Límites, continuidad y derivadas

1. (0.75p) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 5x^3 - x^2 - x + 1$ en $x = -2$.

2. (2.25p) Calcula los siguientes límites:

a. $\lim_{x \to 3} \dfrac{2 - x}{(3 - x)^2}$

b. $\lim_{x \to +\infty} (1 + 2^{-x})$

c. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

3. (6p) Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificando los resultados:

a. $f(x) = \dfrac{2x^2}{2x - 4}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3}$

c. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 3x}$

d. $f(x) = cos\,(2^{-x})$

e. $f(x) = sen^2(3x - 5)$

f. $f(x) = \frac{x}{3} \log_2(1 - x^2)$ (No simplificar el resultado)

g. $f(x) = e^{\sqrt{-5x+1}}$

h. $f(x) = tg\ (3x)$

4. (1p) Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & si \quad x \neq -2 \\ 2k + x & si \quad x = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 5x^3 - x^2 - x + 1$ en $x = -2$.

La ecuación punto-pendiente de la recta es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$x_0 = -2$

$y_0 = f(-2) = 5 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 - (-2) + 1 = 5 \cdot (-8) - 4 + 2 + 1 = -40 - 4 + 2 + 1 = -41$

$f'(x) = 15x^2 - 2x - 1$

$m = f'(-2) \quad \rightarrow \quad f'(-2) = 15(-2)^2 - 2(-2) - 1 = 15 \cdot 4 + 4 - 1 = 60 + 4 - 1 = 63$

$$y + 41 = 63(x + 2)$$

2. Calcula los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2 - x}{(3 - x)^2}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2 - x}{(3 - x)^2} = \frac{-1}{0}$$

Se han de calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2 - x}{(3 - x)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2 - x}{(3 - x)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 2^{-x})$

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + 2^{-x}) = 1 + 2^{-\infty} = 1 + \frac{1}{2^{+\infty}} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

c. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \quad \text{Indeterminación}$$

Se factorizan los polinomios del numerador y del denominador. En el numerador, por identidad notable:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

En el denominador se obtienen las raíces de la ecuación $x^3 - 1 = 0$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego $x_1 = 1$

Obtenemos las otras dos posibles raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \nexists$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

3. Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificando los resultados:

a. $f(x) = \dfrac{2x^2}{2x-4}$

$$f'(x) = \frac{(2x^2)' \cdot (2x-4) - (2x^2) \cdot (2x-4)'}{(2x-4)^2} = \frac{4x \cdot (2x-4) - (2x^2) \cdot 2}{(2x-4)^2} =$$

$$\frac{8x^2 - 16x - 4x^2}{(2x-4)^2} = \frac{8x^2 - 16x - 4x^2}{(2x-4)^2} = \frac{4x^2 - 16x}{(2x-4)^2}$$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3}$

$$f'(x) = \left((x^3-3)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3-3)^{1/3-1}(x^3-3)' = \frac{1}{3}(x^3-3)^{-2/3}(3x^2) =$$

$$\frac{3x^2}{3(x^3-3)^{2/3}} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-3)^2}}$$

c. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 3x}$

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)'}{\sqrt{x^2+3x}} = \frac{\frac{(x^2+3x)'}{2\sqrt{x^2+3x}}}{\sqrt{x^2+3x}} = \frac{\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}}{\sqrt{x^2+3x}} = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}\cdot\sqrt{x^2+3x}} = \frac{2x+3}{2(x^2+3x)} =$$

$$\frac{2x+3}{2x^2+6x}$$

d. $f(x) = cos\,(2^{-x})$

$$f'(x) = \cos(2^{-x}) \cdot (2^{-x})' = -sen\,(2^{-x}) \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-x)' = -sen\,(2^{-x}) \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1) =$$

$$sen\,(2^{-x}) \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2$$

e. $f(x) = sen^2(3x-5)$

$$f(x) = [\mathrm{sen}(3x-5)]^2$$

$$f'(x) = 2[\mathrm{sen}(3x-5)]^{2-1} \cdot sen(3x-5)' = 2\,\mathrm{sen}(3x-5) \cdot \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' =$$

$$2\,\mathrm{sen}(3x-5) \cdot \cos(3x-5) \cdot 3 = 6\,\mathrm{sen}(3x-5)\cos(3x-5)$$

f. $f(x) = \frac{x}{3}\log_2(1-x^2)$ (No simplificar el resultado)

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\right)' \log_2(1-x^2) + \frac{x}{3}\left(\log_2(1-x^2)\right)' = \frac{1}{3}\log_2(1-x^2) + \frac{x}{3} \cdot \frac{(1-x^2)'}{(1-x^2)\cdot ln2} =$$

$$\frac{1}{3}\log_2(1-x^2) + \frac{x}{3} \cdot \frac{-2x}{(1-x^2)\cdot ln2} = \frac{\log_2(1-x^2)}{3} + \frac{-2x^2}{3(1-x^2)ln2}$$

g. $f(x) = e^{\sqrt{-5x+1}}$

$$f'(x) = e^{\sqrt{-5x+1}} \cdot lne \cdot \left(\sqrt{-5x+1}\right)' = e^{\sqrt{-5x+1}} \cdot 1 \cdot \frac{(-5x+1)'}{2\sqrt{-5x+1}} = e^{\sqrt{-5x+1}} \cdot 1 \cdot \frac{-5}{2\sqrt{-5x+1}} =$$

$$\frac{-5e^{\sqrt{-5x+1}}}{2\sqrt{-5x+1}}$$

h. $f(x) = tg\ (3x)$

$$f'(x) = \frac{(3x)'}{cos^2(3x)} = \frac{3}{cos^2(3x)}$$

4. Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & si \quad x \neq -2 \\ 2k + x & si \quad x = -2 \end{cases}$$

En $x = -2$:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} (x-2) = -2-2 = -4$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$$

$$f(-2) = 2k - 2$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -2$:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) \quad \to \quad -4 = 2k - 2 \quad \to \quad 2k = -2 \quad \to \quad k = -1$$