EXPERIMENTOS Y SUCESOS ALEATORIOS

Experimento determinista es aquel en que se puede predecir el resultado, siempre que se realice en las mismas condiciones. (Ejemplo: medir el tiempo que tarda en caer un objeto desde una misma altura sobre la superficie de la Tierra).

Experimento aleatorio es aquel del que no se puede predecir el resultado, aunque se realice en las mismas condiciones. (Ejemplo: lanzar al aire una moneda).

Los posibles resultados de un experimento aleatorio se llaman **sucesos aleatorios** y se clasifican en elementales y compuestos.

- **Suceso elemental** es cada uno de los sucesos que no se puede descomponer en sucesos más simples.

- **Suceso compuesto** es el que está formado por más de un suceso elemental.

- Espacio muestral es el conjunto formado por todos los sucesos elementales.

- Suceso seguro, puesto que ocurre siempre que se realiza el experimento y se representa por la letra E. (Ejemplo: si se lanza al aire una moneda, el espacio muestral es E={cara,cruz}).

- Suceso imposible es el que no ocurre nunca y se representa por la misma letra que para el conjunto vacío: $\emptyset$.

OPERACIONES CON SUCESOS

- Suceso unión: dados dos sucesos A y B, se llama y se designa por A U B, al suceso que se produce siempre que se verifica uno de los dos, es decir, **si se verifica A ó B**.

<u>Ejemplo:</u> Tiramos un dado y consideramos los siguientes sucesos: A="salir par" y B="salir mayor que 4". Entonces, A={2,4,6}, B={5,6} y AUB={2,4,5,6}.

- Suceso intersección, Dados dos sucesos A y B, se denomina y se designa por $A \cap B$ al suceso que se realiza **si se verifica A y B**.

<u>Ejemplo:</u> A:"salir par" y B: "salir mayor que 4". Entonces, A={2,4,6}, B={5,6} y $A \cap B$={6}.

- Suceso contrario de un suceso A ($\overline{A}$) es el suceso que ocurre siempre que no se verifica A. Es equivalente a la negación lógica.

Si dos sucesos no se pueden verificar simultáneamente, su intersección es el conjunto vacío. Cualquier suceso que sea igual al conjunto $\emptyset$ se llama **suceso imposible** y, por tanto, será un suceso que no se produce nunca. Dos sucesos cuya intersección es el suceso imposible, se dice que son **incompatibles**.

La unión de sucesos contrarios es el suceso seguro y su intersección es el suceso imposible.

Sean los sucesos A y B; se dice que el suceso A está **contenido** en el suceso B, $A \subset B$, si siempre que se verifica A, también se verifica B.

EJERCICIOS

1°.- Se lanzan dos dados sobre la mesa y se suman los puntos de las caras superiores. Describe los sucesos elementales asociados al experimento y el espacio muestral. ¿Son los sucesos elementales "igualmente posibles"?

2°.- Se lanzan dos dados sobre la mesa y se anota el par de números obtenido (pero no se suman). Describe el espacio muestral indicando el número de sucesos elementales que lo forman. Siendo los sucesos A="al menos uno de los números es par" y B="la suma de los dos números es múltiplo de tres", calcula $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

PROBABILIDAD DE UN SUCESO: REGLA DE LAPLACE

Supongamos un experimento aleatorio que puede dar lugar a n sucesos elementales, incompatibles entre sí e "igualmente posibles", es decir, con las mismas posibilidades de ocurrir.
Sea A un suceso cualquiera, formado por k sucesos elementales, se define la probabilidad de A como el cociente:

$$P(A) = \frac{casos \quad favorables}{casos \quad igualmente \quad posibles}.$$

Ejemplo 3°: Se lanzan dos dados sobre la mesa y se suman sus caras superiores. Halla la probabilidad de obtener una suma igual a 8.
Solución: 5/36.

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

La probabilidad de sucesos verifica las siguientes propiedades:

1.- La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1. Toma el valor 1 cuando se trata del suceso seguro y vale 0 cuando se trata del suceso imposible: P(E) = 1 y P(∅) = 0.

2.- La probabilidad de la unión de dos sucesos es la suma de las probabilidades de los dos sucesos menos la probabilidad de su intersección:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A y B son sucesos incompatibles $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3.- Si A es un suceso cualquiera y $\overline{A}$ es su contrario:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

EJERCICIOS

4°.- *(ejercicio resuelto 1 pág. 327)*:
Encuentra el espacio muestral asociado a los siguientes sucesos:
A) Lanzar dos monedas al aire:
"C" = obtener cara; "X" = obtener cruz.
$E = \{(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)\}$

B) Familias de tres hijos considerando el sexo de éstos.
"H" = hombre; "M" = mujer.
$$E=\{(H,H,H),(H,H,M),(H,M,H),(M,H,H),(H,M,M),(M,H,M),(M,M,H),(M,M,M)\}$$

5°.- *(ejercicio resuelto 2 pág. 328)*:
En el experimento aleatorio de estudiar las familias de tres hijos por el sexo de dicho hijos consideramos los siguientes sucesos:
$$A=\{el \quad hijo \quad mayor \quad es \quad \text{var}\, ón\}$$
$$B=\left\{los \quad tres \quad hijos \quad tienen \quad igual \quad sexo\right\}$$
$$C=\{ningún \quad hijo \quad es \quad \text{var}\, ón\}$$
Encuentra los elementos de los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades: E; A; B; C; $A\cap B$; $A\cap C$; $\overline{B}$.

Solución: llamamos "H" = varón; "M" = mujer.
$$E=\{(H,H,H),(H,H,M),(H,M,H),(M,H,H),(H,M,M),(M,H,M),(M,M,H),(M,M,M)\}$$
$$\Rightarrow P(E)=\frac{8}{8}=1$$
$$A=\{(H,H,H),(H,H,M),(H,M,H),(H,M,M)\}\Rightarrow P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$
$$B=\{(H,H,H),(M,M,M)\}\Rightarrow P(B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$
$$C=\{(M,M,M)\}\Rightarrow P(C)=\frac{1}{8}$$
$$A\cap B=\{(H,H,H)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{8}$$
$$A\cap C=\{\phi\}\Rightarrow P(A\cap C)=0$$
$$\overline{B}=\{(H,H,M),(H,M,H),(M,H,H),(H,M,M),(M,H,M),(M,M,H)\}\Rightarrow P(\overline{B})=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

6°.- Se lanza al aire una moneda cinco veces. Describe el espacio muestral y calcula la probabilidad de que el número de caras obtenida sea tres. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la secuencia CXXCC? ¿Es la misma que la probabilidad de obtener tres caras?

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Se llama **probabilidad de A condicionada a B**, y se simboliza por P(A/B), al cociente:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ con } P(B)\neq 0.$$

(Es la probabilidad de que se realice A sabiendo que se ha realizado B).

De aquí obtenemos la siguiente expresión para la probabilidad compuesta (o del producto):

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

7º.- (ejemplo pág. 329):
Realizamos una encuesta a los alumnos sobre el color de los ojos y del pelo. En la tabla de contingencia podemos ver los resultados obtenidos:

	ojos claros	ojos oscuros	TOTALES
pelo rubio	14	16	30
pelo moreno	8	12	20
TOTALES	22	28	50

La probabilidad de elegir un alumno rubio y de ojos oscuros: $P(R \cap O) = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$.

La probabilidad de elegir un alumno rubio con ojos oscuros: $P(O/R) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$.

INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Dos sucesos son **independientes** si la ocurrencia de uno no modifica la probabilidad del otro:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dos sucesos son **dependientes** si la ocurrencia de uno modifica la probabilidad del otro:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo 8º: De una baraja española de 40 cartas sacamos, primero una, la devolvemos y luego sacamos otra. Sean los sucesos A: "sacar oros" y B: "sacar copas". ¿Cómo son los sucesos A y B, dependientes o independientes? ¿Cuál es la probabilidad de sacar primero oros y después copas?
Solución:
Los sucesos A y B son independientes ya que, al haber devolución en la segunda extracción, tenemos las mismas cartas que en la primera extracción.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = 0{,}0625$$

Ejemplo 9º: Se extraen tres cartas sucesivamente de una baraja de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las tres sean del mismo palo.
Solución:
Se consideran los sucesos: A = "la primera carta es de un palo válido"; B = "la segunda carta es del mismo palo que la primera" y C = "la tercera carta es del mismo palo que las dos primeras".
Nos piden la probabilidad: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap C)$.
Como A = suceso seguro, se tiene $P(A) = 1$.
Además $P(B/A) = \frac{9}{39}$ y $P(C/A \cap C) = \frac{8}{38}$.
Entonces: $P(A \cap B \cap C) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = 0{,}0112 \Rightarrow 1{,}12\%$

Ejemplo 10º: Se tiene una urna con cuatro bolas rojas y dos azules. Se extraen tres bolas. Calcula la probabilidad de que las tres sean rojas:

a) Con reemplazamiento.
b) sin reemplazamiento.

Solución:
A) Con reemplazamiento, las tres pruebas son independientes:

$$P(3R) = P(R) \cdot P(R) \cdot P(R) = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

B) Sin reemplazamiento, las tres pruebas son dependientes:

$$P(3R) = P(1^a R) \cdot P(2^a R / 1^a R) \cdot P(3^a R / 1^a R y 2^a R) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

Ejemplo 11º: En el experimento aleatorio de lanzar tres monedas, si A={sacar dos caras}, su probabilidad es $P(A) = \frac{3}{8}$, pues los casos favorables son tres: *CCX, CXC, XCC*, siendo los casos posibles 8: *CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX* y *XXX*.
Por tanto, ahora, la probabilidad del suceso A, sabiendo que ha ocurrido B={hay, como mínimo una cruz} (que llamaremos suceso A condicionado con B y se escribe A/B), sería:

$$P(A/B) = \frac{3}{7} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

EJERCICIOS

12º.- En una clase donde hay 20 chicos y 10 chicas, se han ofrecido inglés y francés como opciones para cursar lengua extranjera. Han elegido inglés 25 alumnos y el resto han optando por el francés; además se sabe que sólo dos de las 10 chicas han preferido francés. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Tomar al azar un nombre de la lista que sea el de un chico.
b) Elegir un chico que estudia francés.
c) Sabiendo que se ha seleccionado un chico, que éste estudie francés.

Solución: Se construye la tabla:

	A Chicos	$\overline{A}$ **Chicas**	**Total**
$\overline{B}$ **Inglés**	17	8	25
B Francés	3	2	5
Total	20	10	30

Observando la tabla se consideran los siguientes casos:
A = "el alumno elegido es chico"; $\overline{A}$ = "el alumno elegido es chica"; B = "el alumno elegido estudia francés" y $\overline{B}$ = "el alumno elegido estudia inglés".
Así tendremos:

a) p(chico) = p(A) = 20/30 = 2/3
b) p(chico que estudia francés) = p(A∩B) = 3/30 = 1/10
c) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{20}{30}} = \frac{3}{20}$

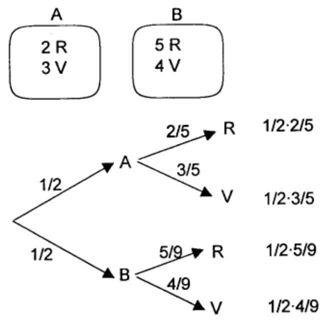
- ***Árbol de probabilidades*:**

Un árbol de probabilidades es un diagrama en árbol, de forma que en cada rama escribimos su probabilidad, que es la probabilidad de un experimento simple. Un camino es un conjunto de ramas que nos lleva desde el principio hasta el final.

La probabilidad de un camino es igual al producto de las probabilidades de sus ramas y la probabilidad de varios caminos es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

Ejemplo 13º: Tenemos una urna A con 2 bolas rojas y tres verdes y otra urna B con 5 bolas rojas y 4 verdes. Elegimos una urna al azar y de ella extraemos una bola. Haz el árbol de probabilidades y calcula la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

$$P(roja) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{43}{90} = 0{,}48$$



EJERCICIOS

14º.- En las familias formadas por cuatro hijos la probabilidad de que éstos sean dos varones y dos hembras es: a) ¼ b) ½ c) 3/8 d) No puede saberse.

Solución:

Construyendo un diagrama en árbol se tiene: P = 3/8.

15º.- De una baraja española se saca una carta y después otra sin devolver la primera. Calcula la probabilidad de que:

a) La primera seas un as.
b) La segunda sea un as, si no se sabe si la primera lo fue o no.
c) Las dos sean ases.

Solución:

A) $P(as) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

B) Construyendo un diagrama de árbol se tiene: $P = \frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}+\frac{36}{40}\cdot\frac{4}{39} = \frac{1}{130}+\frac{12}{130} = \frac{13}{130} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

C) $P = \frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

16º.- Se considera una familia con tres hijos en la que la probabilidad de que uno de los hijos sea niño es la misma que la de que sea niña. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) En la familia hay tres niñas.
b) Hay un sólo niño.
c) Sólo hay un niño ó una niña.

Solución:

A) $P(3chicas) = \frac{1}{8}$; B) $P = \frac{3}{8}$; C) $P = \frac{6}{8}$