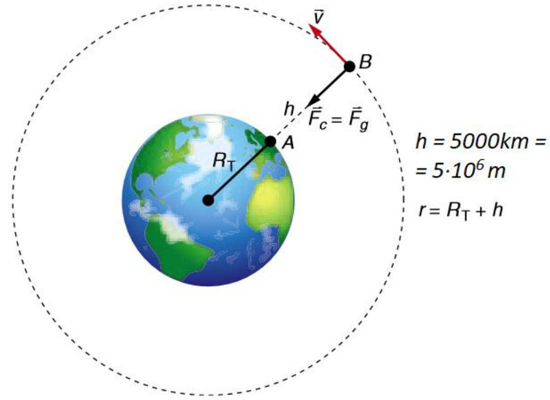
1.- Un satélite orbita alrededor de la Tierra, a 5000 km de la superficie. Calcula la velocidad con que se mueve en su órbita.

Datos: Radio de la Tierra = 6 370 km
Masa de la Tierra = 5,98 · 10^{24} kg
G = 6,67 · 10^{-11} U.I.

Utilizamos la equivalencia entre la fuerza de la gravedad y la fuerza centrípeta para determinar el valor de la velocidad:

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_c = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$



En este caso la distancia r es la suma del radio de la tierra más la altura a la que se mueve el satélite

$$r = R_T + h$$

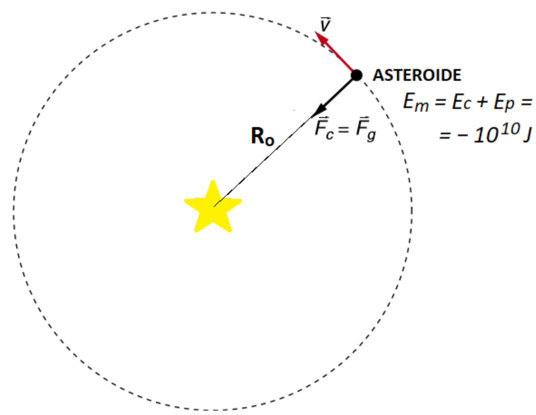
$$v_c = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

Sustituimos los valores conocidos, escribiéndolos en unidades del S.I.:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \;\; 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{3{,}989 \cdot 10^{14}}{1{,}137 \cdot 10^7}} = 5923\,\frac{m}{s}$$

2.- Un asteroide está situado en una órbita circular alrededor de una estrella y tiene una energía total de -10^{10} J. Determina:
a) La relación que existe entre las energías potencial y cinética del asteroide.
b) Los valores de ambas energías potencial y cinética.

a) La energía potencial tiene como valor: $E_p = -G\dfrac{Mm}{R_O}$



Y la energía cinética: $E_c = \dfrac{1}{2} m \cdot v^2$

Al ser circular la órbita se cumple que la fuerza gravitatoria es igual a la fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M_T m}{R_O{}^2} = m\frac{v^2}{R_O} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_T}{R_O}$$

Utilizamos el valor obtenido de v^2 en la fórmula de la energía cinética y el valor obtenido lo comparamos con el valor de la energía potencial:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{GM}{R_O} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{R_O} = -\frac{1}{2}E_P \Rightarrow E_c = -\frac{1}{2}E_P$$

b) La energía total es igual a la energía mecánica: $E_m = E_c + E_p = -\dfrac{1}{2}E_p + E_p = \dfrac{1}{2}E_p$

De aquí deducimos el valor de la energía potencial: $-10^{10}\text{J} = \dfrac{1}{2}E_p \Rightarrow E_p = -2 \cdot 10^{10}\text{J}$

y el de la energía cinética:

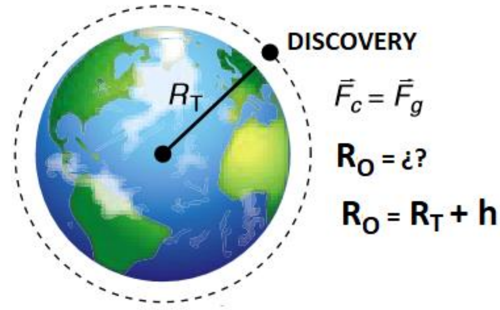
$$E_c = -\frac{1}{2}E_P = -\frac{1}{2}\left(-2 \cdot 10^{10}\text{J}\right) = 10^{10}\text{J}$$

3.- La nave espacial *Discovery*, lanzada en octubre de 1998, describía en torno a la Tierra una órbita circular con una velocidad de 7,62 km/s.

a) ¿A qué altura se encontraba?

b) ¿Cuál era su periodo? ¿Cuántos amaneceres contemplaban cada 24 h los astronautas que viajaban en el interior de la nave?

Datos: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,370$ km.



a) De la equivalencia entre la fuerza gravitatoria y la fuerza centrípeta deducimos el valor de la velocidad al cuadrado:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \Rightarrow G\frac{Mm}{R_0^2} = m\frac{v^2}{R_0} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{R_0} = \frac{GM}{R_T + h}$$

De ello deducimos el valor de $R_T + h$:

$$R_T + h = \frac{GM}{v^2}$$

Y de aquí el valor de la altura:

$$h = \frac{GM}{v^2} - R_T = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{\left(7,62 \cdot 10^3\right)^2} - 6,37 \cdot 10^6 = 5,0 \cdot 10^5 m$$

$$h = 5,0 \cdot 10^5 m = 500 km$$

b) El periodo viene dado por:

$$T = \frac{2\pi\left(R_T + h\right)}{v} = \frac{6,28 \cdot 6,87 \cdot 10^6 m}{7,62 \cdot 10^3 \frac{m}{s}} = 5,66 \cdot 10^3 s = 1,57 h$$

Y para saber el número de vueltas a la Tierra dados en 24 horas:

$$\text{n} = \frac{24}{1,57} = 15,3 \text{ amaneceres}$$

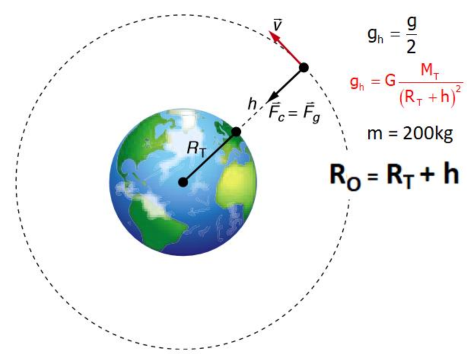
Algunos días verían 15 amaneceres y algún día 16.

4.- Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, averigua:

a) La velocidad del satélite.

b) Su energía mecánica.

Dato: Radio medio de la Tierra, $6{,}37 \cdot 10^6$ m.



a) De la equivalencia entre la fuerza gravitatoria y la fuerza centrípeta deducimos el valor de la velocidad:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \Rightarrow G\frac{M_T m}{R_0^2} = m\frac{v^2}{R_0} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_T}{R_0} = \frac{GM_T}{R_T + h} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

Como los datos que nos dan son la relación entre las aceleraciones de la gravedad y el radio de la Tierra, tenemos que conseguir relacionarlos para que el valor de la velocidad dependa solo de ellos. Es decir conseguir que M_T y h no figuren en la fórmula de la velocidad. Para ello relacionamos los dos valores de la gravedad.

Valor de la gravedad a una altura h:

$$\left.\begin{array}{l} F = G\dfrac{M_T m}{(R_T+h)^2} \\ F = mg_h \end{array}\right\} \text{Por lo que: } G\frac{M_T m}{(R_T+h)^2} = mg_h \Rightarrow g_h = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$$

Valor de la gravedad en la superficie:

$$\left.\begin{array}{l} F = G\dfrac{M_T m}{R_T^2} \\ F = mg \end{array}\right\} \text{Por lo que: } G\frac{M_T m}{R_T^2} = mg \Rightarrow g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\text{Como } g_h = \frac{g}{2} \Rightarrow \frac{g}{2} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow g = 2G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} g = 2G\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2} \\ g = G\dfrac{M_T}{R_T^2} \end{array}\right\} \Rightarrow 2G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow 2R_T^2 = (R_T+h)^2 \Rightarrow R_T + h = \sqrt{2}\cdot R_T$$

$$\text{Y además: } \quad g = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow GM_T = gR_T^2$$

$$\text{De donde: } \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gR_T^2}{\sqrt{2}R_T}} = \sqrt{\frac{gR_T}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{9,8\cdot 6,37\cdot 10^6}{\sqrt{2}}} = 6,64\cdot 10^3\ \frac{m}{s}$$

b) La energía mecánica es:

$$E_m = E_C + E_P = \frac{E_P}{2} \Rightarrow E_m = -\frac{1}{2}\cdot\frac{GM_T m}{(R_T+h)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{gR_T^2 m}{\sqrt{2}\cdot R_T} \Rightarrow E_m = -\frac{1}{2}\cdot\frac{gR_T m}{\sqrt{2}}$$

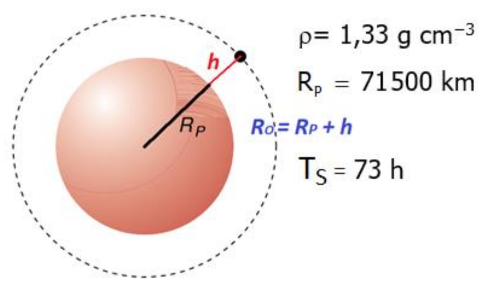
$$E_m = -\frac{1}{2}\cdot\frac{gR_T m}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{9,8\cdot 6,37\cdot 10^6\cdot 200}{\sqrt{2}} = -4,41\cdot 10^9\,J$$

5.- Un planeta esférico tiene una densidad uniforme ρ= 1,33 g cm⁻³ y un radio de 71 500 km. Determina:

a) El valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.

b) La velocidad de un satélite que orbita alrededor del planeta en una órbita circular con periodo de 73 h.

Dato: Constante de gravitación universal *G* = 6,67 · 10⁻¹¹ U.I.



a) La aceleración de la gravedad es:

$$\left.\begin{array}{l} F = G\dfrac{M_P m}{R_P^2} \\ F = mg_P \end{array}\right\} \text{Por lo que: } G\frac{M_P m}{R_P^2} = mg_P \Rightarrow g_P = G\frac{M_P}{R_P^2}$$

Como $\mathbf{M_P = \rho \cdot V_P}$ y el volumen es el de una esfera: $\mathbf{V_P = 4/3\,\pi R_P^3}$

Nos queda:

$$g_P = G\frac{{}_P}{R_P^2} = G\frac{\rho V_P}{R_P^2} = G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R_P^3}{R_P^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho R_P = 26,57\ \frac{m}{s^2}$$

b) De la equivalencia entre la fuerza gravitatoria y la fuerza centrípeta deducimos el valor de la velocidad:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \Rightarrow G\frac{M_P m}{R_0^2} = m\frac{v^2}{R_0} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_P}{R_0} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_P}{R_0}}$$

Necesitamos conocer $G\cdot M_P$ y R_O.

Dado que $g_P = G\dfrac{M_P}{R_P^2} \Rightarrow GM_P = g_P R_P^2$

Y como ya conocemos el valor de g_P y de R_P, solo nos queda conocer el radio de la órbita.

$$\text{Como } v = \frac{2\pi R_0}{T} \Rightarrow R_0 = \frac{v \cdot T}{2\pi}$$

Por lo que:

$$v = \sqrt{\frac{GM_P}{R_0}} = \sqrt{\frac{g_P \cdot R_P{}^2}{\frac{v \cdot T}{2\pi}}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot g_P \cdot R_P{}^2}{v \cdot T}}$$

$$\text{Elevando al cuadrado}: v^2 = \frac{2\pi \cdot g_P \cdot R_P{}^2}{v \cdot T} \Rightarrow v^3 = \frac{2\pi \cdot g_P \cdot R_P{}^2}{T}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 26{,}57 \cdot (7{,}15 \cdot 10^7)^2}{73 \cdot 3600}} = 1{,}48 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

6,- El radio de la órbita lunar es $R_{0L} = 3{,}84 \cdot 10^8$m, y el periodo de revolución lunar es de 27,32 días.

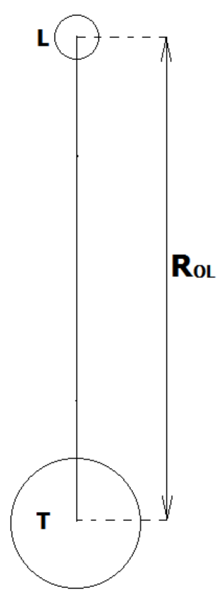
a) Con todos los datos que se facilitan calcula el valor de G, la constante de gravitación universal.

b) Halla la fuerza que ejercen mutuamente la Luna sobre la Tierra y la Tierra sobre la Luna.

c) Indica cuál será la relación entre las fuerzas debidas a la Tierra y a la Luna en un satélite que se sitúa entre ellas a una distancia de la Tierra de $R_{0L}/4$.

Datos: Radio de la Tierra = 6 370 km
Masa de la Tierra = $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
Radio de la Luna = 1 740 km
Masa de la Luna = $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg

a) Al decirnos el problema que la Luna orbita en torno a la Tierra con un RADIO determinado, nos está indicando que nos encontramos ante un movimiento circular uniforme con una órbita estable.



La fuerza que mantiene el movimiento circular (la fuerza centrípeta) es la fuerza gravitatoria:

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M_T m_L}{R_{0L}{}^2} = m_L \frac{v^2}{R_{0L}}$$

Como nos piden que calculemos G, lo único que tenemos que hacer es... despejar G:

$$G\frac{M_T m_L}{R_{0L}{}^2} = m_L \frac{v^2}{R_{0L}} \Rightarrow G = m_L \frac{v^2 R_{0L}{}^2}{M_T m_L R_{0L}} \Rightarrow G = \frac{v^2 R_{0L}}{M_T}$$

Conocemos todos los datos excepto el de la velocidad. Pero nos dan el periodo de la luna y sabemos que:

$$v = \frac{2\pi R_{0L}}{T}$$

Y como en la fórmula obtenida la velocidad está al cuadrado:

$$v^2 = \frac{4\pi^2 R_{0L}{}^2}{T^2}$$

Solo tenemos que sustituir:

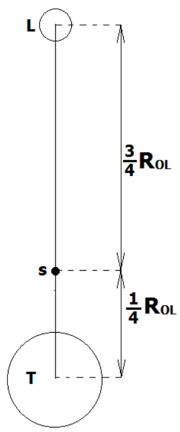
$$G = \frac{\frac{4\pi^2 R_{0L}{}^2}{T^2} R_{0L}}{M_T} \Rightarrow G = \frac{4\pi^2 R_{0L}{}^3}{M_T T^2}$$

$$G = \frac{4\pi^2 R_{0L}{}^3}{M_T T^2} = \frac{4\pi^2 (3{,}84 \cdot 10^8)^3}{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot (27{,}32 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

b) La fuerza de atracción entre dos cuerpos ¡es mutua! y evidentemente es la misma (¡misma fórmula, mismas masas, misma distancia!: ¡son los mismos cuerpos!), y esa fuerza es... ¡la fuerza gravitatoria!:

$$F_g = G\frac{M_T m_L}{{R_{0L}}^2} \quad \Rightarrow \quad F_g = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{\left(3{,}84 \cdot 10^{8}\right)^2} = 1{,}997 \cdot 10^{20}\,N$$

c)



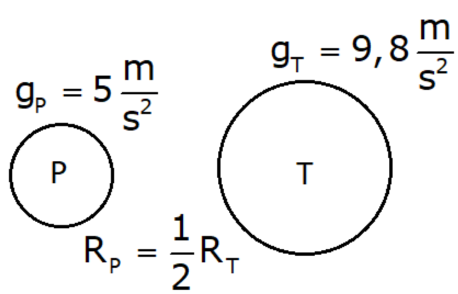
Como es una pregunta comparativa, calculamos la fuerza de la Tierra (F_T) sobre el satélite de masa m_S, luego la fuerza de la luna (F_L) sobre el mismo satélite (¡de masa m_S!) y a continuación hacemos la relación:

$$\left.\begin{array}{l} F_T = G\dfrac{M_T m_S}{d^2_{T\to S}} = G\dfrac{M_T m_S}{\left(\frac{1}{4}R_{OL}\right)^2} \\[2ex] F_L = G\dfrac{M_L m_S}{d^2_{L\to S}} = G\dfrac{M_L m_S}{\left(\frac{3}{4}R_{OL}\right)^2} \end{array}\right\} \frac{F_T}{F_L} = \frac{G\dfrac{M_T m_S}{\frac{1}{4}{R_{OL}}^2}}{G\dfrac{M_L m_S}{\frac{3}{4}{R_{OL}}^2}} = \frac{GM_T m_S\left(\frac{3}{4}R_{OL}\right)^2}{GM_L m_S\left(\frac{1}{4}R_{OL}\right)^2} = \frac{M_T \cdot 9{R_{OL}}^2}{M_L \cdot {R_{OL}}^2} = \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 9}{7{,}35 \cdot 10^{22}} = 732{,}2$$

Luego:

$F_T = 732{,}2F_L$

7.- La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta es 5 m/s^2. Si su radio es igual a la mitad del radio terrestre, calcula la relación de la masa de ese planeta con la masa de la Tierra. Toma como dato: aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra 9,8 m/s^2.



Llamamos fuerza de la gravedad a la fuerza de atracción que se ejercen dos cuerpos por el hecho de tener masa.

Llamamos peso a la fuerza de atracción que se ejercen un planeta y un objeto por el hecho de tener masa. Podemos decir que es un caso particular de la fuerza de la gravedad.

El valor de la fuerza de la gravedad viene dado por la fórmula de la gravitación universal, entre un planeta y un objeto, en la superficie del planeta:

$$F = G\frac{M_P \cdot m}{{R_P}^2}$$

El valor del peso lo podemos calcular a partir de la segunda Ley de Newton:

$$F = m \cdot g_P$$

Siendo g_P el valor de la aceleración de la gravedad en el punto medido.

Al ser ambos valores el mismo, si los igualamos podemos relacionar la aceleración de la gravedad, la masa del planeta y la distancia entre el punto considerado y el centro del planeta (si es en la superficie del planeta esa distancia es el radio del planeta) (Repasa el ejercicio 4 de esta segunda tanda de ejercicios propuestos):

$$\left.\begin{array}{l} F = G\dfrac{M_P m}{R_P{}^2} \\ F = m g_P \end{array}\right\} \text{Por lo que: } G\frac{M_P m}{R_P{}^2} = m g_P \quad \Rightarrow \quad g_P = G\frac{M_P}{R_P{}^2}$$

En el enunciado nos piden calcular la relación entre la masa del planeta y la masa de la Tierra. Conocemos el valor de g en la superficie de los dos planetas y la relación entre los radios de ambos planetas, lo que nos va a permitir por simple relación entre las aceleraciones de la gravedad conocer la relación entre las masas.

DATOS:

$$R_P = \frac{1}{2} R_T$$

$$g_P = 5 \frac{m}{s^2}$$

$$g_T = 9{,}8 \frac{m}{s^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_P = G\dfrac{M_P}{R_P{}^2} \\ g_T = G\dfrac{M_T}{R_T{}^2} \end{array}\right\} \frac{g_P}{g_T} = \frac{G\dfrac{M_P}{R_P{}^2}}{G\dfrac{M_T}{R_T{}^2}} = \frac{G \cdot M_P \cdot R_T{}^2}{G \cdot M_T \cdot R_P{}^2} \Rightarrow \frac{M_P \cdot R_T{}^2}{M_T \cdot R_P{}^2} = \frac{g_P}{g_T} \Rightarrow \frac{M_P}{M_T} = \frac{g_P \cdot R_P{}^2}{g_T \cdot R_T{}^2}$$

$$\frac{M_P}{M_T} = \frac{g_P \cdot R_P{}^2}{g_T \cdot R_T{}^2} = \frac{g_P \cdot \left(\dfrac{R_T}{2}\right)^2}{g_T \cdot R_T{}^2} = \frac{5 \cdot \dfrac{R_T{}^2}{4}}{9{,}8 \cdot R_T{}^2} = \frac{5}{9{,}8 \cdot 4} = \frac{5}{39{,}2}$$

$$\frac{M_P}{M_T} = \frac{5}{39{,}2} = 0{,}128$$

$$M_P = 0{,}128 \cdot M_T$$

8.- Se lanza un proyectil verticalmente desde la superficie de la Tierra, con una velocidad inicial de 3 km/s.

a) ¿Qué altura máxima alcanzará?

b) Calcula la velocidad orbital que habrá que comunicarle a esa altura para que describa una órbita circular.

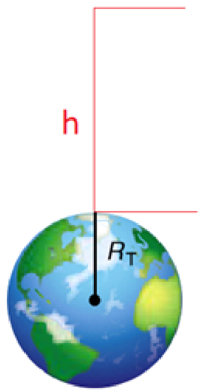
Datos: **Radio de la Tierra = 6 370 km**
Masa de la Tierra = 5,98 · 10^{24} kg
G = 6,67 · 10^{-11} U.I.

a) Siempre que trabajemos con lanzamientos tenemos que utilizar el teorema de la conservación de la energía mecánica: Una vez impulsado el objeto, la energía mecánica se conserva sea cual sea la altura dónde se encuentre el objeto.

La energía mecánica es la suma de la energía cinética más la energía potencial.

La velocidad del objeto va disminuyendo (disminuye la energía cinética) a medida que coge altura (aumenta la energía potencial), y así hasta que la velocidad sea cero (es decir se detiene y la energía cinética es cero) que corresponde al punto más alto al que puede llegar.

Por tanto hacemos el esquema y anotamos los datos que nos dan:



$$E_{mh} = 0 - \frac{GM_T m}{R_T + h}$$

$$E_{m0} = E_{mh}$$

$$E_{m0} = \frac{1}{2} m \cdot v_L^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

$V_L = 3$ km/s $= 3 \cdot 10^3$ m/s

$$\left.\begin{aligned} E_{m0} &= \frac{1}{2} m \cdot v_L^2 - \frac{GM_T m}{R_T} \\ E_{mh} &= 0 - \frac{GM_T m}{R_T + h} \end{aligned}\right\} E_{m0} = E_{mh} \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_L^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = 0 - \frac{GM_T m}{R_T + h}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_L^2 = \frac{GM_T m}{R_T} - \frac{GM_T m}{R_T + h} = GM_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right)$$

$$\frac{1}{2} v_L^2 = GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right)$$

$$\frac{v_L^2}{2GM_T} = \frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}$$

$$\frac{1}{R_T + h} = \frac{1}{R_T} - \frac{v_L^2}{2GM_T}$$

$$\frac{1}{R_T + h} = \frac{1}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{\left(3 \cdot 10^3\right)^2}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}$$

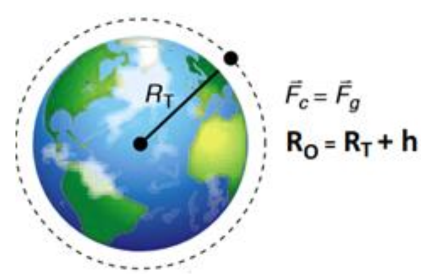
$$\frac{1}{R_T + h} = 1,570 \cdot 10^{-7} - 1,128 \cdot 10^{-8} = 1,4572 \cdot 10^{-7}$$

$$R_T + h = 6,862 \cdot 10^6$$

$$h = 6,862 \cdot 10^6 - R_T = 6,862 \cdot 10^6 - 6,370 \cdot 10^6$$

$$h = 0,492 \cdot 10^6 \text{m} = 4,92 \cdot 10^5 \text{m} = 492 \text{km}$$

b) Una vez que ha llegado a esa altura hay que comunicarle la velocidad horizontal que le permita mantenerse en esa órbita estable con el radio correspondiente ($R_O = R_T + h$). La fuerza centrípeta necesaria para que se mantenga en órbita es la fuerza gravitatoria, por lo que si igualamos las fórmulas de ambas fuerzas podremos despejar el valor de la velocidad y así calcular el dato que me pide el problema:



$$F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M_T m}{R_0^2} = m \frac{v_O^2}{R_0} \Rightarrow v_O^2 = \frac{GM_T}{R_0} \Rightarrow v_O = \sqrt{\frac{GM_T}{R_0}}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \; 5,98 \cdot 10^{24}}{6,370 \cdot 10^6 + 0,492 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,862 \cdot 10^6}} = 7624 \frac{m}{s}$$