MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO. EVALUACIÓN 2, EXAMEN 2

Nombre: SOLUCIONES

¡Mucha suerte! INSTRUCCIONES: HAY QUE RELLENAR EL EXAMEN CON BOLI AZUL O NEGRO. NO SE PUEDE USAR CALCULADORA.

1. (2,5 ptos.) (a) Escribe la definición de la circunferencia como lugar geométrico. (b) Encuentra la ecuación de la circunferencia de centro $P = (2, 4)$ y es tangente a la recta $r \equiv 3x + 4y - 2 = 0$. (c) Estudia la posición relativa de las circunferencias $c_1 \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ y $c_2 \equiv (x-4)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$ (haz un dibujo, quizás te ayude, pero JUSTIFICA TU RESPUESTA).

(a) (APUNTES)

(b) Esta circunferencia tendrá una ecuación del tipo:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = r^2$$

Para hallar r, imponemos que el sistema:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = r^2 \\ 3x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = r^2 \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

o lo que es lo mismo, la ecuación:

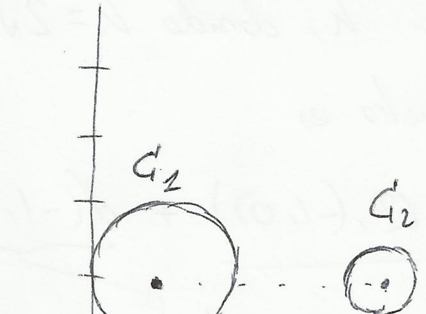
$$(x-2)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)^2 = r^2 \longrightarrow \underbrace{\left(1 + \frac{9}{16}\right)}_{a} x^2 + \underbrace{\left(-4 - \frac{3}{4}\right)}_{b} x + \overbrace{\left(4 + \frac{1}{4} - r^2\right)}^{c} = 0$$

tenga solución única. Esto sólo pasa si:

$$0 = b^2 - 4ac = \frac{361}{16} - 4 \cdot \frac{25}{16} \cdot \left(\frac{17}{4} - r^2\right) \Rightarrow 361 - 25 \cdot 17 + 4r^2 = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{425 - 361}{4} = 21$$

(c)



La distancia entre los centros es de 3.

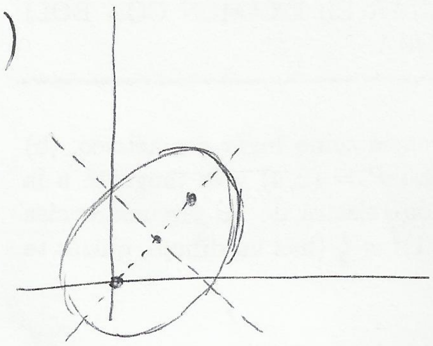
Sin embargo, la suma de los radios es

$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1'5$

Las circunferencias no "llegan a tocarse", son exteriores.

2. (2,5 ptos.) (a) Calcula todos los elementos de una elipse de focos (0,0) y (1,1) y distancia 2. (b) Un triángulo tiene dos vértices en los puntos (1,0) y (-1,0) y el tercero en una elipse de focos (1,0), (-1,0), semieje mayor $\sqrt{2}$ y semieje menor 1 ¿cuál es su perímetro? JUSTIFICA TU RESPUESTA.

(a)



Distancia entre focos:

$$d((0,0),(1,1)) = \sqrt{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Constante de la elipse: 2

Usando que $k = 2a \Rightarrow$ Semieje mayor: $a = 1$

Usando que ~~semieje~~ $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 1 - \frac{2}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(Semieje menor)

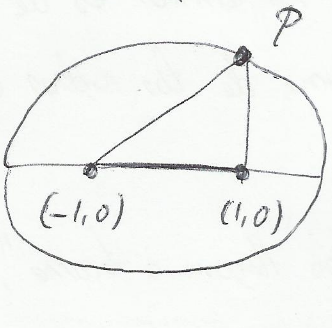
Ejes:
- Mayor: $y = x$
- Menor: $(y - \frac{1}{2}) = -1 \cdot (x - \frac{1}{2})$ (mirar más abajo para el centro)

Centro: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (Punto medio de los focos)

Vértices: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ $\quad\|\quad$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ $\quad\|\quad$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

(b) La elipse de la que hablan, cumple que ~~cualquiera de sus puntos~~, la suma de las distancias de cualquiera de sus puntos a los 2 focos es igual a k, donde $k = 2\sqrt{2}$.



Así que el perímetro es

$$\underbrace{d(P,(1,0)) + d(P,(-1,0))}_{=\,2\sqrt{2}} + \underbrace{d((-1,0),(1,0))}_{1}$$

$$= 2\sqrt{2} + 1$$

3. (2,5 ptos.) (a) Escribe la definición de la hipérbola como lugar geométrico. (b) Halla las ecuaciones de una hipérbola de centro (0,0), focos (5,0) y (-5,0) y distancia entre vértices igual a 6. (c) ¿Es posible que una hipérbola tenga excentricidad $\frac{1}{2}$? RAZONA TU RESPUESTA.

(a) APUNTES

(b) Tenemos una hipérbola horizontal, cuyo centro es $(0,0)$, cuya ecuación será del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \cancel{\boxed{2a = 6 \Rightarrow a = 3}}$$

~~La constante de la hipérbola es~~

De la distancia entre los vértices: $2a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

De la distancia entre los focos: $2c = 10 \Rightarrow c = 5$

Por último, como $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \boxed{b^2 = 25 - 9 = 16}$

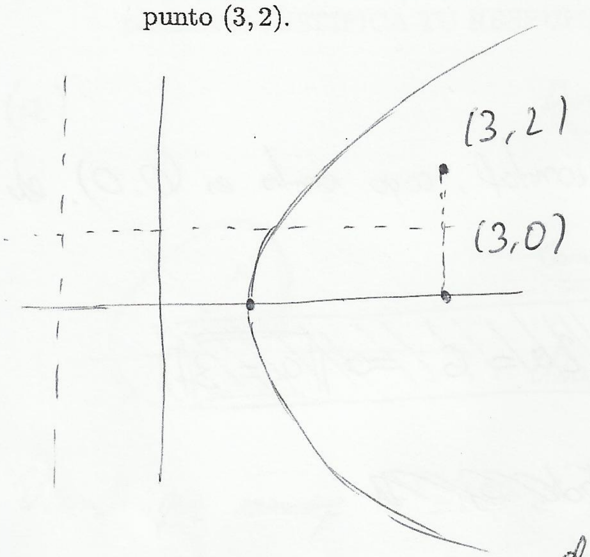
(c) La excentricidad es

$$e = \frac{\text{semidistancia focal}}{\text{semieje mayor}} = \frac{c}{a}$$ En una hipérbola, siempre $c > a$

Por lo tanto $e > 1$. <u>No es posible</u>.

4. (1,25 ptos.) (a) Escribe la ecuación de la parábola de directriz $x = -1$ y foco $(3, 0)$ y haz un esbozo de la misma. (b) Encuentra el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de la recta $x = -1$ (la anterior), el punto $(3, 0)$ (el anterior) y el punto $(3, 2)$.

(a)



(a) $p = 4$, centro $(1,0)$

Por lo tanto la ecuación es

$$\boxed{y^2 = 8(x-1)}$$

(b) El lugar geométrico que se nos pide es la intersección de la parábola anterior con la mediatriz del segmento limitado por $(3,0)$, (3.2) de ecuación $y = 1$.

Hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} y^2 = 8(x-1) \\ y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases}$$

El lugar geométrico pedido sólo tiene un punto: $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$

5. (1,25 ptos.) Identifica a qué cónicas corresponden las siguientes ecuaciones y escribe en cada caso su ecuación canónica.

$9x^2 - 4y^2 - 18x - 27 = 0$

$$9(x^2 - 2x) - 4y^2 - 27 = 0$$
$$9[(x-1)^2 - 1] - 4y^2 - 27 = 0$$
$$9(x-1)^2 - 4y^2 = 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

HIPÉRBOLA HORIZONTAL

$x^2 - 2x + 1 - 6y = 0$

$(x-1)^2 = 6y \longrightarrow$ PARÁBOLA VERTICAL