INTERPOLACIÓN

La interpolación es un método que partiendo de datos experimentales permite obtener la expresión de una función interpoladora con la que estimar(interpolar o extrapolar) valores de la variable dependiente(y) en función de valores de la variable independiente(x).

La interpolación se puede clasificar según el tipo de función que se utilice

- Polinómica
- Exponencial
- Logarítmica , ... etc

Este tema se centra en la interpolación polinómica ó polinomio interpolador.

Es frecuente, en las ciencias experimentales y económicas, que no se disponga de expresiones explícitas (funciones dadas en la forma y = f(x)) que describan el fenómeno que se estudia, disponiendo únicamente de una información que se puede resumir en dos conceptos::

- La variable x determina la variable y (y depende de x).
- Como resultado de mediciones, se obtiene una tabla de valores x, y.

La función que relaciona ambas variables, $y = f(x)$, es desconocida, lo que supone ignorar otros puntos que no pertenezcan a la tabla $\left(x^*, y^*\right)$ para $x^* \neq x_i$, i =0, 1, 2, ...,n.

La técnica que permite, a partir de unas observaciones, hallar las valores que toma la función desconocida f(x) se conoce como **interpolación,** y la función que nos suministra aquéllos, **función interpoladora F(x).**

Los valores hallados en la interpolación no son exactos, por dos motivos:

1. Con n datos(puntos) se pueden determinar más de una función interpoladora F(x).
2. El número de puntos usados en la interpolación influye en el error: un mayor número de puntos indica más información, y por tanto menos incertidumbre.

Ante la diversidad de funciones interpoladoras que se pueden construir, es lógico elegir la de cálculo más simple y mejor comportamiento, selección que recae en la función polinómica

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

de cuya obtención nos ocuparemos más adelante.

Interpolación y extrapolación

Al proceso que permite determinar los valores aproximados de la función real f(x) se llama **interpolación,** cuando los puntos desconocidos se encuentran en el intervalo [x_o, x_n]. Si por el contrario, los cálculos se usan para encontrar valores correspondientes a abscisas menores que x_0, o mayores que x_n, se habla de **extrapolaciones.** La extrapolación incorpora un mayor riesgo, y por tanto un mayor error, que la interpolación. Esto es debido a que la extrapolación supone un patrón de conducta idéntico al actual, tanto en el pasado($x > x_n$), como en el futuro($x > x_n$), es decir, que las condiciones en las que se efectúan las observaciones x_i no varían. En cualquier caso, el error es mayor cuanto más alejado de los datos conocidos esté el punto que se desea extrapolar.

El **error absoluto** cometido al hacer una interpolación o extrapolación para x = x* es:

$$\text{Error absoluto} = |\text{valor real} - \text{valor interpolado}| = \left|f(x^*) - F\left(x^*\right)\right|$$

Interpolación lineal.

Cuando la función interpolar es un polinomio de grado uno, F(x) =ax + b, se habla de **interpolación lineal,** tremendamente útil por su fácil cálculo y por su error reducido si los puntos están suficientemente próximos.

En consecuencia , si poseemos los datos representados por dos puntos: (x_0, y_0) y (x_1, y_1), o se elige solo dos puntos para calcular un valor intermedio, esta interpolación es la idónea, pudiendo realizarse por varios métodos.

- **Primer método**

  Hallaremos los coeficientes a y b de la función F(x) resolviendo el sistema que se obtiene al sustituir los puntos en la función de interpolación(F(x) = ax + b):

$$\begin{cases} F(x_0) = y_0 = ax_0 + b \\ F(x_1) = y_1 = ax_1 + b \end{cases}$$

- **Segundo método**

  Otro modo de plantear la función interpoladora lineal es de forma

$$F(x) = m + n(x - x_0)$$

  que permite un cálculo muy simple de los parámetros m y n y que nos facilita su ampliación cuando se añade un tercer punto.

- **Tercer método**

  También podemos realizar la interpolación lineal sin necesidad de hallar la ecuación de una recta, pues teniendo en cuenta la semejanza de triángulos (ver figura 10.5) se tiene:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y^* - y_0}{x^* - x_0} \Rightarrow y^* - y_0 = \frac{(y_1 - y_0)(x^* - x_0)}{x_1 - x_0}$$

  La fracción del segundo miembro equivale a la relación de proporcionalidad (regla de tres):

$$\begin{array}{c} y_1 - y_0 \to x_1 - x_0 \\ d^* \to x^* - x_0 \end{array}$$

  de donde $y^* = y_0 + d^*$.

- **Caso particular**

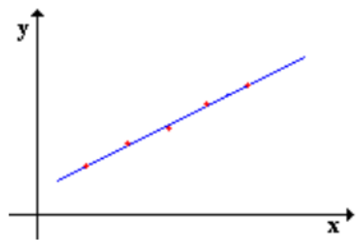
  Cuando se tienen los puntos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$$

  con las abscisas x_i igualmente espaciada, la interpolación lineal será adecuada si las **diferencias de primer orden** (o diferencias primeras) son aproximadamente iguales:

$$y_1 - y_0 \approx y_2 - y_1 \approx y_3 - y_2 \approx \ldots \approx y_n - y_{n-1}$$

  pues ello indica que los puntos están sensiblemente alineados.



Interpolación cuadrática

Si se dispone de la información proporcionada por tres puntos, ó se elige este número de un conjunto más amplio, y la interpolación lineal no es aplicable, bien por ser demasiado dispares las diferencias primeras o porque la disposición de los puntos(forma parabólica) así lo exige, se recurre a una función polinómica de segundo grado:

$$F(x) = ax^2 + bx + c$$

Los coeficientes a, b y c se determinan al imponer que los puntos dados cumplan la función de interpolación.

- . **Primer método**

Si son $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ y (x_2, y_2) los puntos consideramos, las condiciones impuestas por la interpolación exigen que se den las siguientes igualdades:

$$F(x_0) = y_0 \qquad F(x_1) = y_1 \qquad F(x_2) = y_2$$

con las que obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = y_0 \\ ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \end{cases}$$

Se resolución nos dará los valores de a, b y c.

- **Segundo método**

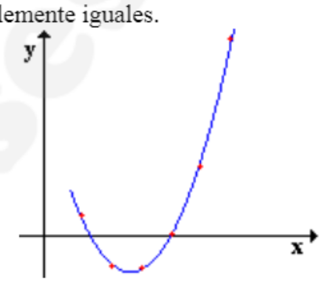
Si deseamos evitar resolver un sistema puede expresarse la función de interpolación en la forma:

$$F(x) = m + n(x - x_0) + p(x - x_0)(x - x_1)$$

que al imponer su cumplimiento para los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ y (x_2, y_2) nos facilita el valor de los coeficientes m, n y p.

- **Caso particular**

Al igual que con la interpolación lineal, cuando se dispone de más de tres puntos y quiere ajustarse a una parábola para efectuar interpolación ó extrapolaciones, la condición que asegura una elección óptima es que las diferencias de las diferencias de primer orden (**diferencias de segundo orden** o diferencias segundas) sean sensiblemente iguales.



También, en este caso, ha de suponerse que las abscisas de los puntos están igualmente separadas (condición no demasiado restrictiva, como se comprueba en la practica).