EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS

1.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2 + x + 1$, paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

2.- Hallar los puntos de la curva $f(x) = x^3 - 2x + 2$ en los que su tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

3.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 5x + 6$, paralela a la recta de ecuación $3x + y - 2 = 0$

4.- ¿En qué punto de la curva $f(x) = Ln\ x$, la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1)$?

5.- Dada la función $f(x) = x^2 - 8x + 1$, ¿ existe algún punto de la curva con tangente paralela a la recta y=1?

6.- Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$ y la recta secante a ella por los puntos de abscisa $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$, halla la ecuación de la tangente a la parábola que sea paralela a la recta secante dada.

7.- Considera la curva de ecuación $y = x^2 - 2x + 3$.

a) Halla una recta que sea tangente a dicha curva y que forme un ángulo de 45º con el eje de abscisas.
b) ¿Hay algún punto de la curva en elque la recta tangente sea horizontal? En caso afirmativo, halla la ecuación a dicha recta tangente; y en caso negativo, explica por qué.

8.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, determina:

a) Las coordenadas de los puntos de la misma, en los que las tangentes forman un ángulo de 45º con la parte positiva del eje de abscisas.
b) La ecuación de la tangente en el punto de abscisa $x = \sqrt{3}$.
c) La ecuación de la recta normal a la curva en dicho punto.

9.- Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en $x = 1$.

10.- Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, determina los coeficientes *a, b* y *c* sabiendo que la gráfica de *f(x)* pasa por los puntos (1, 0) y (3, 2) y que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$ tiene pendiente igual a –1.

11.- Halla una función polinómica de segundo grado sabiendo que pasa por el punto (3, 4) y que la pendiente de la tangente en el punto (-1, 1) vale 1.

12.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, halla los coeficientes a, b, c y d para que se cumpla:

a) La función pasa por (1, 1) y (0, 0). b) Tiene derivada segunda nula en $x = 0$.

c) La tangente en (0, 0) es paralela a la recta $4x - y = 5$.

1.- $f(x) = x^2 + x + 1 \quad , m = 1$

$f'(x) = 2x + 1 \rightarrow 2x_0 + 1 = 1 \rightarrow x_0 = 0 \rightarrow y_0 = f(0) = 1$

$P_0(0,1)$

$\boxed{y - 1 = 1(x - 0)}$

2.- $f(x) = x^3 - 2x + 2 \quad , m = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 2 \rightarrow 3x_0^2 - 2 = 1 \quad x_0^2 = 1 \quad x_0 = \pm 1$

$f(1) = 1 \quad f(-1) = 3$

$P(1,1) \quad , Q(-1,3)$

3.- $y = x^2 - 5x + 6 \qquad 3x + y - 2 = 0 \quad y = -3x + 2$

$m = -3$

$y' = 2x - 5$

$2x_0 - 5 = -3 \rightarrow x_0 = 1 \quad f(1) = 2 \rightarrow P_0(1,2)$

$\boxed{y - 2 = -3(x - 1)}$

4.- $y = \ln x$

$\vec{v} = (e,1) - (1,0) = (e-1, 1) \rightarrow m = \frac{1}{e-1}$

$y' = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{1}{e-1} \quad x_0 = e - 1 \rightarrow y_0 = \ln(e-1)$

$P(e-1, \ln(e-1))$

5.- $y = x^2 - 8x + 1$ / $y = 1 \rightarrow m = 0$

$y' = 2x - 8 \rightarrow 2x_0 - 8 = 0 \quad x_0 = 4 \rightarrow y_0 = -15$

$P(4, -15)$

6.- $y = x^2 - 2x + 5$

$x_1 = 1 \quad y_1 = 4$ $\quad \bar{V} = (3,8) - (1,4) = (2,4) \rightarrow m = \frac{4}{2} = 2$

$x_2 = 3 \quad y_2 = 8$

$y' = 2x - 2 \quad 2x_0 - 2 = 2 \quad x_0 = 2 \rightarrow y_0 = 5$

$P_0(2,5)$

$\boxed{y - 5 = 2(x-2)}$

7.- $y = x^2 - 2x + 3$

a) $tg\alpha = m \quad tg 45 = 1 = m$

$y' = 2x - 2 \quad 2x_0 - 2 = 1 \quad x_0 = \frac{3}{2} \rightarrow y_0 = \frac{9}{4} \rightarrow P(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

$\boxed{y - \frac{9}{4} = 1(x - \frac{3}{2})}$

b) $y' = 2x - 2 = 0 \quad x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow P(1,2)$

$m = 0 \quad y - 2 = 0(x-1) \rightarrow \boxed{y = 2}$

8.- $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1+x^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

a) $m = 1$

$\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 1 \rightarrow 1-x^2 = (1+x^2)^2 \rightarrow 1-x^2 = 1+x^4+2x^2$

$x^4+3x^2 = 0 \quad x^2(x^2+3) = 0 \quad \boxed{x_0 = 0 \quad y_0 = 0}$

$\boxed{y - 0 = 1\,(x-0)} \rightarrow y = x$

b) $x_0 = \sqrt{3} \quad y_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$f'(\sqrt{3}) = \dfrac{1-\sqrt{3}^2}{(1+\sqrt{3}^2)^2} = \dfrac{1-3}{(1+3)^2} = \dfrac{-2}{16} = \dfrac{-1}{8} = m$

$\boxed{y - \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1}{8}(x-\sqrt{3})}$

c) $\boxed{y - \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 8\,(x-\sqrt{3})}$ $\qquad m' = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{-1}{-1/8} = 8$

9) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 1 \rightarrow y_0 = \dfrac{1}{2}$

$y' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad y'(1) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} = m$

$\boxed{y - 1/2 = -\frac{1}{2}(x-1)}$

10) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{ll} f(1)=0 & a+b+c=0 \\ f(3)=2 & 9a+3b+c=2 \\ f'(1)=-1 & 2a+b=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ b+2c=1 \\ 4c=8 \end{array}\right\}$$

$\boxed{c=2}$ $\boxed{b=-3}$ $\boxed{a=1}$

11) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{ll} f(3)=4 & 9a+3b+c=4 \\ f(-1)=1 & a-b+c=1 \\ f'(-1)=1 & -2a+b=1 \end{array}\right\} b = 1+2a \qquad \left.\begin{array}{r} 9a+3+6a+c=4 \\ a-1-2a+c=1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 15a+c=1 \\ -a+c=2 \end{array}\right\} -$$

$16a = -1$ $\boxed{a=-\frac{1}{16}}$ $\boxed{c=\frac{31}{16}}$ $\boxed{b=\frac{7}{8}}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{7}{8}x + \frac{31}{16}}$$

12) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f' = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'' = 6ax + 2b$

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 4 \\ f''(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a+b+c+d &= 1 \\ d &= 0 \\ c &= 4 \\ 2b &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \boxed{a = -3} \\ &\boxed{d = 0} \\ &\boxed{c = 4} \\ &\boxed{b = 0} \end{aligned}$$

$f(x) = -3x^3 + 4x$