CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade

Código: 40

CONVOCATORIA ORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 preguntas, **todas con la misma puntuación (3,33)**, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 3**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 3 primeras respondidas**.

PREGUNTA 1. Álgebra. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices $A+B$ y $3C-B$.

b) Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A+B=3C-B$ y resuélvalo.

PREGUNTA 2. Álgebra. Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.
b) Represente la región factible y calcule sus vértices.
c) Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

PREGUNTA 3. Análisis. El número de personas (en miles) que visitan cada año un parque temático viene dado por la función

$P(t)=\dfrac{180t}{t^2+9},\ t\geq 0$ en donde *t* es el tiempo transcurrido en años desde su apertura en el año 2010 $(t=0)$

a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.
b) ¿En qué año recibió el mayor número de visitantes? ¿A cuánto ascienden? Razone las respuestas.
c) ¿A partir de qué año el número de visitantes será inferior a 18000 personas? ¿Qué ocurrirá con el número de visitantes con el paso del tiempo? Razone las respuestas.

PREGUNTA 4. Análisis. Dada la función $f(x)=-4x^2+12x-5$

a) Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.
b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función *f(x)*, el eje *OX* y las rectas $x=1,\ x=2$.

PREGUNTA 5. Estadística y probabilidad. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)=0,4$ y $P(\overline{B})=0,7$ y $P(\overline{B}/A)=0,75$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P\left(A\cap\overline{B}\right)$; b) $P\left(A\cup B\right)$; c) $P\left(A\cap B\right)$; d) ¿son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta

PREGUNTA 6. Estadística y probabilidad. La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja se puede aproximar por una variable normal de media μ desconocida y desviación típica σ = 50 litros.

a) Determine el tamaño mínimo de muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95% tenga una amplitud a lo sumo de 8 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días, calcule la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas sea menor o igual a 930 litros si sabemos que μ = 950 litros.

.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. Álgebra. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices $A+B$ y $3C-B$.

b) Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A+B=3C-B$ y resuélvalo.

a)

$$A+B=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3C-B=3\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A+B=3C-B$$

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=3c-b \\ a-b=-9+b \\ a+3=3c-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+2b-3c=0 \\ a-2b \qquad =-9 \\ a \qquad -3c=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+2b-3c=0 \\ a \qquad =2b-9 \\ a \qquad -3c=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2b-9+2b-3c=0 \\ 2b-9-3c=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4b-3c=9 \\ 2b-3c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3c=4b-9 \\ 2b-3c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b-4b+9=3 \Rightarrow -2b=-6 \Rightarrow \boxed{b=3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3c=12-9 \\ a=6-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3c=3 \\ \boxed{a=-3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c=1}$$

La solución es $\boxed{a=-3; \quad b=3; \quad c=1}$

PREGUNTA 2. Álgebra. Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.
a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.
b) Represente la región factible y calcule sus vértices.
c) Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

a) Llamemos "x" al número de focos del tipo A e "y" al número de focos del tipo B.

"S*e producirán al menos 50 focos del modelo A*" → $x \geq 50$

"E*l número de focos del modelo B no superará las 300 unidades*" → $y \leq 300$

"S*e producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A*" → $y \geq x$

"L*a producción total no superará las 500 unidades diarias*" → $x + y \leq 500$

Además las cantidades deben ser positivas → $y \geq 0$

Las restricciones planteadas en el problema son:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \leq 300 \\ y \geq x \\ x + y \leq 500 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitarán la región factible.

$x = 50$

$x = 50$	y
50	0
50	100

$y = 300$

x	$y = 300$
0	300
100	300

$x + y = 500$

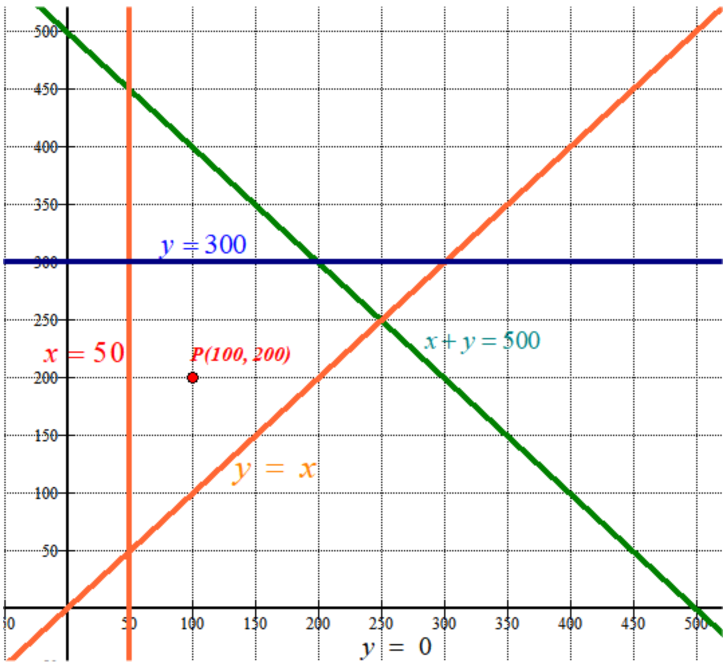
x	$y = 500 - x$
0	500
500	0

$y = x$

x	$y = x$
0	0
100	100

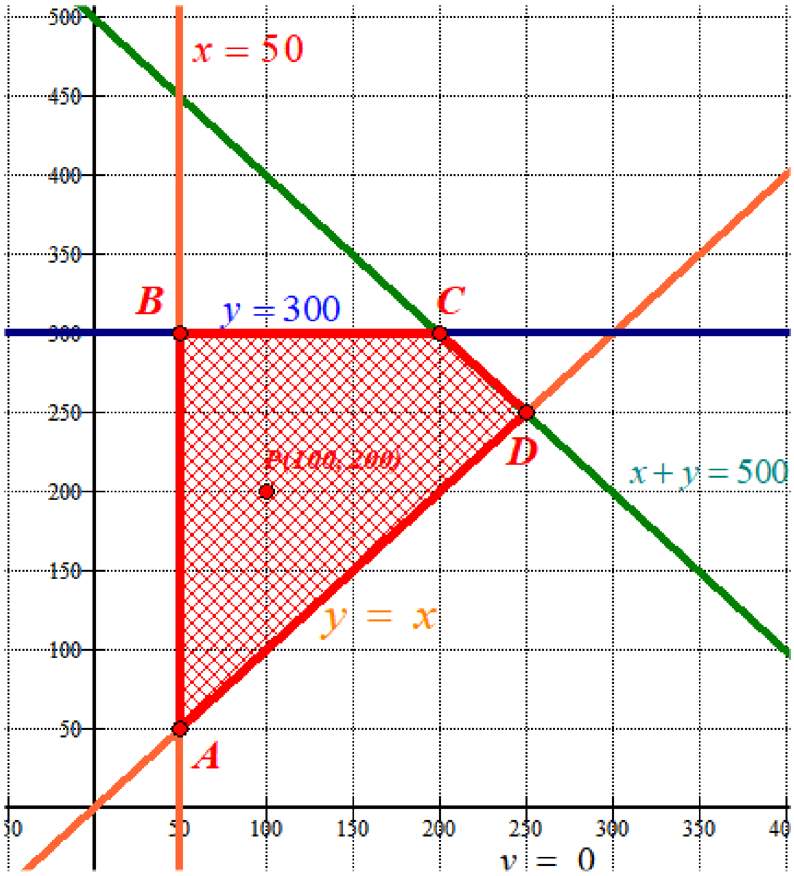
$y = 0$

x	$y = 0$
0	0
100	0



Probamos si el punto P(100, 200) cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 100 \geq 50 \\ 200 \leq 300 \\ 200 \geq 100 \\ 100+200 \leq 500 \\ 200 \geq 0 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas las restricciones, la región factible es la zona rayada.



Sus vértices tienen coordenadas: A(50,50), B(50, 300), C(200, 300) y D(250, 250).

c) La función beneficio es $B(x,y)=60x+40y$. La valoramos en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

A(50,50) → $B(50,50)=3000+2000=5000$

B(50, 300) → $B(50,300)=3000+12000=15000$

C(200, 300) → $B(200,300)=12000+12000=24000$

D(250, 250) → $B(250,250)=15000+10000=25000$

El máximo beneficio es de 25000 € y se obtiene produciendo 250 focos tipo A y otros 250 del tipo B.

PREGUNTA 3. Análisis. El número de personas (en miles) que visitan cada año un parque temático viene dado por la función

$P(t)=\frac{180t}{t^2+9}, t\geq 0$ en donde t es el tiempo transcurrido en años desde su apertura en el año 2010 $(t=0)$

a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.
b) ¿En qué año recibió el mayor número de visitantes? ¿A cuánto ascienden? Razone las respuestas.
c) ¿A partir de qué año el número de visitantes será inferior a 18000 personas? ¿Qué ocurrirá con el número de visitantes con el paso del tiempo? Razone las respuestas.

a)

$$P(t)=\frac{180t}{t^2+9} \Rightarrow P'(t)=\frac{180\left(t^2+9\right)-180t2t}{\left(t^2+9\right)^2}=\frac{180t^2+1620-360t^2}{\left(t^2+9\right)^2}$$

$$P'(t)=\frac{1620-180t^2}{\left(t^2+9\right)^2}$$

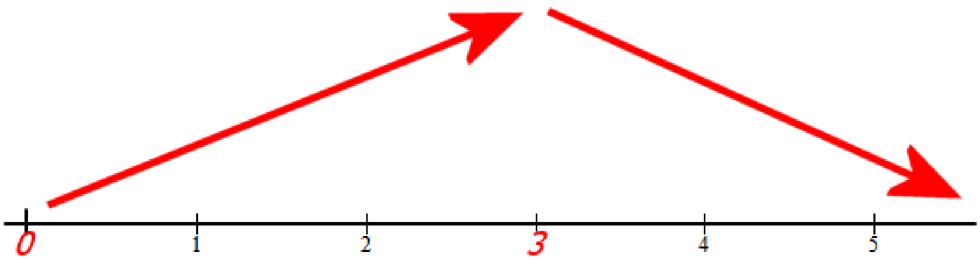
$$P'(t)=0 \Rightarrow \frac{1620-180t^2}{\left(t^2+9\right)^2}=0 \Rightarrow 1620-180t^2=0 \Rightarrow t^2=\frac{1620}{180}=9 \Rightarrow t=\sqrt{9}=\pm 3$$

Nos quedamos solo con el valor de $t=3$, pues el dominio de la función solo es $t\geq 0$.
Veamos cómo evoluciona la función antes y después de 3.

- En $(0,3)$ tomamos $t=1$ y la derivada vale $P'(1)=\frac{1620-180}{(1+9)^2}=1440>0$. La función crece en $(0,3)$.
- En $(3,+\infty)$ tomamos $t=4$ y la derivada vale $P'(4)=\frac{1620-180t^2}{\left(4^2+9\right)^2}=\frac{-1260}{25^2}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

El número de visitantes crece de 2010 a 2013 y disminuye del 2013 en adelante.

b) Por lo visto en el apartado anterior la función evoluciona como indica el esquema.



La función presenta un máximo relativo y absoluto en $t=3$.

$$P(3)=\frac{540}{3^2+9}=30$$

En el año 2013 recibió el máximo número de visitantes siendo esta cifra de 30000.

c) Como la función está expresada en miles nos piden averiguar cuando el valor de la función está por debajo de 18.

$$P(t) \le 18 \Rightarrow \frac{180t}{t^2+9} \le 18 \Rightarrow \frac{10t}{t^2+9} \le 1 \Rightarrow 10t \le t^2+9 \Rightarrow t^2-10t+9 \ge 0$$

$$\boxed{t^2-10t+9=0 \Rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{cases}\dfrac{10+8}{2}=9\\ \dfrac{10-8}{2}=1\end{cases}}$$

En los años 2011 ($t=1$) y 2019 ($t=9$) se tienen 18000 visitantes

Teniendo en cuenta como crece y decrece la función podemos decir que en 2010 el número de visitantes está por debajo de 18000 y del año 10 (2020) en adelante también.

Lo que ocurre a lo largo del tiempo es averiguar el valor del límite de la función cuando t se hace infinito.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{180t}{t^2+9} = \lim_{t\to+\infty} \frac{180t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{180}{t} = \frac{180}{\infty} = 0$$

Los visitantes dejan de ir al parque temático.

PREGUNTA 4. Análisis. Dada la función $f(x) = -4x^2 + 12x - 5$

a) Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función *f(x)*, el eje *OX* y las rectas $x = 1$, $x = 2$.

a) **Puntos de corte**.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -5 \Rightarrow P(0, -5)$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -4x^2 + 12x - 5 \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 80}}{-8} = \frac{-12 \pm 8}{-8} = \begin{cases} \dfrac{-12+8}{-8} = 0.5 = x \\ \dfrac{-12-8}{-8} = 2.5 = x \end{cases}$$

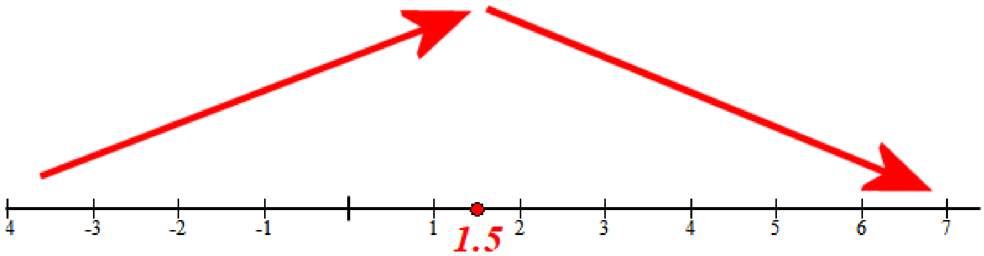
$Q(0.5, 0)$ *y* $R(2.5, 0)$

Monotonía.

$$f(x) = -4x^2 + 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = -8x + 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -8x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{8} = 1.5$$

- En $(-\infty, 1.5)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 12 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1.5)$.
- En $(1.5, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = -16 + 12 = -4 < 0$. La función decrece en $(1.5, +\infty)$.

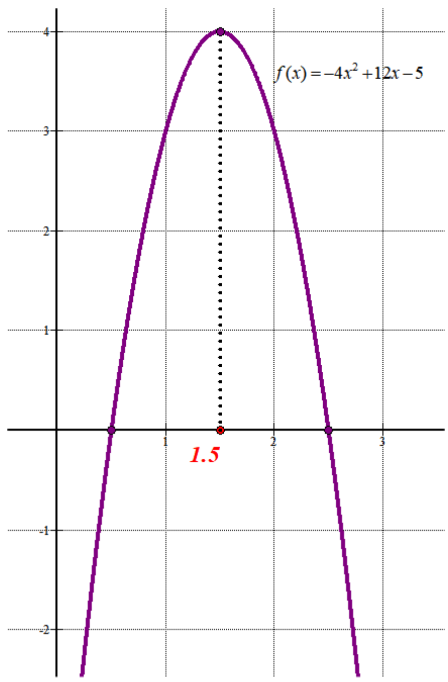


La función presenta un máximo relativo en $x = 1.5$. Como $f(1.5) = 4$ el máximo está en el punto M(1.5, 4).

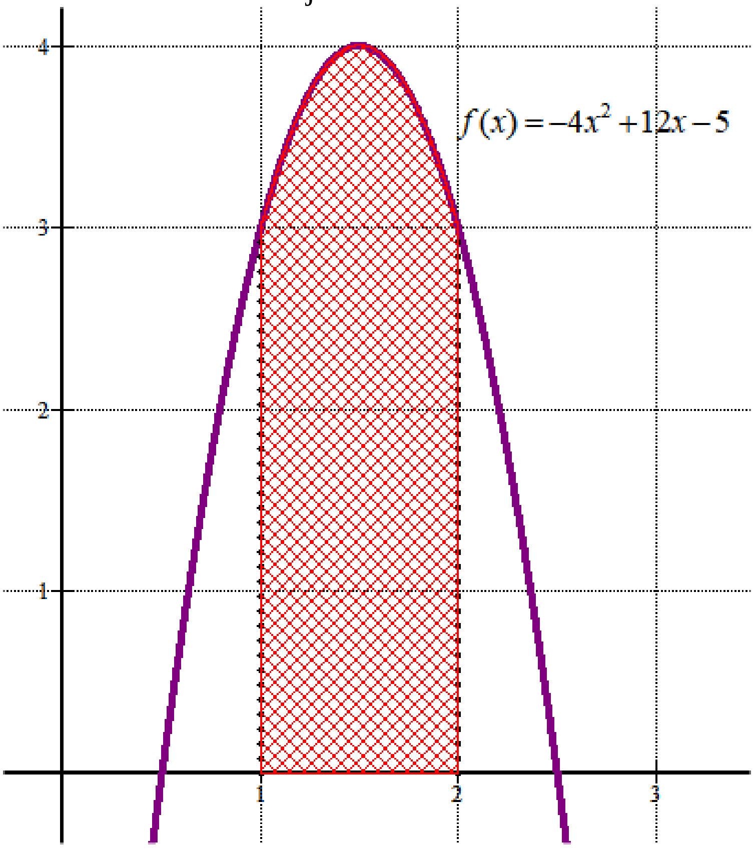
Crece en $(-\infty, 1.5)$ y decrece en $(1.5, +\infty)$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = -4x^2 + 12x - 5$
-1	-21
0	-5
0.5	0
1.5	4
2.5	0
3	-5
4	-21



b) El recinto es el del dibujo.



Contando cuadraditos el área tiene un valor entre 3 y 4 u^2.

La calculamos con integrales.

$$Área=\int_1^2 -4x^2+12x-5dx=\left[-4\frac{x^3}{3}+6x^2-5x\right]_1^2=$$

$$=\left[-4\frac{2^3}{3}+6\cdot 2^2-10\right]-\left[-4\frac{1^3}{3}+6\cdot 1^2-5\right]=-\frac{32}{3}+24-10+\frac{4}{3}-6+5=\boxed{\frac{11}{3}=3,66\,u^2}$$

PREGUNTA 5. Estadística y probabilidad. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)=0,4$ y $P(\overline{B})=0,7$ y $P(\overline{B}/A)=0,75$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(A\cap\overline{B})$; b) $P(A\cup B)$; c) $P(A\cap B)$; d) ¿son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta

Tenemos que $P(\overline{B})=0,7\Rightarrow 1-P(B)=0,7\Rightarrow P(B)=0,3$

a) $P(\overline{B}/A)=0,75\Rightarrow \dfrac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}=0,75\Rightarrow \dfrac{P(A\cap\overline{B})}{0,4}=0,75\Rightarrow \boxed{P(A\cap\overline{B})=0,4\cdot 0,75=0,3}$

b)

$$P(A\cap\overline{B})=0,3\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=0,3\Rightarrow 0,4-P(A\cap B)=0,3\Rightarrow P(A\cap B)=0,4-0,3=0,1$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,4+0,3-0,1=\boxed{0,6}$$

c) Calculado en el apartado anterior → $\boxed{P(A\cap B)=0,1}$

d)

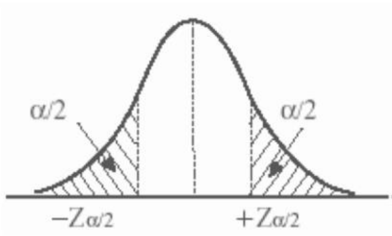
$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0,1 \\ P(A)P(B)=0,4\cdot 0,3=0,12 \end{array}\right\}\text{No son iguales y por tanto son dependientes.}$$

PREGUNTA 6. Estadística y probabilidad. La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja se puede aproximar por una variable normal de media μ desconocida y desviación típica σ = 50 litros.
a) Determine el tamaño mínimo de muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95% tenga una amplitud a lo sumo de 8 litros.
b) Se toman los datos de producción de 25 días, calcule la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas sea menor o igual a 930 litros si sabemos que μ = 950 litros.

a) Sea X = "producción diaria de leche, medida en litros"
X = N(μ, 50).

Con un nivel de confianza del 95% tenemos

$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 1,96**



Si la amplitud debe ser menor de 8 litros el error debe ser menor de 4 litros.
Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 4.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{50}{\sqrt{n}} = 4 \Rightarrow 1.96 \cdot 50 = 4\sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 50}{4}\right)^2 = 600.25$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 601 días.

b) Se toma una muestra de 25 días, y la media muestral seguirá:

$$\overline{X_{25}} = N\left(950, \frac{50}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \overline{X_{25}} = N(950, 10)$$

Con esta distribución normal calculamos la probabilidad pedida:

$$P\left(\overline{X_{25}} \le 930\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X_{25}} - 950}{10} \le \frac{930 - 950}{10}\right) = P(Z \le -2) =$$

$$= P(Z \ge 2) = 1 - P(Z \le 2) = \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la tabla} \\ \text{de la N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0{,}0228}$$