1.- Se consideran las rectas $r:\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+a}{2}$, $s:\begin{cases}x=1+4t\\y=-1+3t\\z=-4+5t\end{cases}$.

a) Estudiar la posición relativa en

b) P

2.- a) Ca

) cuyos vértices A, B y C, son triángulo anterior y el vétice D es un punto de la recta $\frac{x-1}{2}=y$ este punto sabiendo que el volumen del tetraedro es de $4u^3$.

10

3.- Dados el plano $\pi: y-z=3$ y la recta $r:\begin{cases}x=2\lambda\\y=1+\lambda\\z=-1+\lambda\end{cases}$ $\lambda \in R$

a) Estudia la posición relativa de π y r Paralelos

b) Dar unas ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a π que corta a r perpendicularmente en el punto $P(0,1,-1)$.

4.- Sea el p ecuación de un plano paralelo a π y cuya distancia al origen sea 5 unidades. b) Calcular el punto del plano π que está más próximo al origen.

10

NOTA: El valor de cada ejercicio es de 2,5 puntos.

1) $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+a}{2}$ $\quad r \equiv \begin{cases} A=(3,3,-a) \\ \vec{v}=(2,-1,2) \end{cases}$

$s \equiv \begin{cases} x = 1+4t \\ y = -1+3t \\ z = -4+5t \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} B=(1,-1,-4) \\ \vec{w}=(4,3,5) \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad rg M = 2$ $\quad \vec{AB} = (2,4,4-a)$

↳ Secantes ó se cruzan

$M^+ = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4a \end{pmatrix}$ $\quad |M^+| = 6(4-a) - 10 + 32 - 12 - 40 + 4(4-a) = 0$

$24 - 6a - 30 + 16 - 4a = 0 \quad 10a = 10 \quad a = 1$

Si $a = 1$ $rg M^+ = 2 = rg M \to$ se cortan

Si $a \neq 1$ $rg M^+ = 3 < rg M \to$ Se cruzan

b) $a = 2$ Se cruzan.

$$d(r,s) = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{|(2,4,2) \cdot (-11,-2,10)|}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \, u$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}(-5-6) - \vec{j}(10-8) + \vec{k}(6+4) = -11\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = \sqrt{225} = 15$$

2) $\pi \equiv x-y+3z=-3$

a)

$A(-3,0,0)$, $B=(0,3,0)$, $C=(0,0,-1)$

$$\text{Area}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{i}(-3)-\vec{j}(-3)+\vec{k}(-9)\right|$$

$\vec{AB}=(3,3,0)$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9+9+81}=\frac{1}{2}\sqrt{99}=\frac{3}{2}\sqrt{11}\ u^2$$

$\vec{AC}=(3,0,-1)$

b) $D\in r\equiv \frac{x-1}{2}=y=\frac{z+1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1-2\lambda\end{cases}$

$\rightarrow D=(1+2\lambda,\lambda,-1-2\lambda)$

$\vec{AD}=(4+2\lambda,\lambda,-1-2\lambda)$

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{matrix}\vec{AB}\\ \vec{AC}\\ \vec{AD}\end{matrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{matrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4+2\lambda & \lambda & -1-2\lambda\end{matrix}\right|=4$$

$|-3(4+2\lambda)-9(-1-2\lambda)+3\lambda|=24$

$|-12-6\lambda+9+18\lambda+3\lambda|=24$

$|15\lambda-3|=24 \qquad 15\lambda-3=24 \quad 15\lambda=27 \quad \lambda=\frac{27}{15}=\frac{9}{5}$

$$D=\left(\frac{23}{5},\frac{9}{5},\frac{-23}{5}\right)$$

o bien

$-15\lambda+3=24 \rightarrow \lambda=\frac{-21}{15}=\frac{-7}{5} \rightarrow D'=\left(\frac{-9}{5},\frac{-7}{5},\frac{9}{5}\right)$

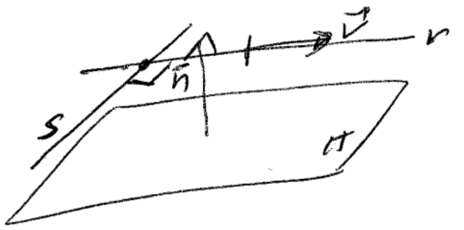
—— o ——

3) $\pi \equiv y - z = 3 \rightarrow \vec{n} = (0,1,-1)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v} = (2,1,1)$$

a) $\vec{n} \cdot \vec{v} = (0,1,-1)(2,1,1) = 0 \rightarrow \vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow$

r es $\parallel$ a π



b) $P(0,1,-1) \in r$

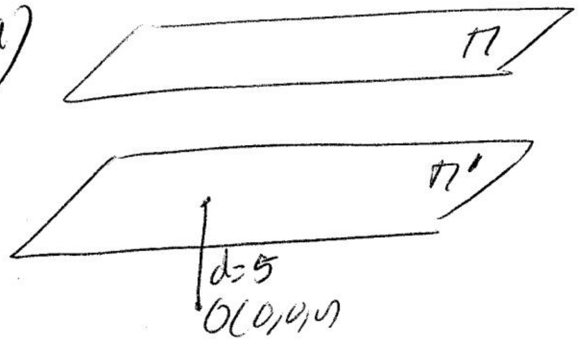
Sea $\vec{w}$ el vector de s $\rightarrow \vec{w} \perp \vec{n}$ y $\vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow$

$$\vec{w} = \vec{n} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1+1) - \vec{j}(+2) + \vec{k}(-2) =$$
$$= (2,-2,-2)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

4) $\pi \equiv 3x-2y=9$

a)



$\pi' \equiv 3x-2y+c=0$

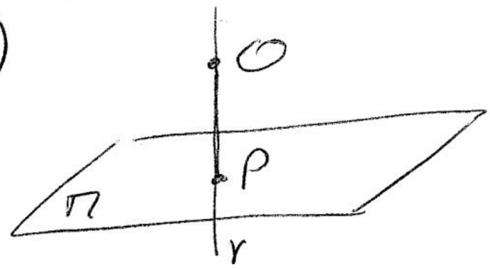
$$d(O,\pi') = \frac{|3\cdot 0-2\cdot 0+c|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|c|}{\sqrt{13}} = 5$$

$|c| = 5\sqrt{13}$ $\qquad c = \pm 5\sqrt{13}$

$\rightarrow \pi' \equiv 3x-2y+5\sqrt{13}=0$ o bien

$\pi'' \equiv 3x-2y-5\sqrt{13}=0$

b)



$$r \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{v} = \vec{n} = (3,-2,0) \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$P \in r \rightarrow P(3\lambda, -2\lambda, 0)$

y $P \in \pi \rightarrow 3(3\lambda)-2(-2\lambda)=9$

$9\lambda + 4\lambda = 9$

$\lambda = \frac{9}{13} \rightarrow P = \left(\frac{27}{13}, \frac{-18}{13}, 0\right)$