y = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz X que verifica $A \cdot X - B = I$ (I denota la matriz identidad de orden 3).

b) Calcula el determinante de la matriz $(A^2 \cdot B^{-1})^{2015}$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos la matriz X , para ello multiplicamos por A^{-1} a la izquierda

$$A \cdot X - B = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X - A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot I \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (B + I)$$

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot (B + I) &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Calculamos el determinante de A y de B

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \quad ; \quad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|A^2 \cdot B^{-1}|^{2015} = (|A| \cdot |A| \cdot |B^{-1}|)^{2015} = \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{|B|} \right)^{2015} = \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \right)^{2015} = 1$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz X para la que $A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C$, (A^t la matriz traspuesta de A).

b) Calcula el determinante de $B^{-1}(C^t \cdot C) \cdot B$, (C^t la matriz traspuesta de C).

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos la matriz X

$$A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C \Rightarrow (A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X \cdot B^{-1} \cdot B = (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B \Rightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$(A^t)^{-1} = \frac{((A^t)^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$\begin{aligned} X = (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -21 & 10 & 0 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & \frac{10}{3} & 0 \\ -3 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} |B^{-1} \cdot (C^t \cdot C) \cdot B| &= |B^{-1}| \cdot |C^t \cdot C| \cdot |B| = \frac{1}{|B|} \cdot |C^t \cdot C| \cdot |B| = |C^t \cdot C| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \left| \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0 \end{aligned}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz X que verifica $A \cdot X + B = 2A$.

b) Calcula B^2 y B^{2016} .

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si multiplicamos los dos términos de la ecuación por A^{-1} a la izquierda, nos queda:

$$A \cdot X + B = 2A \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X + A^{-1} \cdot B = 2A^{-1} \cdot A \Rightarrow X = 2I - A^{-1} \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = 2I - A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 & 9 & 5 \\ -8 & 7 & 4 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos

$$B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$B^{2016} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A \cdot X + B^2 = B \cdot X + A^2$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X :

$$A \cdot X + B^2 = B \cdot X + A^2 \Rightarrow A \cdot X - B \cdot X = A^2 - B^2 \Rightarrow (A - B) \cdot X = A^2 - B^2 \Rightarrow X = (A - B)^{-1} \cdot (A^2 - B^2)$$

Calculamos la matriz inversa de $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A - B)^{-1} = \frac{((A - B)^d)^t}{|A - B|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^2 , B^2 y $A^2 - B^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = (A - B)^{-1} \cdot (A^2 - B^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de k en cada uno de los casos siguientes: a) $\text{Rango}(A) = 1$. b) $A^2 = A$. c) A tiene inversa. d) $\det(A) = -2$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} = k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 ; k = -1$$

Luego, el rango de A es 1 si $k = 1$ ó $k = -1$

b)

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k+k^2 \\ k-k^2 & 1-k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = k \Rightarrow k = 1 \\ k+k^2 = 1+k \Rightarrow k = 1 ; k = -1 \\ k-k^2 = 1-k \Rightarrow k = 1 \\ 1-k^2 = 0 \Rightarrow k = 1 ; k = -1 \end{cases}$$

Luego, para $k = 1$, se cumple que $A^2 = A$

c) A tiene inversa para todos los valores de $k \neq 1$ y $k \neq -1$. Ya que es una matriz cuadrada y para esos valores su determinante es distinto de cero.

$$d) \begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow k^2 - 1 = -2 \Rightarrow k^2 + 1 = 0$$

No hay ningún valor de k que haga que su determinante valga -2

Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, si existen, los valores de λ para los que $A^{-1} = 2I - A$ (siendo I la matriz identidad de orden 3).

b) Determina, si existen, los valores de λ para los que la matriz $A + A^t$ no tiene inversa (A^t es la matriz traspuesta de A).

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda-1 & \lambda^2+\lambda+1 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} = 2I - A &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2+\lambda+1=1 \Rightarrow \lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0; \lambda=-1 \end{aligned}$$

b) Calculamos

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda+1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ \lambda+1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante.

$$|A + A^t| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ \lambda+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{6}$$

Luego, la matriz $A + A^t$ no tiene inversa si $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{6}$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de $A \cdot B^t + \lambda I$ según los valores de λ (B^t es la matriz traspuesta de B , I es la matriz identidad de orden 3).

b) Calcula la matriz X que verifica: $C \cdot X - X = 2I$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A \cdot B^t + \lambda I$

$$A \cdot B^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$|A \cdot B^t + \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $\lambda = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 1$.

b) $C \cdot X - X = 2I \Rightarrow (C - I) \cdot X = 2I \Rightarrow X = (C - I)^{-1} \cdot 2I = 2(C - I)^{-1}$

$$\text{Calculamos la matriz } C - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de $C - I$.

$$(C - I)^{-1} = \frac{((C - I)^d)^t}{|C - I|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, la matriz que nos piden es: } X = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $(A+B)$

b) Calcula el determinante de $2A^{-1}(A+B)^t$, siendo $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $(A+B)$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $A+B$

$$A+B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa

$$(A+B)^{-1} = \frac{((A+B)^d)^t}{|A+B|} = \frac{\begin{pmatrix} -10 & 20 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^t}{24} = \frac{\begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}}{24} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

b) Sabemos que:

- Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A^{-1}| = 2^3 |A^{-1}|$

- $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

- $|(A+B)^t| = |(A+B)|$

Por lo tanto:

$$|2A^{-1}(A+B)^t| = |2A^{-1}| \cdot |(A+B)^t| = 2^3 |A^{-1}| \cdot |(A+B)^t| = 2^3 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot |(A+B)| = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 24 = 48$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica que $ABX - 2C = CX$.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X

$$ABX - 2C = CX \Rightarrow ABX - CX = 2C \Rightarrow (AB - C)X = 2C \Rightarrow (AB - C)^{-1}(AB - C)X = (AB - C)^{-1}2C \Rightarrow \\ \Rightarrow X = (AB - C)^{-1}2C$$

$$AB - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa:

$$(AB - C)^{-1} = \frac{((AB - C)^d)^t}{|AB - C|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 15 & 12 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 12 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = (AB - C)^{-1}2C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A \cdot A^t - 2A = I$ (A^t denota la traspuesta de A e I la matriz identidad).

b) Calcula A^{-1} .

c) Determina, si existe, la matriz X que verifica $XA + I = 3A$.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$a) A \cdot A^t - 2A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

b) Calculamos la inversa .

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz X .

$$XA + I = 3A \Rightarrow XX = A = 3A - I \Rightarrow XA \cdot A^{-1} = (3A - I) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = (3A - I) \cdot A^{-1}$$

Calculamos la matriz X .

$$X = (3A - I) \cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 tal que $\det(2A) = 8$.

a) ¿Cuánto vale $\det(A)$?

b) Siendo B la matriz que se obtiene de A multiplicando por 3 la primera fila y por -1 la tercera, ¿cuánto vale $\det(B)$?

c) Determina los valores de x para los que la siguiente matriz A verifica que $\det(2A) = 8$,

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A| = (2)^3 \cdot |A| = 8 \Rightarrow |A| = 1$

b) $|B| = 3 \cdot (-1) \cdot |A| = 3 \cdot (-1) \cdot 1 = -3$

c) Calculamos el determinante de la matriz $2A$

$$|2A| = 2 \begin{vmatrix} 2x & 2 & 2 \\ 2x+2 & 4 & 4 \\ 2x & -2x+4 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de m para los que la matriz A no tiene inversa.

b) Para $m=1$, calcula, si existe, la matriz X que verifica la igualdad $A^{-1}XA + I = B$, siendo I la matriz identidad.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{vmatrix} = -m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = 2$$

Luego, no tiene inversa para los valores de $m = 0$ y $m = 2$

b) Calculamos la inversa de A para $m=1$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X .

$$A^{-1}XA + I = B \Rightarrow A^{-1}XA = B - I \Rightarrow A \cdot A^{-1}XA \cdot A^{-1} = A \cdot (B - I) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot (B - I) \cdot A^{-1}$$

Calculamos la matriz X .

$$\begin{aligned} X = A \cdot (B - I) \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de k .

b) Para $k=1$, calcula el determinante de $2(A^t \cdot A^{-1})^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} = 2k^3 + 3k^2 + k = 0 \Rightarrow k = 0 ; k = -1 ; k = -\frac{1}{2}$$

Calculamos el rango de la matriz para cada caso.

Para $k = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $k = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $k = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $k \neq 0, -1, -\frac{1}{2} \Rightarrow R(A) = 3$

b) Calculamos el determinante que nos piden

Sabemos que: $|A^t| = |A|$; $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; $|m \cdot A| = m^n |A|$ siendo n el orden de la matriz.

Por lo tanto:

$$\left| 2(A^t \cdot A^{-1})^{2017} \right| = \left| (2 \cdot A^t) \cdot (A^{-1}) \cdot (A^t \cdot A^{-1})^{2016} \right| = 2^3 \cdot |A| \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \left(|A| \cdot \frac{1}{|A|} \right)^{2016} = 8$$

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } D = (4 \quad -5 \quad 6)$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica que: $A^2 X - BA + X = CD$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X

$$A^2 X - BA + X = CD \Rightarrow A^2 X + X = CD + BA \Rightarrow (A^2 + I)X = CD + BA \Rightarrow X = (A^2 + I)^{-1}(CD + BA)$$

Calculamos $A^2 + I$

$$A^2 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I$$

$$\text{Calculamos } (A^2 + I)^{-1} = (2 \cdot I)^{-1} = 2^{-1} \cdot I^{-1} = \frac{1}{2} \cdot I$$

Luego:

$$\begin{aligned} X &= (A^2 + I)^{-1}(CD + BA) = \frac{1}{2} \cdot I \cdot (CD + BA) = \frac{1}{2} \cdot (CD + BA) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (4 \quad -5 \quad 6) + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -8 & 10 & -12 \\ 12 & -15 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -9 & 9 & -12 \\ 13 & -13 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C = (1 \ 1 \ 2)$

a) Calcula A^{2018} .

b) Determina, si existe, la matriz X que verifica $A(X + 2I) = BC$ donde I es la matriz identidad.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\text{a) Calculamos: } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por lo tanto: } A^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 2018 & 2018 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si multiplicamos los dos términos de la ecuación por A^{-1} a la izquierda, nos queda:

$$A \cdot (X + 2I) = BC \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot (X + 2I) = A^{-1} \cdot B \cdot C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot C - 2I$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B \cdot C - 2I &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 2) - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 2) - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$. Sabiendo que el determinante de M es 2, calcula los

siguientes determinantes e indica las propiedades que utilices:

a) El determinante de la matriz $5M^4$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que: $|k \cdot A_n| = k^n \cdot |A|$ y que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, luego:

$$|5M^4| = |5M \cdot M \cdot M \cdot M| = |5M| |M| \cdot |M| \cdot |M| = 5^3 |M| \cdot |M| \cdot |M| \cdot |M| = 5^3 \cdot 2^2 = 2000$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{2}{3}$$

Propiedades aplicadas

- Si en un determinante se intercambian dos líneas, el determinante cambia de signo
- Para multiplicar un determinante por un número basta con multiplicar una línea.

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} 1 & 6 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 3 & z \end{vmatrix} = 2$$

Propiedades aplicadas

- Si una línea de una determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes. En el primero ponemos el primer sumando y en el segundo el segundo sumando.
- Si un determinante tiene dos líneas iguales, el determinante vale 0.
- El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Halla, si existe, la inversa de A.

b) Determina los valores de m tales que $(A - mI)$ tiene inversa (I es la matriz identidad).

c) Calcula el rango de $(A - 2I)$.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y los igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Si tiene inversa}$$

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz $A - mI = \begin{pmatrix} -m & -1 & -2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & 3-m \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -m & -1 & -2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & 3-m \end{vmatrix} = -m^3 + 5m^2 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow m = 1; m = 2$$

Luego, tiene inversa para todos los valores de $m \neq 1$ y 2

c) Calculamos el rango de $A - 2I$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A - 2I) = 2$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina, si existen, los valores de a , b y c para que las matrices A y B conmutan.

b) Calcula A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018} .

c) Calcula, si existe, la matriz inversa de A

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si conmutan, se tiene que cumplir que $A \cdot B = B \cdot A$, luego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = 0; c = -1$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot I = A$$

$$A^{2017} = A^{2016} \cdot A = (A^2)^{1008} \cdot A = (I)^{1008} \cdot A = A$$

$$A^{2018} = (A^2)^{1009} = (I)^{1009} = I$$

c) Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

En el apartado anterior ya habíamos visto que $A \cdot A = I \Rightarrow A = A^{-1}$