

Descomposición factorial de polinomios. Ecuaciones de grado superior

- 1.- $x=a$ es un cero o raíz de un polinomio $P(x)$ si su valor numérico en $x=a$ vale cero ($P(a)=0$). "Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales". Las raíces de enteras son divisores del término independiente. Para su cálculo se utiliza la regla de Ruffini
 - 2.- **Teorema del Resto.** El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por $x-a$ es igual al valor numérico de dicho polinomio por $x-a$ ($R=P(a)$).
Si la división de $P(x)$ por $x-a$ es exacta entonces $x-a$ es un factor de la descomposición factorial de $P(x)$.
"Descomponer un polinomio factorialmente consiste en hallar dos o más polinomios, no constantes, tales que su producto sea el polinomio dado. Un polinomio se llama irreducible cuando no se puede descomponer en factores."
 $P(x)/(x-a)$ es exacta $\Leftrightarrow R=P(a)=0 \Leftrightarrow P(x)$ es divisible por $x-a \Leftrightarrow x-a$ es un factor de $P(x)$
 - 3.- Caso particular: descomposición factorial de una ecuación de 2º grado. Si $ax^2+bx+c=0$ tiene por raíces (soluciones) x_1, x_2 . Entonces $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
Cálculo de la ecuación conocidas las raíces. $(x-x_1)(x-x_2)=0$
 - 4.- Métodos para factorizar polinomios:
 - Aplicar productos notables
 - Sacar factor común
 - Hallar las raíces $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$
-
-

1. Comprobar si $x=1$ y $x=3$ son raíces de los siguientes polinomios:
 $P_1(x) = x-3$, $P_2(x) = x^2-1$, $P_3(x) = x^2-5x+6$; $P_4(x) = x^3+x^2-2x$
 2. Comprobar si $1+\sqrt{3}$ es raíz de $x^4-2x^3-x^2-2x-2$ Sol: Sí
 3. De entre los números 0, 1, 2, 3, 4 ¿cuáles son raíces del polinomio $P(x)=x^3-5x^2+4$? Sol. $x=1$
 4. De los números 1, 0, $\sqrt{2}$, -1, $2y-3$ decir cuáles son raíces y cuáles no, de cada uno de los polinomios siguientes:
a) $P(x) = x^4+4x^3+3x^2$ b) $Q(x) = 2x^2+10x-28$
c) $R(x) = x^2+(1-\sqrt{2})x-\sqrt{2}$ d) $S(x) = x^3+(1+\sqrt{2})x^2+\sqrt{2}x$ e) $I(x) = x$
Sol: a) sí: 0, -1, -3; b) sí: 2; c) sí: $\sqrt{2}$, -1, d) sí: 0, -1, e) sí: 0
 5. Utilizando la regla de Ruffini, dar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:
a) $P(x) = 3x^4-5x^3+2x^2-x+6$ por $x-3$ b) $P(x) = 5x^4-2x^2+5$ por $x+1$
c) $P(x) = 8x^3-5x^4+6x^2-x+8$ por $x-2$ d) $P(x) = 6x^3-x+16$ por $x+3$
 6. Comprobar que se verifica el Teorema del Resto en las divisiones del ejercicio anterior.
 7. Indicar, sin hacer la división si $P(x)$ es divisible por $D(x)$:
a) $P(x) = 3x^3-21x+18$; $D(x) = x+3$ b) $P(x) = 7x^4-5x^3+3x^2-4x-1$; $D(x) = x-1$
c) $P(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} + 4x^5$; $D(x) = x - \frac{1}{2}$ Sol: son todos
 8. Como $x^2+2x+1=(x+1)^2$, decir si es cierto: a) $(x+1)|(x^2+2x+1)$ b) $(x^2+2x+1)|(x+1)$
¿Cuál es el polinomio divisor? ¿Es x^2+2x+1 múltiplo de $x+1$? Sol: $x+1$ es divisor y x^2+2x+1 es un múltiplo.
 9. Como $x^2-4x+4=(x-2)^2$, decir si es cierto: a) $(x-2)|(x^2-4x+4)$ b) $(x^2-4x+4)|(x-2)$
¿Cuál es el polinomio divisor? ¿Es x^2-4x+4 múltiplo de $x-2$? ¿Es $x-2$ divisible por x^2-4x+4 ?
Sol: cierto a); $x-2$; sí; no.
-

10. Encontrar 3 polinomios divisibles por a) $3x^2 + 4x - 1$, b) $(x-1)^2$

Sol: a) $9x^2+12x-3$; $3x^4+4x^3-x^2$; $3x^3+7x^2+3x-1$, b) $7(x-1)^2$; $(x-1)^4$, $(x-1)^9$

11. Encontrar 3 polinomios divisores y dos múltiplos de $p(x)=x^2(x^2-4)$ Sol: x^2 ; $x+2$; $x-2$; $x^3(x^2-4)$; $x^2(x^2-4)^2$

12. Calcular a para que 3 sea raíz del polinomio $x^3 - 6x^2 + ax - 2$ Sol: $a=29/3$

13. Hallar la descomposición factorial de los siguientes trinomios:

a) $p(x)=x^2+2x-3$ b) $p(x)=12x^2-x-1$ c) $p(x)=x^3-x^2-12x$ d) $p(x)=x(x-1)-6(x-2)$ e) $p(x)=5x-2x^2+3$

Sol: a) $p(x)=(x+3)(x-1)$, b) $p(x)=12(x-1/3)(x+1/4)$, c) $p(x)=x(x-4)(x+3)$, d) $p(x)=(x-4)(x-3)$ e) $p(x)=-2(x-3)(x+1/2)$

14. Escribir los polinomios cuyos ceros son:

a) $x_1=2$; $x_2=3$ b) $x_1=-1$; $x_2=4$ c) $x_1=1/2$; $x_2=2$ d) $x_1=-2$; $x_2=-3/2$

Sol: a) $x^2-5x+6=0$, b) $x^2-3x-4=0$, c) $2x^2-5x+2=0$, d) $2x^2+7x+6=0$

15. Factorizar los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ b) $P(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$ c) $P(x) = x^3 - 4x$
d) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$ e) $P(x) = (4x^2 - 9)(9x^2 - 16)$ f) $P(x) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$
g) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$ h) $P(x) = 6x^4 - 150x^2 + 864$

Sol: a) $(x-1)(x-3)(x+5)$; b) $(x-3)(x+2)(x-2)(x+4)$, c) $x(x-2)(x+2)$; d) $2(x-1)(x+2)(x-3)$; e) $(2x-3)(2x+3)(3x-4)(3x+4)$;
f) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$; g) $x(x-3)(x-4)$; h) $P(x)=6(x-3)(x+3)(x-4)(x+4)$

16. Hallar al máximo común divisor de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = (x+5)(x-2)(x^2+3)$; $Q(x) = x(x+3)(x-1)(x+5)$
b) $P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x$; $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
c) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$; $Q(x) = 4x^3 + 6x^2 - 22x - 12$
d) $P(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + 1$; $Q(x) = x^5 + x^4 + 2x^2 - 1$
e) $P(x) = 3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 12x - 9$; $Q(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$
f) $P(x) = x^2 + x - 2$; $Q(x) = x - 1$ g) $P(x) = x^4 - 1$; $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
h) $P(x) = x^2 - 1$; $Q(x) = x^2 - 2x + 1$; $R(x) = x^2 + 2x - 3$ i) $P(x) = x^2 + x + 1$; $Q(x) = 2x + 5$

Sol: a) $x+5$, b) x^2-3x+2 , c) x^2+x+6 , d) x^3+x+1 , e) $x+3$, f) $x-1$, g) x^2-1 , h) $x-1$, i) 1

17. Hallar el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios:

$P(x) = x^2 + x - 12$; $Q(x) = x^3 - 9x$ b) $P(x) = x^2 + x - 12$; $Q(x) = x^2 - 6x + 9$
 $P(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 2$; $Q(x) = x^3 - 4x^2 - 10x + 4$ d) $P(x) = x^7 - x$; $Q(x) = x^5 + x^2$

Sol: a) $x(x-3)(x+3)(x+4)$, b) $(x+4)(x-3)^2$, c) $(x-1)(x^3-4x^2-10x+4)$ d) x^8-x^2 .

18. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ c) $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0$
d) $3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ e) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ f) $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0$ g)
 $6x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 1 = 0$ h) $4x^4 - x^3 - 28x^2 + 31x - 6 = 0$

Sol: a) -1, 3, 5; b) -1, 1, 2; c) -2, 2, 3, -4; d) 0, -1, 1, 2/3; e) 1, -2, 3; f) -1, -1/2, 1/2; g) -1, 1, -1/2, 1/3; h) -3, 1, 2, 5/2