1.- Dado el punto P (2, 4, 1) y la recta $r:\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases}$, se pide:

a) Calcula la distancia del punto P a la recta r.

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de una recta s que pase por el punto P y corte perpendicularmente a r.

2.- a) Determina el valor del parámetro $k \in \Re$ para que la recta

$$r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=k-\lambda\ , \quad \lambda \in \Re \\ z=\lambda \end{cases}$$

esté contenida en el plano $\pi: x+2y+z=7$.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, obtén la ecuación implícita de un plano π', que corte perpendicularmente a π, de modo que la intersección de ambos planos sea r.

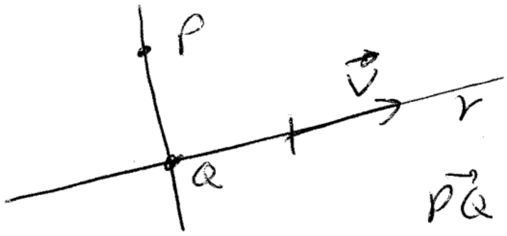
3.- a) Dado el plano $\pi: 7x-4y-4z-3=0$ y la recta $r: \dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$, hallar los puntos de r cuya distancia a π es 3 unidades.

b) Hallar las ecuaciones de los planos paralelos al plano $\pi: 2x+4y+4z-5=0$, cuya distancia a éste sea 3 unidades.

4.- Hallar un punto D perteneciente a la recta $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{1}$, sabiendo que forma con los puntos $A=(1,1,1);\ B=(4,3,2)\ y\ C=(1,3,-1)$, un tetraedro cuyo volumen vale 1.

Nota: El valor de cada ejercicio es de 2,5 puntos.

1) $P(2,4,1)$, $r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases}$



$Q \in r \rightarrow Q=(\lambda,\lambda,3-2\lambda)$

$\vec{PQ}=(\lambda-2,\lambda-4,2-2\lambda)$

$\vec{PQ} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{PQ}\cdot\vec{v}=0 \rightarrow (\lambda-2,\lambda-4,2-2\lambda)\cdot(1,1,-2)=0$

$\boxed{\lambda=\frac{5}{3}}$

$\rightarrow Q=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{-1}{3}\right)$, $\vec{PQ}=\left(-\frac{1}{3},\frac{-7}{3},\frac{-4}{3}\right)$

a) $d(P,r)=|\vec{PQ}|=\sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2+\left(\frac{-7}{3}\right)^2+\left(\frac{-4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{22}{3}}$

b) $s \equiv \begin{cases} P(2,4,1) \\ \vec{w}=\vec{PQ}=(1,7,4) \end{cases} \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=4+7t \\ z=1+4t \end{cases}$

———o———

2) a) $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=k-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\pi \equiv x+2y+z=7$

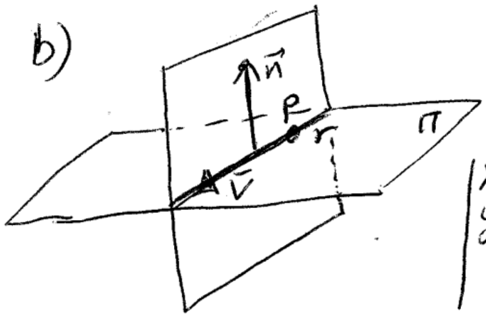
$\vec{v} \in r \rightarrow \vec{v}=(1,-1,1)$, $\vec{n} \in \pi \rightarrow \vec{n}=(1,2,1)$

$\vec{v}\cdot\vec{n}=(1,-1,1)\cdot(1,2,1)=0 \Rightarrow r \parallel \pi$

Para que esté contenida $P \in r$ también debe pertenecer a π

$\Rightarrow P=(1,k,0) \rightarrow \pi \rightarrow 1+2k+0=7 \rightarrow \boxed{k=3}$

b)



$\pi' \equiv \begin{cases} \vec{v}=(1,-1,1) \\ \vec{n}=(1,2,1) \\ P=(1,3,0) \end{cases}$

$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-3 & -1 & 2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \boxed{\pi' \equiv x-z-1=0}$

———o———

3) $\pi \equiv 7x-4y-4z-3=0$, $r \equiv \dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$

a) Primero comprobemos rápidamente la posición relativa de π y r:

$\vec{n} \in \pi \quad \vec{n}=(7,-4,-4) \qquad \vec{n}\cdot\vec{v}=0 \rightarrow r \parallel \pi$

$\vec{v} \in r \quad \vec{v}=(0,1,-1)$

Calculemos la distancia de r a π, porque puede que no sea 3:

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|7(-1)-4\cdot 0-4\cdot 2-3|}{\sqrt{7^2+(-4)^2+(-4)^2}}=\frac{18}{9}=2$$

Conclusión: no hay ningún punto de r que diste 3 de π.

b) Como son paralelos serán de la forma $2x+4y+4z+D'=0$

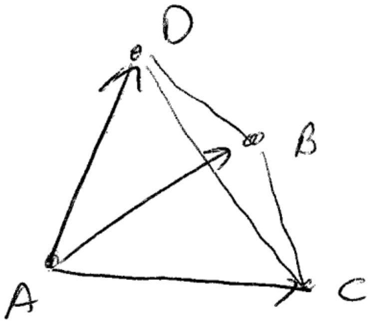
aplicando $d(\pi,\pi')=\dfrac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$$\rightarrow \frac{|-5-D'|}{\sqrt{4+16+16}}=3 \rightarrow |-5-D'|=18$$

$-5-D'=18 \rightarrow D'=-23 \rightarrow \pi'_1 \equiv 2x+4y+4z-23=0$

$5+D'=18 \rightarrow D'=13 \rightarrow \pi'_2 \equiv 2x+4y+4z+13=0$

4) $V = \frac{1}{6}\left|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})\right|$



$D \in r \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4-2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -4+\lambda \end{cases} \Rightarrow D = (4-2\lambda, \lambda, -4+\lambda)$

$\Rightarrow \vec{AB} = (3,2,1),\ \vec{AC} = (0,2,-2),\ \vec{AD} = (3-2\lambda, \lambda-1, -5+\lambda)$

$\rightarrow V = \frac{1}{6}\left\| \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3-2\lambda & \lambda-1 & -5+\lambda \end{vmatrix} \right\| = 1$

$6(-5+\lambda) - 4(3-2\lambda) - 2(3-2\lambda) + 6(\lambda-1) = 6 \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{5}{2}}$

$\Rightarrow D = \left(-1, \frac{5}{2}, \frac{-3}{2}\right)$