Matemáticas Aplicadas I

Ejercicio 1 (2 puntos).
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x-3}{x^2-5x+6}$$

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas, su dominio y su continuidad.
b) Calcular el límite de la función cuando x tiende a infinito.
c) Hallar sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Calcular la recta tangente a la función en $x = 1$.

Ejercicio 2 (2 punto).
El beneficio diario (en miles de euros) de una empresa productora de cemento viene dado por la función:

$$f(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

donde x expresa las toneladas de cemento producidos al día. Se sabe que la producción diaria de cemento está entre 0 y 8 toneladas, es decir, $x \in [0, 8]$.

a) Calcúlense f (0) y f (8) e interprétense los resultados en el contexto del problema. Determínese entre qué valores debe estar la producción diaria de cemento para que la empresa no tenga pérdidas.
b) Hállense las toneladas de cemento que deben producirse diariamente para obtener el máximo beneficio posible. Calcular dicho beneficio.

Ejercicio 3.(1,5 puntos).
Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, indicando en cada caso la compatibilidad del sistema:

$$\begin{cases} 2x+5y-7z=9 \\ 5x-y+3z=16 \\ 7x-8y+z=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x-2y-z=3 \\ 4x-y-7z=1 \\ 8x-3y-8z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y-4z=4 \\ 2x-y-z=3 \\ 5x+y-5z=7 \end{cases}$$

Ejercicio 4 (1 puntos). Sea S la región del plano definida por

$$1\leq x\leq 5; \quad 2\leq y\leq 6; \quad x-y\geq -4; \quad 3x-y\leq 10$$

a) Representar la región S y calcular las coordenadas de sus vértices.
b) Obtener los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = -200x + 600y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.

Ejercicio 5 (2 puntos). Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12.000 litros en total. El aceite de tipo A cuesta 3 euros/litro y el de tipo B cuesta 2 euros/litro. Necesita adquirir al menos 2.000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30.000 euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un 30 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.

Ejercicio 6 (1,5 punto). En una empresa el 20 % de los empleados son matemáticos, el 50% ingenieros y el resto no tiene carrera universitaria. Entre los matemáticos el 40% ocupa un cargo directivo, entre los ingenieros ese porcentaje se reduce a la mitad y entre el resto de empleados el porcentaje es del 5%. Elegido un empleado al azar, se pide:
a)Determinar la probabilidad de que ocupe un cargo directivo.

b) Si no ocupa un cargo directivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea matemático?

① $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$

a)

· $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

$x^2-5x+6=0 \quad \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$

· CONTINUIDAD EN $x=2$ $\quad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{-1}{0} \nexists$

DISCONTINUA NO EVITABLE

EN $x=3$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{0}{0} \xRightarrow{\text{L'Hopital}} \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{2x-5} = \dfrac{1}{+1} = 1$

DISCONTINUA EVITABLE

· PTOS DE CORTE EJE X $\quad y=0 \quad 0 = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} \Rightarrow$

$x-3=0 \quad x=3$

No es!
No está en el Dominio

EJE Y $\quad x=0$

$f(0) = \dfrac{-3}{6} = -\tfrac{1}{2} \quad (0, -\tfrac{1}{2})$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x-5} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

① c) $f'(x) = \dfrac{(x-3)' \cdot (x^2-5x+6) - (x-3) \cdot (x^2-5x+6)'}{(x^2-5x+6)^2} =$

$$f'(x) = \frac{1(x^2-5x+6) - (x-3)\cdot(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2} =$$

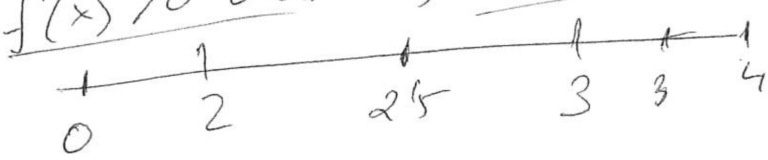
$$f'(x) = \frac{x^2-5x+6-2x^2+5x+6x-15}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{-x^2+6x-9}{(x^2-5x+6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+6x-9}{(x^2-5x+6)^2} \qquad f'(x)=0$$

$$-x^2+6x-9=0 \begin{cases} x=3 \\ x=3 \end{cases}$$

3 no está en el Dominio // No es un extremo relativo

$f'(x)>0$ CRECE $f'(x)<0$ DECRECE



$f'(0) = \dfrac{-9}{36}$ ⊖ Decrece $(-\infty, 2)$

$f'(2'5) = ⊖$ DECRECE $(2, 3)$

$f'(4) = ⊖$ DECRECE $(3, \infty)$

d) $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ $\qquad f(1) = \dfrac{1-3}{1-5+6} = -1$

$y-(-1) = -1(x-1)$ $\qquad f'(1) = \dfrac{-1+6-1-9}{(1-5+6)^2}$

$y+1 = -x+1$ $\qquad y = -x$ $\qquad f'(1) = \dfrac{-4}{4} = -1$

(2) $f(x) = -2x^2 + 14x - 12$

a) $f(0) = -12$ → Tiene 12000 € de pérdidas

$f(8) = -2\cdot 8^2 + 14\cdot 8 - 12 = -128 + 112 - 12 = -28$

Tiene 28000 € de pérdidas

Para que no tenga pérdidas:

$f(x) \geq 0 \qquad -2x^2 + 14x - 12 \geq 0$

$-2x^2 + 14x - 12 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 6 \\ x = 1 \end{array} \right.$

Para no tener pérdidas debemos producir entre 1 y 6 toneladas de cemento.

b) Obtener el máximo de la función:

$f'(x) = -4x + 14 \qquad f'(x) = 0$

$-4x + 14 = 0 \qquad x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3'5$

$f(3'5) = -2\cdot(3'5)^2 + 14\cdot 3'5 - 12 = 12'5$

Obtenemos un máximo beneficio de 12500 € produciendo 3'5 Toneladas de cemento

(3)

$$\begin{cases} 2x+5y-7z=9 \\ 5x-y+3z=16 \\ 7x-8y+z=9 \end{cases}$$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

$x = 3'07 \quad y = 1'655 \quad z = 0'773$

$$\begin{cases} 4x-2y-z=3 \\ 4x-y-7z=1 \\ 8x-3y-8z=0 \end{cases}$$

SISTEMA INCOMPATIBLE

$$\begin{cases} 3x+2y-4z=4 \\ 2x-y-z=3 \\ 5x+y-5z=7 \end{cases}$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

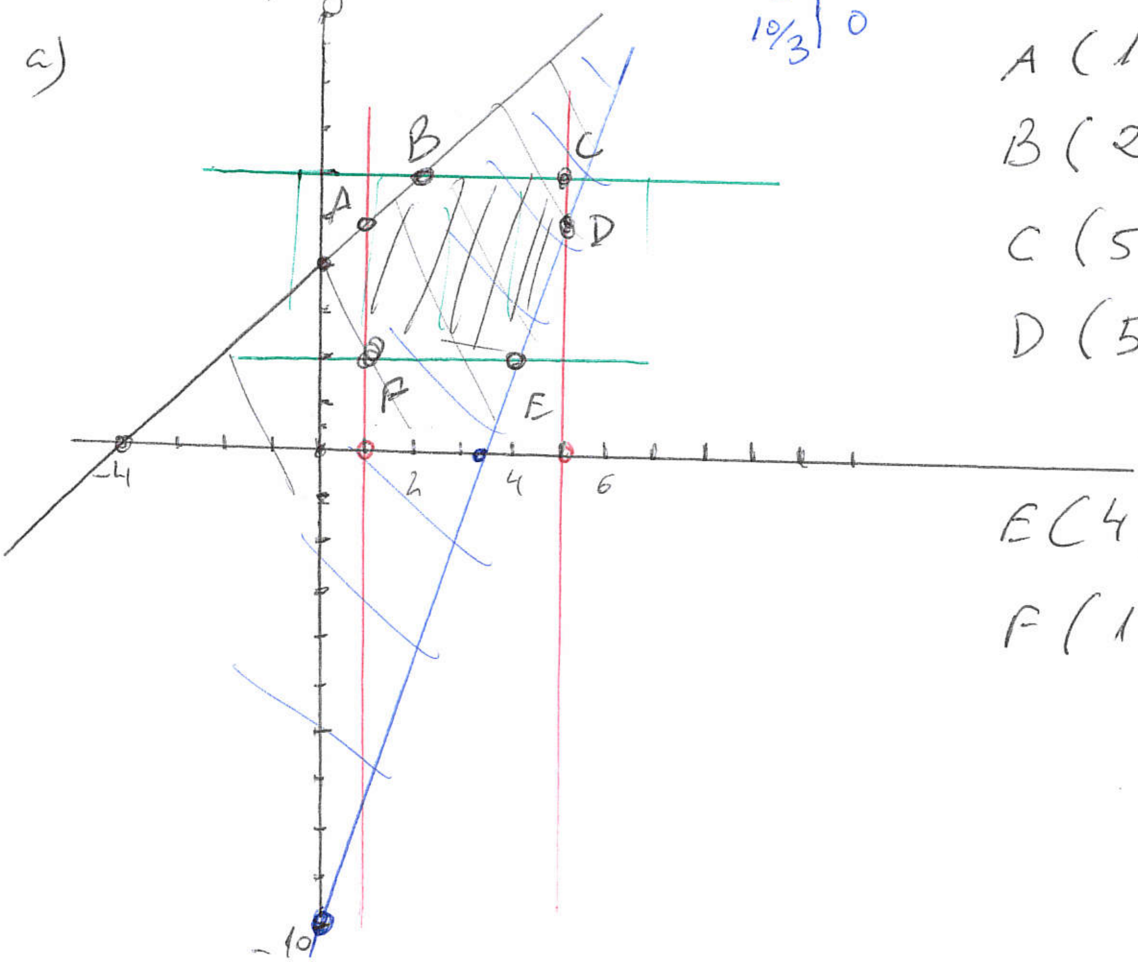
$$\boxed{\begin{aligned} z &= z \\ x &= \frac{10+6z}{7} \\ y &= \frac{5z-1}{7} \end{aligned}}$$

④ $\begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 2 \le y \le 6 \\ x - y \ge -4 \\ 3x - y \le 10 \end{cases}$

x	y
0	4
-4	0

x	y
0	-10
10/3	0

a)



A (1, 5)
B (2, 6)
C (5, 6)
D (5, 5)

E (4, 2)
F (1, 2)

b) $f(x,y) = -200x + 600y$

$f(1,5) = -200 + 3000 = 2800$

$f(2,6) = -400 + 3600 = 3200$ Máximo en (2, 6)

$f(5,6) = -1000 + 3600 = 2600$

$D(5,5) = -1000 + 3000 = 2000$

$E(4,2) = -800 + 1200 = 400$ Mínimo en (4, 2)

$F(1,2) = -200 + 1200 = 1000$

⑤ A (x) B (y)

$$\begin{cases} x + y \leq 12000 \\ x \geq 2000 \\ y \geq 2000 \\ 3x + 2y \leq 30000 \end{cases}$$

función objetivo:

$0'25 \cdot 3x + 0'30 \cdot 2y =$

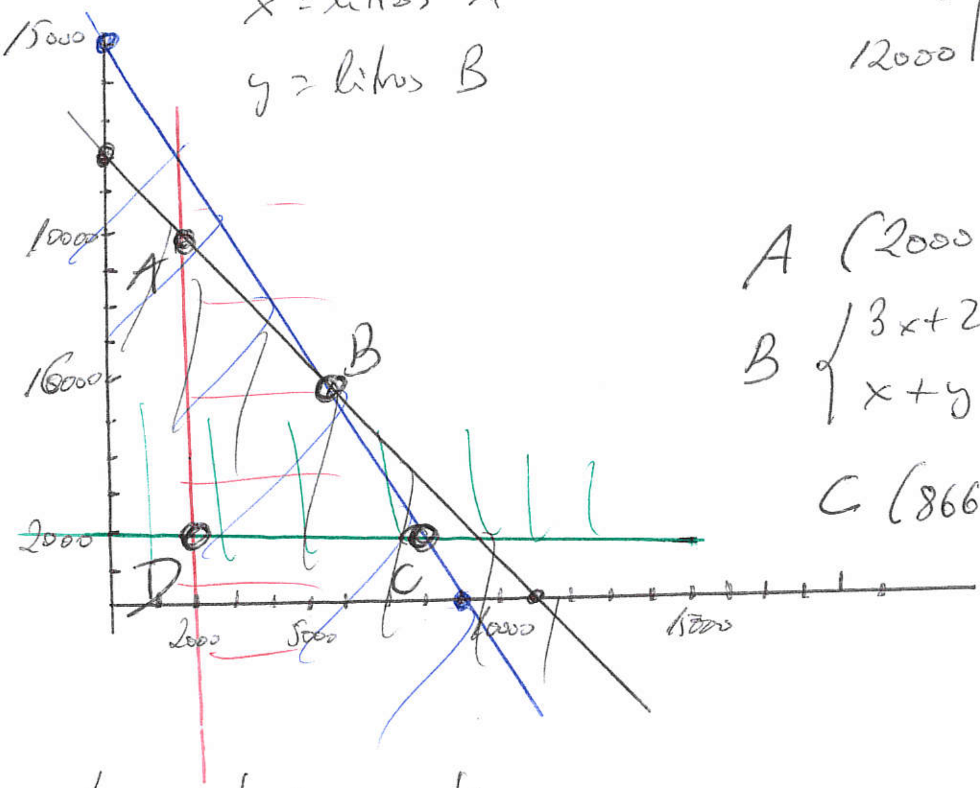
$\boxed{0'75x + 0'6y}$

x	y
0	12000
12000	0

x	y
0	15000
10000	0

x = litros A

y = litros B



A (2000, 10000)

B $\begin{cases} 3x + 2y = 30000 \\ x + y = 12000 \end{cases}$ (6000, 6000)

C (8667, 2000)

D (2000, 2000)

$f = 0'75x + 0'6y$

$f(2000, 1000) = 1500 + 600 = 2100$ €

$f(6000, 6000) = 4500 + 3600 = 8100$ € Máximo Beneficio

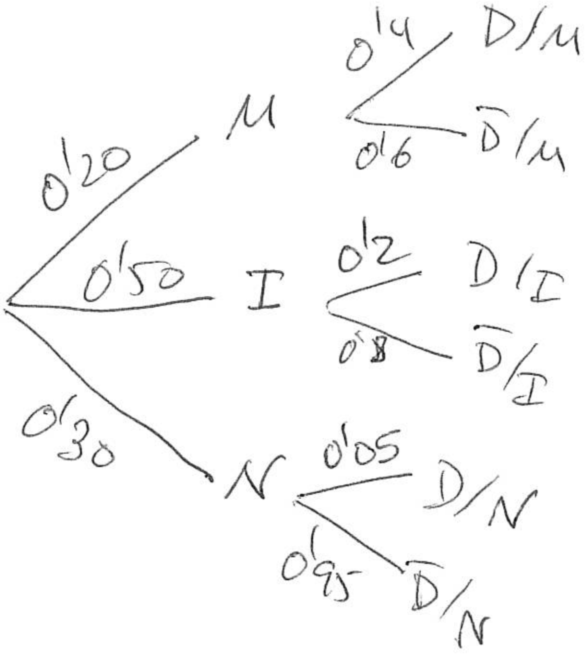
$f(8667, 2000) = 7700'25$ €

$f(2000, 2000) = 1500 + 1200 = 2700$ €

Solución 6000 l de tipo A
6000 l de tipo B

Beneficio 8100 €

(6)



a) $p(D) = 0'20 \cdot 0'4 + 0'50 \cdot 0'2 + 0'3 \cdot 0'05$

$$p(D) = 0'195$$

b) $p\left(M/\bar{D}\right) = \dfrac{p(M \cap \bar{D})}{p(\bar{D})} = \dfrac{p(\bar{D}/M) \cdot p(M)}{p(\bar{D})} =$

$$p(M/\bar{D}) = \frac{0'6 \cdot 0'20}{1 - 0'195} = 0'149$$