EXAMEN RESUELTO LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

1.- Comprueba la homogeneidad de las siguientes ecuaciones:

$$F=\frac{m\cdot v^2}{r}; \quad e=\frac{v^2}{2g}$$

Una ecuación física es homogénea cuando todos sus términos tienen la misma dimensión. Para que una fórmula física sea correcta es necesario que sea homogénea. En ambas ecuaciones, cada miembro de la igualdad tiene un solo término.

Determinamos la homogeneidad de la primera ecuación:

$$[F]=\left[\frac{m\cdot v^2}{r}\right]$$

$$[F]=MLT^{-2}$$

$$\left[\frac{m\cdot v^2}{r}\right]=\frac{M\cdot L^2T^{-2}}{L}=MLT^{-2}$$

Luego la primera ecuación es homogénea.

Determinamos la homogeneidad de la segunda ecuación

$$[e]=\left[\frac{v^2}{2g}\right]$$

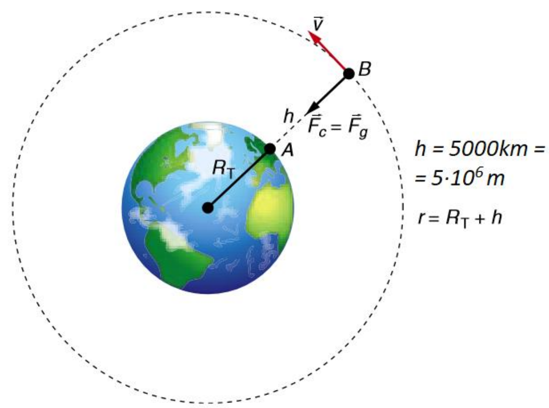
$$[e]=L$$

$$\left[\frac{v^2}{2g}\right]=\frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}}=L$$ (El 2 es adimensional, por eso no aparece en la resolución)

Luego la segunda ecuación también es homogénea.

2.- Un satélite orbita alrededor de la Tierra con órbita circular, a 5000 km de la superficie. Calcula la velocidad con que se mueve en su órbita y el periodo del movimiento.

Datos: **Radio de la Tierra = 6370 km**
Masa de la Tierra = 5,98 · 10^{24} kg
G = 6,67 · 10^{-11} U.I.



La fuerza centrípeta que hace que el satélite gire es, precisamente, la fuerza gravitatoria:

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M_T m}{r^2}=m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_c=\sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

$$v_c=\sqrt{\frac{GM_T}{r}}=\sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}M}{(6370+5000)\cdot 10^3}}=5923\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

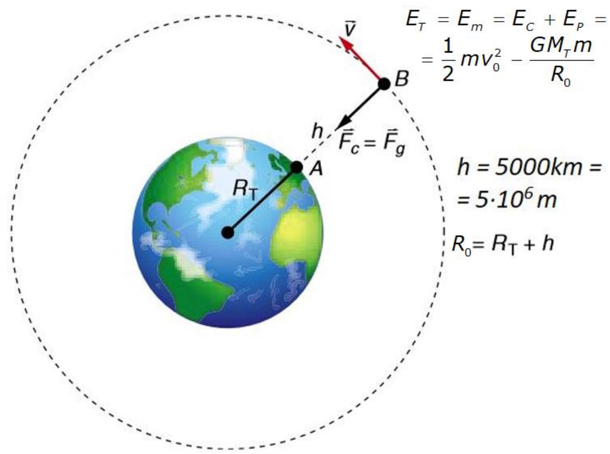
Para calcular el periodo del movimiento, despejamos esta magnitud a partir del valor de la velocidad:

$$v=\frac{2\pi\left(R_T+\ \right)}{T}$$

$$T=\frac{2\pi\left(R_T+h\right)}{v}=\frac{6,28\cdot\left(6,37\cdot 10^6+5\cdot 10^6\right)m}{5923\,\frac{m}{s}}=1,21\cdot 10^4 s=3,35h=3h+21\,\mathrm{min}$$

3.- Un satélite de 30 toneladas orbita alrededor de la Tierra con órbita circular, a 5000 km de la superficie. Calcula la energía total que posee el satélite.

Datos: **Radio de la Tierra = 6 370 km**
Masa de la Tierra = 5,98 · 10^{24} kg
G = 6,67 · 10^{-11} U.I.



La energía total que posee el satélite es la energía mecánica, es decir, la suma de la energía cinética más la energía potencial:

$$E_T = E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_Tm}{R_0}$$

Teniendo en cuenta que la fuerza centrípeta que hace que el satélite gire es, precisamente, la fuerza gravitatoria, podemos determinar la velocidad del satélite en su órbita al cuadrado (v_O^2):

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M\ m}{R_0^2} = m\frac{v_O^{\ 2}}{R_0} \quad \Rightarrow \quad v_O^{\ 2} = \frac{GM_T}{R_0}$$

Por lo que:

$$E_m = \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R_0} - \frac{GM_Tm}{R_0} = -\frac{1}{2}\frac{GM_Tm}{R_0} = -\frac{1}{2}\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\cdot 30\cdot 10^3}{(6370+5000)\cdot 10^3} = -5,26\cdot 10^{11}\,\mathrm{J}$$

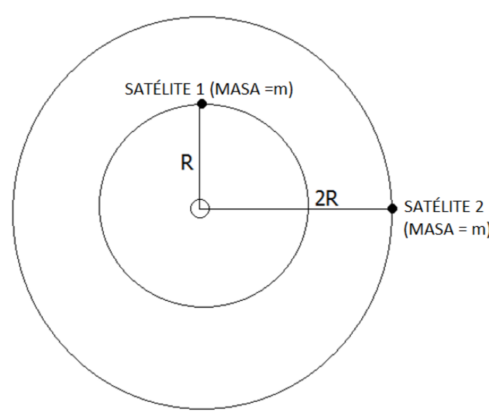
(Cabría decir que la energía total que posee un satélite en órbita alrededor de la Tierra es su energía mecánica y que en el caso de órbitas circulares, la energía mecánica es igual a la mitad de la energía potencial, y a partir de aquí realizar los cálculos efectuados en la última línea).

4.- Dos satélites de igual masa que giran en torno al mismo planeta, están en órbitas de radio R y 2R respectivamente.

a) ¿Cuál de los dos tiene más velocidad? ¿Cuál es la relación entre ambas velocidades?

b) ¿Si las masas fueran distintas, influirían en sus velocidades?

c) ¿Qué trabajo habría que realizar para llevar al primer satélite hasta la órbita del segundo?



a) Al tratarse de órbitas circulares, en ambos casos, la fuerza centrípeta coincide con la fuerza gravitatoria, por lo que:

$$v_{O1} = \sqrt{\frac{GM_P}{R}} \ \ \text{y} \ \ v_{O2} = \sqrt{\frac{GM_P}{2R}}$$

Y de aquí deducimos que:

$$v_{O2} = \frac{v_{O1}}{\sqrt{2}}$$

Lo que implica que la velocidad del satélite de radio de órbita R (v_{O1}) es mayor que la velocidad del satélite de radio de órbita 2R (v_{O2})

b) Como observamos por las fórmulas deducidas de las velocidades las masas de los satélites no influyen.

c) El trabajo realizado es igual a la variación de la energía mecánica entre ambas orbitas.

Como en las órbitas circulares la energía mecánica es:

$$E_m = E_C + E_P = \frac{E_P}{2} \Rightarrow W_{1\to 2} = E_{m2} - E_{m1} = -\frac{1}{2}\frac{GM_pm}{2R} - \left(-\frac{1}{2}\frac{GM_pm}{R}\right) = \frac{1}{2}\frac{GM_pm}{R} - \frac{1}{2}\frac{GM_pm}{2R}$$

$$= \frac{1}{2}GM_pm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{1}{2}GM_pm\left(\frac{2}{2R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{1}{2}GM_pm \cdot \frac{1}{2R} = \frac{1}{4}\frac{GM_pm}{R}$$

Por lo tanto:

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{4}\frac{GM_pm}{R}$$

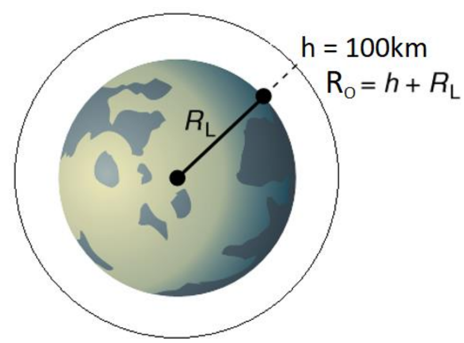
Siendo R el radio de la órbita del primer satélite.

5.- La nave espacial Lunar Prospector permanece en órbita circular alrededor de la luna a una altura de 100km sobre su superficie. Determina:

a) La velocidad lineal de la nave y el periodo del movimiento.

b) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.

Datos: Radio medio de la Luna = 1740 km
Masa de la Luna = 7,36 · 10^{22} kg
G = 6,67 · 10^{-11} U.I.



a)

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M_L m_S}{R_0^2} = m_s\frac{v^2}{R_0}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_L}{R_0}} = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 7,36\cdot 10^{22}}{(1740+100)\cdot 10^3}} = 1633,4\,\frac{m}{s}$$

$$T = \frac{2\pi R_0}{v} = \frac{2\pi(1740+100)\cdot 10^3}{1633,4} = 7077,9\text{ s} = 1\text{h }58\text{min}$$

b) Para que se pueda desligar del campo gravitatorio lunar necesita al menos una velocidad que haga que la energía mecánica sea cero (velocidad de escape):

$$\frac{1}{2}mv_{eh}^2 - \frac{GM_Lm}{R_L+h} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{eh} = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L+h}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 7,36\cdot 10^{22}}{(1740+100)\cdot 10^3}} = 2310\,\frac{m}{s}$$

6.- El periodo de revolución de Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su respectiva órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determina:

a) La razón entre los radios de las respectivas órbitas.

b) La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus órbitas.

a) De la Tercera Ley de Kepler se deduce la relación entre los radios de las dos orbitas:

$$\frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{R_J^3}{R_T^3} \Rightarrow \frac{R_J}{R_T} = \sqrt[3]{\frac{T_J^2}{T_T^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_J}{T_T}\right)^2} = \sqrt[3]{12^2} = 5,2$$

Podemos dar la solución de dos formas:

$$\frac{R_J}{R_T} = 5,2 \Rightarrow R_J = 5,2\,R_T$$

b) Para hallar la aceleración centrípeta de los dos planetas, igualamos la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$

De acuerdo con esta igualdad, la aceleración centrípeta de cada planeta es:

$$\left.\begin{array}{l} a_J = \dfrac{v_J^2}{R_J} = G\dfrac{M_S}{R_J^2} \\ a_T = \dfrac{v_T^2}{R_T} = G\dfrac{M_S}{R_T^2} \end{array}\right\} \textit{cuya relación viene dada por}: \frac{a_J}{a_T} = \frac{R_T^2}{R_J^2} = \frac{R_T^2}{(5,22R_T)^2} = \frac{1}{5,22^2} = \frac{1}{27} = 0,04$$

Podemos dar la solución de dos formas: $\dfrac{a_J}{a_T} = 0,04 \Rightarrow a_J = 0,04a_T$

7.- Un objeto de 150 kg se lanza de manera vertical hasta una altura de 400 km desde un punto de la superficie terrestre.

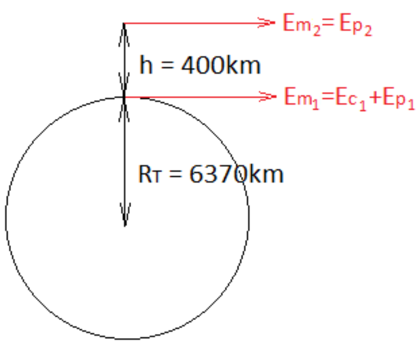
a) Determina la velocidad de lanzamiento.

b) Calcula la energía potencial que tiene el objeto a esa altura.

c) Si el objeto lanzado hasta esa altura fuera un satélite, una vez que se encuentra a 400 km, ¿qué energía adicional habrá que comunicarle para ponerlo en órbita circular alrededor de la Tierra?

d) ¿Cuál es la velocidad y el periodo del satélite en esa órbita?

Datos: G = 6,67 · 10⁻¹¹ U.I.
Radio de la Tierra = 6 370 km
Masa de la Tierra = 5,98 · 10²⁴ kg



a) Aplicamos el principio de conservación de la energía. La energía mecánica se mantiene: al ascender, la energía cinética que se le comunica al objeto en el lanzamiento se va convirtiendo en energía potencial hasta que la energía cinética se hace 0, es decir hasta que el objeto se para (eso significa que la velocidad es 0).

Si llamamos Em_1 a la energía mecánica que el objeto tiene al lanzarlo, y llamamos Em_2 a la energía mecánica que el objeto tiene al final (altura máxima: 400km), se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} Em_1 = \dfrac{1}{2}m_O \cdot v^2 - \dfrac{GM_Tm_O}{R_T} \\ Em_2 = -\dfrac{GM_Tm_O}{R_T + h} \end{array}\right\} Em_1 = Em_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_O \cdot v^2 - \frac{GM_Tm_O}{R_T} = -\frac{GM_Tm_O}{R_T + h}$$

$$\frac{1}{2}m_O \cdot v^2 = \frac{GM_Tm_O}{R_T} - \frac{GM_Tm_O}{R_T + h} = GM_Tm_O\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$$\frac{1}{2}v^2 = GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$$v^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$$v = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)} = \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}\left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{1}{6,37 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5}\right)}$$

$$v = 2720,16\,\frac{m}{s}$$

b)

$$E_P = -\frac{GM_T m_O}{R_T + h} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 150}{6,37 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 150}{6,77 \cdot 10^6} = -8,84 \cdot 10^9 J$$

c) Una vez que ha llegado a esa altura hay que comunicarle la velocidad horizontal que le permita mantenerse en esa órbita estable con el radio correspondiente (R_T + h). Por tanto hay que calcular la energía cinética (1/2 m v^2 o también –E_p/2) para una órbita circular estable:

$$E_C = -\frac{1}{2} E_P = \frac{1}{2} \frac{GM_T m_O}{R_T + h} = \frac{1}{2} 8,84 \cdot 10^9 J = 4,42 \cdot 10^9 J$$

(Hay que darse cuenta que en el apartado anterior ya habíamos calculado precisamente la energía potencial a esa altura)

d)

De $F_g = F_c$ hemos calculado en muchas ocasiones la velocidad en una órbita circular:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,77 \cdot 10^6}} = 7675,72 \frac{m}{s}$$

Y para calcular el periodo:

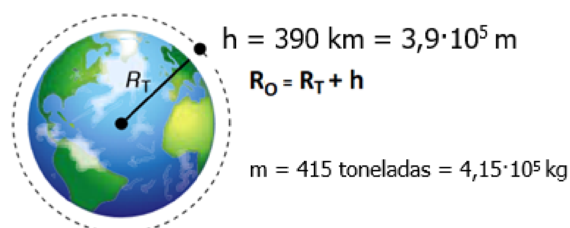
$$\text{Como } v = \frac{2\ \ (R_T\ \ \ h)}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi (R_T + h)}{v} = 5541,78s = 1,54h \approx 1h\ 32min$$

8.- La Estación Espacial Internacional (ISS) describe alrededor de la Tierra una órbita prácticamente circular a una altura h = 390 km sobre la superficie terrestre, siendo su masa m = 415 toneladas. Calcula:

a) Su período de rotación en minutos.

b) El trabajo necesario para llevarla a una órbita de altura doble a la que tiene y orbite en ella de forma estable.

Datos: Radio de la Tierra = 6 370 km
Masa de la Tierra = 5,98 · 10^{24} kg
G = 6,67 · 10^{-11} U.I.



$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \Rightarrow G\frac{M_T m}{R_O^2} = m\frac{v^2}{R_O} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_O}}$$

a) El periodo lo deducimos de la fórmula de la velocidad:

$$v = \frac{2\pi R_O}{T} \Rightarrow T = \frac{2\ \ R_O}{v}$$

Como desconocemos el valor de la velocidad orbital, lo deducimos aplicando la equivalencia entre la fuerza gravitatoria y la fuerza centrípeta:

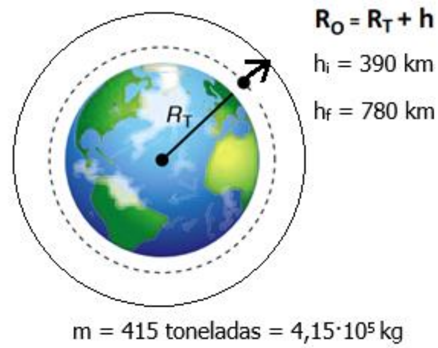
$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \Rightarrow G\frac{M_T m}{R_O^2} = m\frac{v^2}{R_O} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_O}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 0,39 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,76 \cdot 10^6}} = 7681 \frac{m}{s}$$

Una vez calculada la velocidad orbital calculamos el valor del periodo:

$$T = \frac{2\pi R_O}{v} = \frac{2\pi \cdot (6,37 \cdot 10^6 + 0,39 \cdot 10^6)}{7681} = \frac{2\pi \cdot 6,76 \cdot 10^6}{7681} = 5529,79s = 92,16\,min$$

b) El trabajo realizado es igual a la variación de la energía mecánica entre ambas orbitas.



ENERGÍA MECÁNICA DE LA ISS EN LA ÓRBITA INICIAL:

$$Em_i = Ec_i + Ep_i = \frac{Ep_i}{2} = -\frac{}{2}\frac{GM_Tm}{R_{Oi}} = -\frac{1}{2}\frac{GM_Tm}{R_T + h_i}$$

ENERGÍA MECÁNICA DE LA ISS EN LA ÓRBITA FINAL:

$$Em_f = Ec_f + Ep_f = \frac{Ep_f}{2} = -\frac{}{2}\frac{GM_Tm}{R_{Of}} = -\frac{1}{2}\frac{GM_Tm}{R_T + h_f}$$

TRABAJO NECESARIO PARA TRASLADAR LA ISS DE UNA ÓRBITA A OTRA:

$$W_{i\to f} = Em_f - Em_i = -\frac{1}{2}\frac{GM_Tm}{R_T + h_f} - \left(-\frac{1}{2}\frac{GM_Tm}{R_T + h_i}\right) = \frac{1}{2}\frac{GM_Tm}{R_T + h_i} - \frac{1}{2}\frac{GM_Tm}{R_T + h_f} = \frac{1}{2}GM_Tm\left(\frac{1}{R_T + h_i} - \frac{1}{R_T + h_f}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\cdot 4,15\cdot 10^{5}\cdot\left(\frac{1}{6,76\ \ 10^{6}} - \frac{1}{7,15\cdot 10^{6}}\right) = 6,62\cdot 10^{11}\,\mathrm{J}$$