

EXAMEN: CÓNICAS

EJERCICIO 1 Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ y determina también su posición relativa con respecto a la recta $y = x$.

EJERCICIO 2 Halla la ecuación de la circunferencia con centro $C(-1, 2)$ y que es tangente a la recta de ecuación $3x - y - 2 = 0$

EJERCICIO 3 Determina, a partir de su definición como lugar geométrico, la ecuación de la elipse con focos $F(0, 2)$ y $F'(0, -2)$ y constante 8. Halla sus vértices y excentricidad y dibújala.

EJERCICIO 4 Escribe la ecuación de una hipérbola con focos $F(0, 0)$ y $F'(8, 0)$ y constante 6. Determina vértices, asíntotas y dibújala.

EJERCICIO 5 Halla el valor de a para que la recta $4x - 3y + a = 0$ sea tangente a la parábola de ecuación $3y = 3x^2 + 10x + 4$

EJERCICIO 6 Halla la ecuación de la parábola de eje paralelo al eje de abscisas sabiendo que su vértice es el punto $V(1, -2)$ y que pasa por el punto $P(4, 1)$

Ejercicio	1	2	3	4	5	6
Valor	1,5	1'5	2	2	1,5	1'5
Calificación						

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$$

Identificamos coeficientes : $-2a = -4 \rightarrow a = 2 \quad -2b = -4 \rightarrow b = 2 \quad a^2 + b^2 - r^2 = 6 \quad 4 + 4 - 6 = r^2$

$r = \sqrt{2}$ **Centro (2, 2) Radio $\sqrt{2}$**

Para calcular la posición relativa resolvemos el sistema :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$$

$y = x \quad x^2 + x^2 - 4x - 4x + 6 = 0 \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4} = 1, 3$

Dos soluciones; recta y circunferencia se cortan en (1,1) y en (3,3)

EJERCICIO 2 $r = \text{distancia}(\text{Centro}, \text{recta}) = \frac{|3(-1) - 2 - 2|}{\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{49}{10}$$

EJERCICIO 3 Si X (x,y) es un punto genérico de la elipse : $d(X, F) + d(X, F') = 8$

$d(X, F) = 8 - d(X, F') ; \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 8 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$ Elevamos a 2

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 64 + x^2 + y^2 + 4y + 4 - 16\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$$

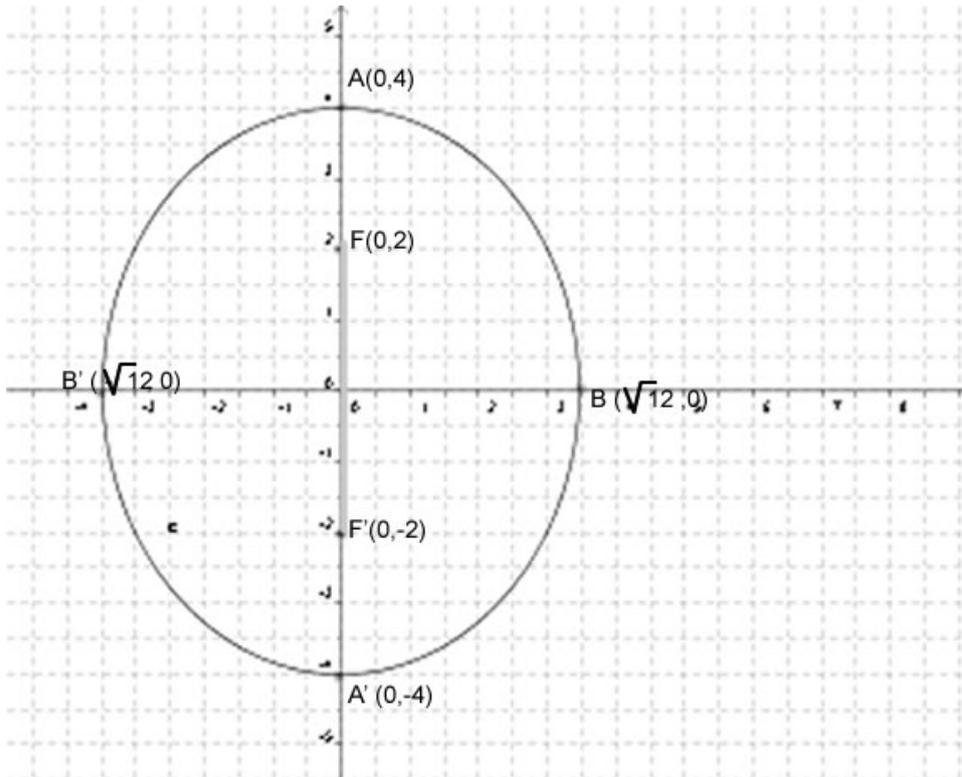
$$16\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 64 + 8y \quad \text{Dividimos por 8}$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 8 + y \quad \text{Elevamos a 2}$$

$$4x^2 + 4y^2 + 16y + 16 = 64 + y^2 + 16y \rightarrow 4x^2 + 3y^2 = 48 \rightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Parámetros : $a = 4, c = 2, b = \sqrt{12}$

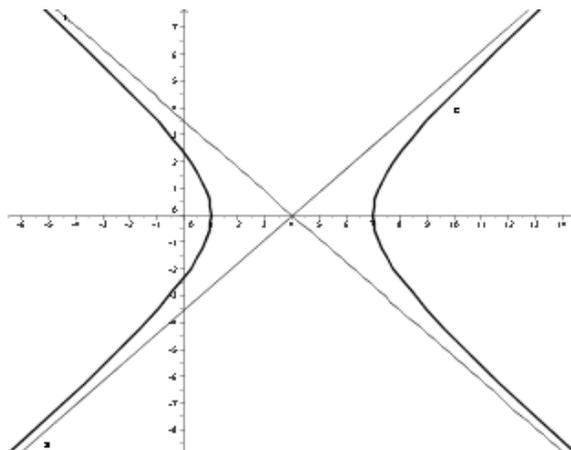
Vértices $(0, 4) (0, -4) (\sqrt{12}, 0) (-\sqrt{12}, 0)$ $e = c/a = 1/2$



EJERCICIO 4 La ecuación de una hipérbola centrada en el origen y con los focos en el eje X tiene ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. En este caso, el centro es el punto medio de los focos :

$$C = (4, 0); \quad 2a = 6 \rightarrow a = 3 \quad c = d(C, F) = 4 \quad c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7 = b^2$$

La ecuación es $\frac{(x-4)^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ Las asíntotas serían : $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}(x-4)$



EJERCICIO 5 Resolvemos el sistema :

$$3y = 3x^2 + 10x + 4$$

$$4x - 3y + a = 0$$

Despejamos y en la segunda ecuación : $\frac{4x+a}{3} = y$

$$3\left(\frac{4x+a}{3}\right) = 3x^2 + 10x + 4 \quad ; \quad 0 = 3x^2 + 6x + 4 - a$$

Para que recta y parábola sean tangentes, la ecuación de segundo grado sólo ha de tener una solución :

$$X = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 12(4-a)}}{6} \quad 36 - 48 + 12a = 0 \quad \mathbf{a = 1}$$

EJERCICIO 6 La ecuación de una parábola con foco $F (p/2, 0)$, directriz $x = -p/2$ y vértice $V (0,0)$ es $y^2 = 2px$. Si el vértice es $V (1, - 2)$, la ecuación se transforma por traslación en $(y + 2)^2 = 2p(x - 1)$

Para calcular p , sabemos que si $x = 4$ $y = 1$: $9 = 6p$; $p = 9/6 = 3/2$

La ecuación sería $(y + 2)^2 = 3(x - 1)$