ECUACIÓN DE LA TANGENTE Y NORMAL

1. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2xe^{x} + \dfrac{x^3-2}{x^2+4}$ en el punto de abscisa x = 0.

2. Hallar el ángulo que forma con el semieje positivo de abcsisas la recta tangente a la curva $y = x^2-6x+7$ en el punto x = 3.

3. Hallar los puntos de la curva $y = x^3-3x+1$ donde la tangente es horizontal.

4. Dada la ecuación de una curva, si se conoce la inclinación de una de sus tangentes, ¿es posible hallar las coordenadas del punto de tangencia? Explicar razonadamente la respuesta y aplicar el método al caso en que la ecuación de la curva sea $y = x^2-6x+8$ y la inclinación de la recta tangente a la curva sea de 45º.

5. Determinar en qué punto de la curva $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ la tangente tiene inclinación de 45º.

6. Dada la parábola de ecuación $y = x^2-2x+5$ y la recta secante a ella por los puntos de abscisa $x_1=1$ y $x_2=3$, hallar la ecuación de la tangente a la parábola que sea paralela a la recta secante dada.

7. Sea $f:\Re\rightarrow\Re$ una función definida por $f(x) = 2x^3-5x^2+2x$.

(1) Demuestra que la recta de ecuación $y = -2x+1$ es tangente a la gráfica de la función y halla el punto de tangencia correspondiente.

(2) ¿Corta esta recta tangente a dicha gráfica en algún punto distinto al de tangencia?

8. Una partícula que se mueve por el plano XOY baja deslizándose a lo largo de la curva de ecuación $y = \sqrt{x^2+9}$. En el punto $P(4,5)$ abandona la curva y sigue la recta tangente a dicha curva.

(1) Calcular el punto R del eje OY por el que pasará la partícula.

(2) Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿Existe algún otro punto Q de la curva tal que la recta tangente a la curva en el punto Q corte al eje Oy en el mismo punto R anterior?

9. Dada la parábola $y = 2x^2-2x-4$, hallar:

(1) Los puntos de la parábola en los que la tangente a la misma pasan por el punto $(1,-6)$.

(2) Las ecuaciones de dichas tangentes.

10. Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = a+bx^2+x^4$ y $g(x) = c-x^3$. Calcular los valores de a, b y c de manera que las gráficas de f y g se corten en el punto $(1,1)$ y sean tangentes en dicho punto.

Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función f dada por

$f(x) = 2xe^x + \frac{x^3-2}{x^2+4}$ en el punto de abscisa x = 0.

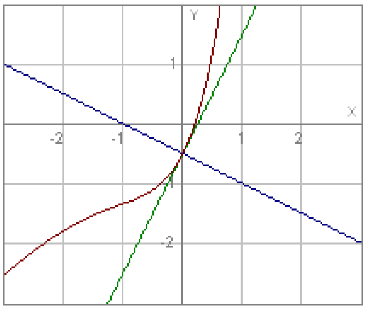
> La tangente a la gráfica de la función f en el punto a viene dada por:
>
> $y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$
>
> La normal es la perpendicular:
>
> $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$

Hallamos la derivada de la función:

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x + \frac{3x^2\left(x^2+4\right) - 2x\left(x^3-2\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$$

Calculamos f(0) y f'(0);

$$f(0) = 0 + \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \;;\; f'(0) = 2 + 0 + \frac{0}{16} = 2$$



La recta tangente es:

$$y + \frac{1}{2} = 2(x-0) \;;\; y + \frac{1}{2} = 2x \;;\; 2y+1 = 4x \;;\; 4x-2y-1 = 0.$$

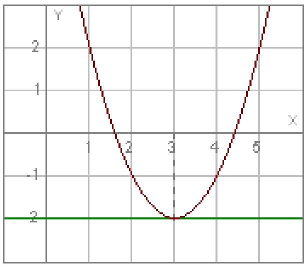
La recta normal:

$$y + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}x \;;\; y + \frac{1}{2} = \frac{-x}{2} \;;\; 2y+1 = -x \;;\; x+2y+1 = 0.$$

Solución: Tangente, $4x-2y-1 = 0$

Normal, $x+2y+1 = 0$

Hallar el ángulo que forma con el semieje positivo de abcsisas la recta tangente a la curva $y = x^2-6x+7$ en el punto $x = 3$.



La derivada de la función en el punto x=3 es la pendiente a la curva de la función en ese punto.

Derivando: $y' = 2x-6$.

El valor que toma para x=3 es: $y' = 6-6 = 0$

La tangente en el punto x=3 a la curva tiene de pendiente 0. Como la pendiente es la tangente de la inclinación de la recta (ángulo con el semieje positivo), la inclinación debe ser cero.

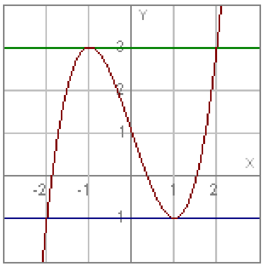
Solución: 0º. La recta tangente es horizontal.

Hallar los puntos de la curva $y = x^3-3x+1$ donde la tangente es horizontal.

Si la tangente es horizontal, su inclinación es de 0º, por lo que su pendiente (tangente de la inclinación) es cero.

Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto es la derivada de la función en dicho punto, calculamos la derivada hallamos los valores que la anulan. Para esos valores la tangente será horizontal:

$y' = 3x^2-3$; $3x^2-3 = 0$; $x^2-1 = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$.



Para esos valores la derivada se anula, luego las rectas tangentes en dichos números tienen de pendiente cero, son horizontales.

Si transformamos los valores:

$x = 1$: $y = 1-3+1 = -1$; $(1,-1)$.

$x = -1$: $y = -1+3+1 = 3$; $(-1,3)$.

Solución: (1,-1) y (-1,3).

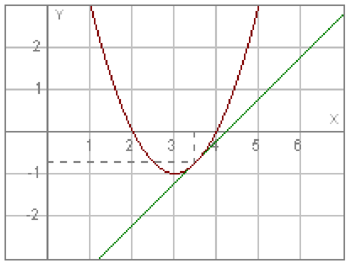
Dada la ecuación de una curva, si se conoce la inclinación de una de sus tangentes, ¿es posible hallar las coordenadas del punto de tangencia? Explicar razonadamente la respuesta y aplicar el método al caso en que la ecuación de la curva sea $y = x^2-6x+8$ y la inclinación de la recta tangente a la curva sea de 45°.

La pendiente m de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto x=a es la derivada de la función en dicho valor: m = f'(a). Como la pendiente es la tangente de la inclinación, bastará calcular los valores que hagan que la derivada sea igual a la pendiente deseada.

Si deseamos que la inclinación d la recta sea 45°, su pendiente será: m = tg45°, m = 1.

Derivamos la función y buscamos los valores que hacen que valga 1:

$$y' = 2x-6 \;;\; 2x-6 = 1 \;;\; 2x = 7 \;;\; x = \frac{7}{2}.$$



$y = x-\dfrac{17}{4}$

Transformamos ese valor para hallar el punto de tangencia:

$$x = \frac{7}{2}: \; y = \left(\frac{7}{2}\right)^2-\frac{42}{2}+8 = \frac{49}{4}-21+8 = \frac{49}{4}-13 = \frac{49-52}{4} = -\frac{3}{4}$$

Solución: La recta tangente en $P\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{4}\right)$ tiene 45° de inclinación.

Determinar en qué punto de la curva $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ la tangente tiene inclinación de 45°.

La pendiente de la recta tangente debe ser: $m = tg45°$; $m = 1$.

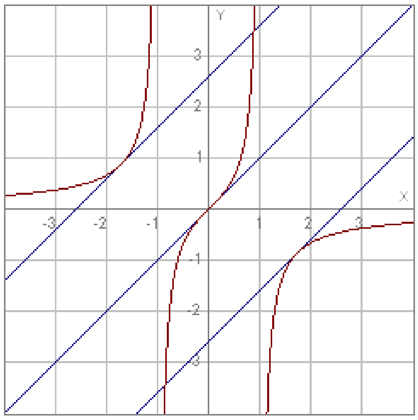
Como la pendiente de la recta tengente en un punto coincide con la derivada de la función en dicho punto, derivamos y hallamos los valores que hacen la derivada igual a 1:

$$y' = \frac{1-x^2-x(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2}$$

Igualamos a 1 y resolvemos la ecuación:

$$\frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2} = 1 \;;\; x^2+1 = \left(1-x^2\right)^2 \;;\; x^2+1 = 1+x^4-2x^2 \;;\; x^4-3x^2 = 0 \;;\; x^2\left(x^2-3\right) = 0$$

$$;\;\begin{cases} x^2 = 0 \;;\; x = 0 \\ x^2-3 = 0 \;;\; x^2 = 3 \;;\; x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$



Transformamos los valores obtenidos:

1. $x = 0$: $y = 0$; $(0,0)$
2. $x = \sqrt{3}$: $y = \dfrac{\sqrt{3}}{1-3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $x = -\sqrt{3}$: $y = \dfrac{-\sqrt{3}}{1-3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Solución: $(0,0)$, $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Dada la parábola de ecuación $y = x^2-2x+5$ y la recta secante a ella por los puntos de abscisa $x_1=1$ y $x_2=3$, hallar la ecuación de la tangente a la parábola que sea paralela a la recta secante dada.

Hallamos la ecuación de la secante transformando los puntos dados:

$x_1=1$: $y = 1-2+5 = 4$. Punto A(1,4).

$x_2=3$: $y = 9-6+5 = 8$. Punto B(3,8).

La secante es:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{4} \;;\; \frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{2} \;;\; y-4 = 2x-2 \;;\; y = 2x+2.$$

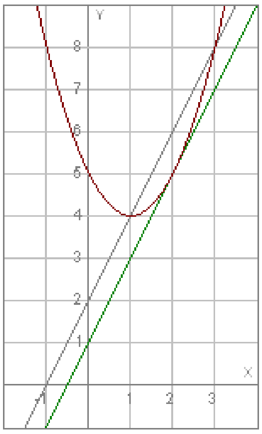
La recta tangente debe ser paralela, luego su pendiente debe ser igual a la de la recta secante: $m = 2$.

Como la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada en dicho punto, hallamos los valores de x que hacen que la derivada valga 2:

$y' = 2x-2 \;;\; 2x-2 = 2 \;;\; 2x = 4 \;;\; x = 2.$

Para $x = 2$, la derivada vale 2, luegos la tangente a la gráfica en $x = 2$ tiene esa pendiente. Hallamos el punto de tangencia transformando el 2:

$x = 2$: $y = 4-4+5 = 5$. Punto de tangencia: P(2,5).



$y = 2x+2$ | $y = 2x+1$

La ecuación de la recta tangente es:

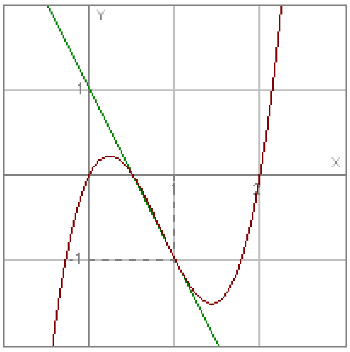
$y-f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \;;\; y-5 = 2(x-2) \;;\; y-5 = 2x-4 \;;\; y = 2x+1.$

Solución: $y = 2x+1$.

Sea $f:\Re\to\Re$ una función definida por $f(x) = 2x^3-5x^2+2x$.

(1) Demuestra que la recta de ecuación $y = -2x+1$ es tangente a la gráfica de la función y halla el punto de tangencia correspondiente.

(2) ¿Corta esta recta tangente a dicha gráfica en algún punto distinto al de tangencia?



(1) Si la recta es tangente a la gráfica, como su pendiente es -2, debe existir algún valor de x que haga que la derivada tome ese valor:

$f'(x) = 6x^2-10x+2$.

Debe ser entonces:

$$6x^2-10x+2 = -2 \;;\; 6x^2-10x+4 = 0 \;;\; 3x^2-5x+2 = 0 \;;\; x = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6} \;;\; x = \frac{5\pm1}{6} \;;$$

$$x = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Hallamos los transformados de los puntos:

$f(1) = 2-5+2 = -1$. Punto $A(1,-1)$.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\frac{8}{27}-5\frac{4}{9}+2\frac{2}{3} = \frac{16}{27}-\frac{20}{9}+\frac{4}{3} = \frac{16-60+36}{27} = \frac{-8}{27}.\ \text{Punto } B\left(\frac{2}{3},-\frac{8}{27}\right)$$

Si la recta dada es tangente a la gráfica debe pasar por alguno de los puntos anteriores:

$A(1,-1)$: Debe cumplir la ecuación: $-1 = -2+1$; $-1 = -1$. Cierto.

Solución: La recta $y = -2x+1$ es tangente en $(1,-1)$.

(2) Para ver si corta a la recta en otros puntos resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^3-5x^2+2x \\ y = -2x+1 \end{array}\right\} \; 2x^3-5x^2+2x = -2x+1 \;;\; 2x^3-5x^2+4x-1 = 0.$$

Descomponemos en producto de factores:

	2	-5	4	-1
1		2	-3	1
	2	-3	1	0
1		2	-1	
	2	-1	0	

$$(x-1)^2(2x-1) = 0 \;;\; \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

El $x = 1$ nos da el punto de tangencia. Para el otro valor obtenemos otro punto de corte. Si hallamos el transformado:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{8}-5\frac{1}{4}+2\frac{1}{2} = \frac{1}{4}-\frac{5}{4}+1 = \frac{-4}{4}+1 = -1+1 = 0$$

Solución: Corta en $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

EJERCICIO 8

Una partícula que se mueve por el plano XOY baja deslizándose a lo largo de la curva de ecuación $y = \sqrt{x^2+9}$. En el punto $P(4,5)$ abandona la curva y sigue la recta tangente a dicha curva.

(1) Calcular el punto R del eje OY por el que pasará la partícula.

(2) Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿Existe algún otro punto Q de la curva tal que la recta tangente a la curva en el punto Q corte al eje Oy en el mismo punto R anterior?

(1) Hallamos la ecuación de la recta tangente:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

La pendiente de la recta es la derivada para x = 4:

$$f'(4) = \frac{4}{\sqrt{16+9}} = \frac{4}{5}$$

La ecuación es:

$$y-f(4) = f'(4)\cdot(x-4) \;\;;\;\; y-5 = \frac{4}{5}(x-4) \;\;;\;\; 5y-25 = 4x-16 \;\;;\;\; 4x-5y+9 = 0.$$

El punto R es el corte de la recta tangente con el eje OY (x = 0):

$$0-5y+9 = 0 \;\;;\;\; 5y = 9 \;\;;\;\; y = \frac{9}{5}$$

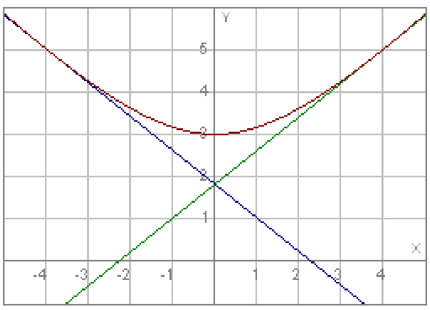
Solución: Corta al eje OY en $\left(0,\frac{9}{5}\right)$.

(2) Como la función es par, $f(-x) = f(x)$, el punto simétrico respecto al eje OY, Q(-4,5), cumple la misma propiedad.

La recta tangente será:

$$y-f(-4) = f'(-4)\cdot(x+4) \;\;;\;\; y-5 = -\frac{4}{5}(x+4) \;\;;\;\; 5y-25 = -4x-16 \;\;;\;\; 4x+5y-9 = 0$$

Solución: El punto Q(-4,5).



$y = x^2+9$ | $4x-5y+9 = 0$ | $4x+5y-9 = 0$

Podemos resolver el apartado (2) de forma general:

Calculamos la expresión de todas las rectas tangentes y buscamos las que pasan por el punto $\left(0,\frac{9}{5}\right)$:

Sea P(a,b) un punto de la gráfica. Se cumple:

$b = f(a) = \sqrt{a^2+9}$. $f'(a) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+9}}$

La recta tangente es:

$y-f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$; $y-\sqrt{a^2+2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+9}}(x-a)$; $y\sqrt{a^2+9}-\left(a^2+9\right) = ax-a^2$; $y\sqrt{a^2+9}-a^2-9 = ax-a^2$;

$ax-y\sqrt{a^2+9}+9 = 0$.

Si queremos que pase por el punto $\left(0,\dfrac{9}{5}\right)$, debe cumplirse:

$-\dfrac{9}{5}\sqrt{a^2+9}+9 = 0$; $-9\sqrt{a^2+9}+45 = 0$; $\sqrt{a^2+9} = 5$; $a^2+9 = 25$; $a^2 = 16$; $a = \pm4$.

Se obtienen las rectas $\begin{cases} 4x-5y+9 = 0 \\ -4x-5y+9 = 0 \end{cases}$, siendo los puntos de corte: $\begin{cases} a = 4:\ P\left(4,\sqrt{16+9}\right) = P(4,5) \\ a = -4:\ Q(-4,5) \end{cases}$

Dada la parábola $y = 2x^2-2x-4$, hallar:

(**1**) Los puntos de la parábola en los que la tangente a la misma pasan por el punto $(1,-6)$.

(**2**) Las ecuaciones de dichas tangentes.

(**1**) Hallamos la expresión general de las tangentes a la gráfica.

$f'(x) = 4x-2$.

Si $P(a,b)$ es un punto de la gráfica:

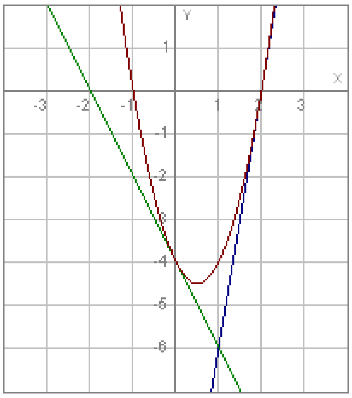
$b = f(a) = 2a^2-2a-4 \;;\; f'(a) = 4a-2$.

La ecuación de la recta tangente en $x=a$ es:

$y-f(a) = f'(a)\cdot(x-a) \;;\; y-\left(2a^2-2a-4\right) = (4a-2)(x-a) \;;$

$y-2a^2+2a+4 = 4ax-4a^2-2x+2a \;;\; (4a-2)x-y-2a^2-4 = 0$.

De todas las rectas tangentes elegimos las que pasan por el punto $(1,-6)$:



$y = 2x^2-2x-4$ | $y = -2x-4$ | $y = 6x-12$

$(4a-2)\cdot 1+6-2a^2-4 = 0 \;;\; 4a-2-2a^2+2 = 0 \;;\; -2a^2+4a = 0 \;;\; a^2-2a = 0 \;;$

$a(a-2) = 0 \;;\; \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$

Obtenemos los puntos:

$a=0$: $f(0) = -4$. $A(0,-4)$.

$a=2$: $f(2) = 8-4-4 = 0$. $B(2,0)$

Solución: $A(0,-4)$, $B(2,0)$.

(**2**) Sustituimos en la expresión general de las rectas tangentes:

$a=0$: $-2x-y-4 = 0 \;;\; 2x+y+4 = 0$.

$a=2$: $6x-y-8-4 = 0 \;;\; 6x-y-12 = 0$.

Solución: $2x+y+4 = 0 \;;\; 6x-y-12 = 0$.

EJERCICIO 10

Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = a+bx^2+x^4$ y $g(x) = c-x^3$. Calcular los valores de a, b y c de manera que las gráficas de f y g se corten en el punto $(1,1)$ y sean tangentes en dicho punto.

Si son tangentes en el punto (1,1), las gráficas deben pasar por dicho punto:

$f(1) = 1$: $a+b+1 = 1$; $a+b = 0$.

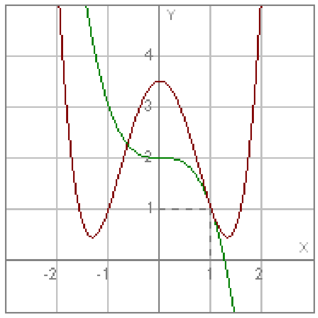
$g(1) = 1$: $c-1 = 1$; $c = 2$.

También deben tener la misma recta tangente en dicho punto, es decir, debe ser:

$f'(1) = g'(1)$:

$f'(x) = 2bx+4x^3$; $g'(x) = -3x^2$

$f'(1) = g'(1)$; $2b+4 = -3$; $2b = -7$; $b = -\frac{7}{2}$.



$f(x) = \frac{7}{2}-\frac{7}{2}x^2+x^4$ | $g(x) = 2-x^3$

En la 1ª relación: $a = \frac{7}{2}$.

Solución: $a = \frac{7}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$, $c = 2$.