CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA
USC

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade

Código: 20

XUÑO 2017

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, segundo os valores de λ, o rango da matriz $AA^t - \lambda I$, sendo A^t a matriz trasposta de A e I a matriz unidade de orde 2.

b) Determina a matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica a ecuación matricial $AA^t\mathrm{X} = 6\mathrm{X}$.

2. a) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - cos 2x}$

b) Deséxase construír unha caixa de base cadrada, con tapa e cunha capacidade de 80 dm^3. Para a tapa e a superficie lateral quérese utilizar un material que custa 2€/dm^2 e para a base outro que custa 3€/dm^2. Calcula as dimensións da caixa para que o seu custo sexa mínimo

c) Calcula $\int_0^1 xln(1+x)dx$

3. Dados os planos $\pi_1: x + y - z + 2 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de π_1 e π_2. Se se cortan, calcula o ángulo que forman.

b) Sexa r a recta que pasa polo punto $P(1,1,1)$ e é perpendicular a π_1. Calcula o punto de corte de r e π_1.

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,1,1)$ respecto do plano π_1

4. a) Nun experimento aleatorio, sexan A e B dous sucesos con $P(\bar{A}) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}7$. Se A e B son independentes, calcula $P(A \cup B)$ e $P(A - B)$. (Nota: $\bar{A}$ suceso contrario ou complementario de A).

b) Nun grupo de 100 persoas hai 40 homes e 60 mulleres. Elíxense ao azar 4 persoas do grupo, ¿cal é a probabilidade de seleccionar máis mulleres que homes?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ x \quad\quad - z &= m \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.

2. a) Calcula os valores a, b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & se\ x < 3 \\ \ln(x-2) & se\ x \geq 3 \end{cases}$ sexa derivable en $x = 3$ e determina o punto no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á recta $x + 3y = 0$.

b) Se $P(x)$ é un polinomio de terceiro grao, cun punto de inflexión no punto $(0,5)$ e un extremo relativo no punto $(1,1)$, calcula $\int_0^1 P(x)dx$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(1,0,5)$ e $Q(5,2,3)$

a) Calcula a distancia do punto $A(5,-1,6)$ á recta r.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a r e pasa polo punto $A(5,-1,6)$.

c) Calcula a área do triángulo de vértices os puntos $P(1,0,5)$, $A(5,-1,6)$ e o punto de corte da recta r co plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$.

4. Nun estudo realizado nun centro de saúde, observouse que o 30% dos pacientes son fumadores e destes, o 60% son homes. Entre os pacientes que non son fumadores, o 70% son mulleres. Elixido un paciente ao azar,

a) Calcula a probabilidade de que o paciente sexa muller

b) Se o paciente elixido é home, ¿cal é a probabilidade de que sexa fumador?

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $AA^t - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$3 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(\ AA^t - \lambda I) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda - 6)$

Polo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} Se\ \ \lambda \neq 0\ \ e\ \ \lambda \neq 6,\ \ rang(\ AA^t - \lambda I) = 2 \\ Se\ \ \lambda = 0\ ou\ \lambda = 6,\ \ rang(\ AA^t - \lambda I) = 1 \end{array}}$$

b)

$AA^tX = 6X \quad \Leftrightarrow \quad (\ AA^t - 6I)X = 0$

Sabemos polo apartado a) que a matriz $AA^t - 6I$ non ten inversa, polo que imos obter infinitas solucións

$(\ AA^t - 6I)X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow 3x - 3y = 0 \ \Rightarrow \ \ x = y$

As infinitas solucións son

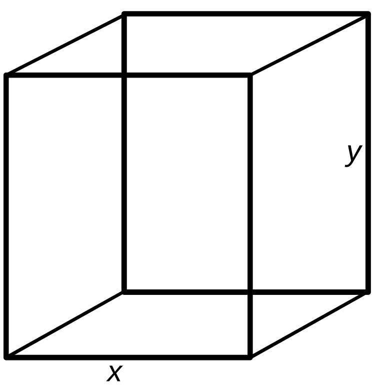
$$\boxed{X = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}}$$

Exercicio 2:

a) $\frac{0}{0}$ (L'Hôpital)

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen^2x - 3x^2}{e^{x^2} - cos2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2senxcosx - 6x}{2xe^{x^2} + 2sen2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2cos^2x - 2sen^2x - 6}{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + 4cos2x} = -\frac{4}{6} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

b)



Sexan:

x= medida da base en dm

y = medida da altura en dm

CONVOCATORIA DE XUÑO

Como o volumen é 80dm³, temos que

$$x^2 y = 80 \;\Rightarrow\; y = \frac{80}{x^2}$$

e o custo, función a minimizar, será

$$C(x) = 3x^2 + 2x^2 + 8x \cdot \frac{80}{x^2} = 5x^2 + \frac{640}{x}$$

Calculamos puntos críticos:

$$C'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 10x - \frac{640}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 10x^3 = 640 \;\Leftrightarrow\; x^3 = 64 \;\Leftrightarrow\; x = 4$$

Ademais

$$C''(x) = 10 + \frac{1280}{x^3} \;\Rightarrow\; C''(4) > 0$$

E polo tanto $C(x)$ ten un mínimo en $x = 4$. Para este valor resulta que $y = \frac{80}{16} = 5$

$$\boxed{Dimensións\!: \; x = 4\ dm;\; y = 5\ dm}$$

c)

Calculamos a integral indefinida

$$\int x ln(1+x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int\left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)dx =$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x} \\ dv = xdx \quad\;\; \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

(grao numerador > grao denominador. Facemos a división)

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}ln|1+x| + K$$

Aplicamos a regra de Barrow:

$$\int_0^1 x ln(1+x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}ln|1+x|\right]_0^1 =$$

$$= \frac{ln2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{ln2}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\int_0^1 x ln(1+x)dx = \frac{1}{4}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Os vectores normais aos planos son:

$$\vec{n}_{\pi_1} = (1,1,-1)$$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (3,-1,2)$$

Como os vectores normais non son proporcionais, entón

$$\boxed{Os\ planos\ córtanse}$$

O ángulo α que forman os planos é o ángulo que forman os vectores normais

$$cos\alpha = \frac{\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}}{|\vec{n}_{\pi_1}||\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{3-1-2}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{9+1+4}} = 0$$

Polo tanto

$$\boxed{\alpha = {}^{\pi}/_{2}\,;\ \ \pi_1\ \ e\ \ \pi_2\ son\ perpendiculares}$$

b) Como a recta r é perpendicular ao plano π_1, o vector $\vec{n}_{\pi_1}$ é un vector director de r. Ademais, a recta pasa polo punto $P(1,1,1)$. Con estes elementos podemos escribir as ecuacións paramétricas da recta:

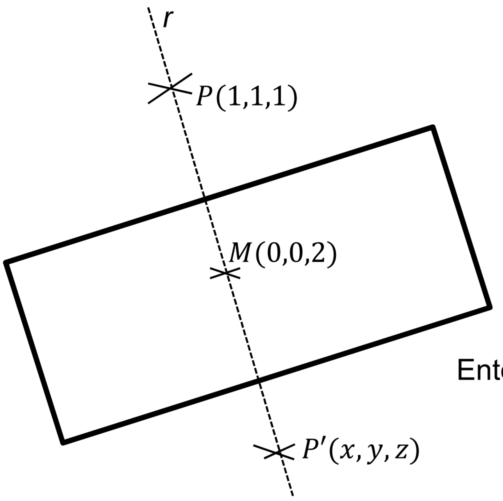
$$r\!: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Para calcular o punto de corte da recta co plano, sustituimos na ecuación de π_1

$$1 + \lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda + 2 = 0 \ \ \Rightarrow \ \lambda = -1$$

Sustituindo este valor de λ nas ecuacións paramétricas, obtemos o punto de corte da recta e o plano

$$\boxed{M(0,0,2)}$$



Temos que:

M é o punto de corte de r e π_1

$P(1,1,1)$ é un punto de r

r é perpendicular a π_1

Entón M é o punto medio de P e o seu simétrico $P'(x,y,z)$

Polo tanto:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{x+1}{2} \\ 0 &= \frac{y+1}{2} \\ 2 &= \frac{z+1}{2} \end{aligned}\right\} \ \Rightarrow \ \ \boxed{P'(-1,-1,3)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) $P(\bar{A}) = 0{,}4 \Rightarrow P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Como A e B son independentes:

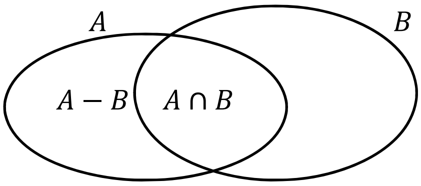
$$\left.\begin{array}{l} P(A) = P(A/B) \\ \text{Pero} \\ P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$$

Entón

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}88$$

$$\boxed{P(A \cup B) = 0{,}88}$$

Por outra parte,



$$A = (A - B) \underset{\uparrow}{\cup} (A \cap B)$$

Disxunta

Polo tanto

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = 0{,}6 - 0{,}42 = 0{,}18$$

$$\boxed{P(A - B) = 0{,}18}$$

b) Se chamamos

M = A persoa elexida é muller

H = A persoa elexida é home

Hai cinco casos posibles: $MMMH, MMHM, MHMM, HMMM, MMMM$

$$\begin{aligned} &P(MMMH) + P(MMHM) + P(MHMM) + P(HMMM) + P(MMMM) \\ &\quad = \frac{6}{10}\cdot\frac{59}{99}\cdot\frac{58}{98}\cdot\frac{40}{97} + \frac{6}{10}\cdot\frac{59}{99}\cdot\frac{40}{98}\cdot\frac{58}{97} + \frac{6}{10}\cdot\frac{40}{99}\cdot\frac{59}{98}\cdot\frac{58}{97} + \frac{4}{10}\cdot\frac{60}{99}\cdot\frac{59}{98}\cdot\frac{58}{97} + \frac{6}{10}\cdot\frac{59}{99}\cdot\frac{58}{98}\cdot\frac{57}{97} \\ &\quad = 0{,}3490 + 0{,}1243 = \boxed{0{,}4733} \end{aligned}$$

Tamén podemos resolvelo utilizando a aproximación pola distribución binomial

X = nº de mulleres nun grupo de 4 persoas

$X \longrightarrow B(4; 0{,}6)$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot (1 - 0{,}6) + \binom{4}{4} \cdot 0{,}6^4 = 0{,}3456 + 0{,}1296$$

Polo tanto

$$\boxed{P(X \geq 3) = 0{,}4752}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-2+1+2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rang(C) = 2$$

Cálculo do rango da matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m - m - 2 = m - 1$$

- $m \neq 1 \Rightarrow rang(A) = 3$
- $m = 1 \Rightarrow rang(A) = 2$

<u>Discusión:</u>

$m = 1 \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(A) < nº\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ indeterminado.$ $m \neq 1 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(A)\ \ Sistema\ incompatible$

c) Para $\boxed{m = 1}$ xa vimos que era un sistema compatible indeterminado (infintas solucións). Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 1 + z \\ x \qquad\ = 1 + z \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0$$

As infinitas solucións son

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = 1 + \lambda & \\ y = 0; & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda & \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Para que a función sexa derivable en $x = 3$ ten que ser continua en $x = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (ax^2+b) = 9a+b \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} ln(x-2) = 0 \\ \qquad f(3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 9a+b=0$$

Por outra parte

$$\lim_{x\to 3^-} f'^{(x)} = \lim_{x\to 3^-} 2ax = 6a$$

$$\lim_{x\to 3^+} f'^{(x)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-2} = 1$$

Polo tanto, para que a función sexa derivable en $x = 3$, debe cumplirse:

$9a + b = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{b = -3/2}$

$6a = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1/6}$

Temos entón

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2} & se \quad x < 3 \\ \ln(x-2) & se \quad x \geq 3 \end{cases}} \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & se \quad x < 3 \\ \frac{1}{x-2} & se \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Hai que determinar un punto $(x_0, f(x_0))$ tal que $f'(x_0) = -\frac{1}{3}$ = pendente de $x + 3y = 0$

$\frac{1}{3}x_0 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \; x_0 = -1$ < 3 que está no dominio de definición de $\frac{1}{3}x$

$\frac{1}{x_0-2} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \; x_0 = -1$ > 3 Polo tanto non está no dominio de definición de $\ln(x-2)$

$$\boxed{Punto: \left(-1, -\frac{4}{3}\right)}$$

b) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P''(x) = 6ax + 2b$

A gráfica de $P(x)$ pasa polo punto $(0,5)$

$P(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 5}$

$P(x)$ ten un punto de inflexión en $x = 0$ $\qquad P(x) = ax^3 + cx + 5$

$P''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 0}$

A gráfica de $P(x)$ pasa polo punto $(1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad a + c + 5 = 1 \\ P(x) \text{ ten un extremo relativo en } x = 1 \\ P'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + c = 0 \end{array}\right] \Rightarrow \quad \boxed{a = 2; \;\; c = -6}$$

Entón

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 (2x^3 - 6x + 5)dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 5x\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 3 + 5 = \boxed{5/2}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Calculamos un vector director da recta;

$\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (4,2,-2)$

E utilizando a fórmula da distancia dun punto a unha recta

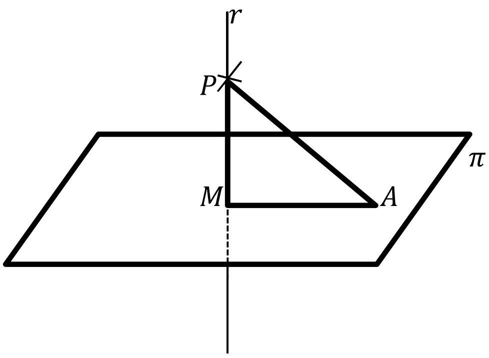
$$d(A,r) = \frac{\|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\|}{\|\vec{v}_r\|} = \frac{\sqrt{144+144}}{\sqrt{16+4+4}} = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3}\,u}$$

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (0,-12,-12)$$

b) Sexa π o plano buscado e $\vec{n}_\pi$ un vector normal do plano

$$\left.\begin{array}{l} r \perp \pi \;\Leftrightarrow\; \vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi \\ \\ A \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : 4(x-5) + 2(y+1) - 2(z-6) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : 2x + y - z - 3 = 0}$$

c)



Para calcular o punto de corte, M, da recta r co plano π escribimos as ecuacións paramétricas da recta e substituimos na ecuación do plano

$$\left.\begin{array}{r} P(1,0,5) \in r \\ \vec{v}_r = (4,2,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = \quad 2\lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2(1+4\lambda) + 2\lambda - (5-2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 12\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Levando este valor ás ecuacións paramétricas da recta obtemos $M(3,1,4)$. Como a recta é perpendicular ao plano, o triángulo é rectángulo con ángulo recto en M. Polo tanto

$$\acute{A}rea\ \overset{\triangle}{AMP} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PM}\right| = \frac{1}{2}\,|(-2,2,-2)| \cdot |(2,1,1)| = \frac{1}{2}\sqrt{12}\cdot\sqrt{6} = \boxed{3\sqrt{2}\ u^2}$$

Tamén se podería calcular

$$\acute{A}rea\ \overset{\triangle}{AMP} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{72} = \boxed{3\sqrt{2}\ u^2}$$

$$\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,6,6)$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

Se chamamos

H = “Un paciente é home”

M = “Un paciente é muller”

F = “Un paciente é fumador”

Datos:

$P(F) = 0{,}3$

$P(H/F) = 0{,}6$

$P(M/\overline{F}) = 07$

a) Polo teorema de probabilidades totales:

$$P(M) = P\left(M/F\right) \cdot P(F) + P(M/\overline{F}) \cdot P\left(\overline{F}\right) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}12 + 0{,}49 = \boxed{0{,}61}$$

b) Pola regra de Bayes:

$$P(F/H) = \frac{P(F \cap H)}{P(H)} = \frac{P(H/F) \cdot P(F)}{P(H)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}3}{1 - 0{,}61} = \boxed{0{,}461}$$

Pódese facer un diagrama en árbol: