MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, segundo os valores de k, o rango das matrices AB e BA.

b) Para o valor $k = 0$, determina as matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Calcula: i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$; ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$

b) A derivada dunha función $f(x)$, que ten por dominio $(0,\infty)$, é $f'(x) = 1 + lnx$. Determina a función $f(x)$ tendo en conta que a súa gráfica pasa polo punto $(1,4)$.

c) Determina, se existen, os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $(0,1,3)$ e $(1,1,1)$ e s a recta $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) ¿É s paralela ao plano YZ? ¿Está contida no devandito plano?

c) Calcula a distancia da recta r ao plano $\pi: 2x + z = 0$.

4. Sexan A e B dous sucesos con $P(A) = 0{,}7; P(B) = 0{,}6$ e $P(A \cup B) = 0{,}9$

a) ¿Son A e B sucesos independentes? Xustifica a resposta.

b) Calcula $P(A - B)$ e $P(A/\bar{B})$. (Nota: $\bar{B}$ suceso contrario ou complementario de B).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ x - y + z &= m \\ x + my - 2z &= m \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 0$.

2. Dada a función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

a) Estuda, en $x = 0$, a continuidade e derivabilidade de $f(x)$.

b) Determina os puntos da gráfica de $f(x)$ nos que a recta tanxente é paralela á recta $x - 4y = 0$ e determina as ecuacións desas rectas tanxentes.

c) Calcula $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

3. Dados os planos $\alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0$; $\beta: \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$; e a recta $r: \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa dos planos α e β. Calcula a distancia entre eles.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a α e contén á recta r.

c) Sexan P e Q os puntos de corte da recta r cos planos XY e YZ respectivamente. Calcula a distancia entre P e Q.

4. O total de vendas diarias nun pequeno restaurante é unha variable que segue unha distribución normal de media 1220€ ao día e desviación típica 120€ ao día.

a) Calcula a probabilidade de que nun día elixido ao azar as vendas excedan de 1400€.

b) Se o restaurante debe vender polo menos 980€ ao día para cubrir os gastos, ¿cal é a probabilidade de que un día elixido ao azar, o restaurante non cubra gastos?

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

***Exercicio 1*:**

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ k+3 & k+1 & -3k-1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Así

$|AB| = -4k - 4 - 6k - 18 - 12k - 4 + 12k + 12 + 6k + 2 + 4k + 12 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \longrightarrow \boxed{rang(AB) = 2}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{pmatrix}$

$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 2(k+2)$

Polo tanto

$$\boxed{\begin{array}{ll} Se\ k = -2, & entón\ rang(BA) = 1 \\ Se\ k \neq -2, & entón\ rang(BA) = 2 \end{array}}$$

b) Vimos que $det(A \cdot B) = 0$ e polo tanto $A \cdot B$ non ten inversa. Se $k = 0$

$$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \end{array} \right.$$

Como a terceira ecuación é suma das dúas primeiras, podemos prescindir dela

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3z \\ 3x + y = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 3z - x \\ 3x + 3z - x = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 4z \\ x = -z \end{array} \right.$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \boxed{1}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ $(L'H$ôpital)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{12e^{2x}}{4e^{2x}} \boxed{3}$$

b) $f(x)$ é a primitiva de $f'(x)$ pasando polo punto $(1,4)$

$$\int(1+lnx)\,dx = x + \int lnxdx = x + xlnx - \int dx = xlnx + K$$

$$\begin{cases} u = lnx \;\Rightarrow\; du = dx/x \\ dv = dx \;\Rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$f(1) = 4 \;\Rightarrow K = 4$

Polo tanto

$$\boxed{f(x) = xlnx + 4}$$

c)

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + lnx = 0 \;\Leftrightarrow\; x = {}^{1}/_{e}$ punto crítico

$f''(x) = {}^{1}/_{x} \;\Rightarrow\; f''({}^{1}/_{e}) = e > 0$

Polo tanto o punto crítico é un mínimo

$$\boxed{Mínimo\ relativo\ ({}^{1}/_{e}, 4 - {}^{1}/_{e})}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Determinamos un punto e un vector director das rectas r e s:

$$r: \begin{cases} P_r = (0,1,3) \in r \\ \vec{v}_r = (1,1,1) - (0,1,3) = (1,0,-2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} P_s = (1,0,0) \in s \\ \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (0,2,1) \end{cases}$$

Como os vectores directores das rectas non son proporcionais, as rectas córtanse ou crúzanse. Para saber se se cortan ou se se cruzan, estudamos o $rang(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s})$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 1 = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) = 3$$

Polo tanto

$$\boxed{As\ rectas\ crúzanse}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector normal ao plano } YZ\text{: } \vec{n} = (1,0,0) \\ \text{Vector director de } s\text{: } \vec{v}_s = (0,2,1) \end{array}\right] \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_s = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n} \perp \vec{v}_s \;\Rightarrow\; \boxed{s \text{ é } paralela\ ao\ plano\ YZ}$$

Para ver que a recta non está contida no plano chega encontrar un punto da recta que non esté no plano YZ $(\alpha: x = 0)$:

$$\left.\begin{array}{l} P_s = (1,0,0) \in s \\ P_s = (1,0,0) \notin \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s\ non\ está\ contida\ no\ plano\ YZ}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = (1,0,-2) \\ \vec{n}_\pi = (2,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\pi \perp \vec{v}_r$$

Como o vector normal ao plano é perpendicular ao vector director da recta, a recta r é paralela ao plano π. Podemos polo tanto calcular a distancia da recta ao plano como a distancia dun punto calquera da recta ao plano:

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

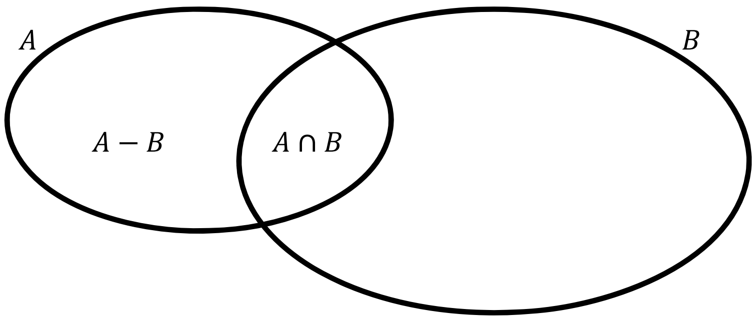
$$P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}9 = 0{,}4$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3} \neq P(A) \Rightarrow \boxed{A \; e \; B \; non \; son \; independentes}$$

Tamén

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \boxed{A \; e \; B \; non \; son \; independentes}$$

b)



Disxuntos

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = 0{,}7 - 0{,}4 \Rightarrow \boxed{P(A - B) = 0{,}3}$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}6} = 3/4 \Rightarrow \boxed{P(A/\bar{B}) = 0{,}75}$$

Tamén podemos utilizar a probabilidade calculada no apartado anterior: $P(A \cap B) = 0{,}4$ e construir a táboa

	B	$\bar{B}$	
A	0,4	0,3	0,7
$\bar{A}$	0,2	0,1	0,3
	0,6	0,4	1

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= 0{,}7 - 0{,}4 = \boxed{0{,}3}$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \boxed{0{,}75}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

***Exercicio 1*:**

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & m \\ 1 & m & -2 & m \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2 \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 3m - 4 = -3m \end{array}\right\} \Rightarrow rang(C) = \begin{cases} 2 & se\ m = 0 \\ 3 & se\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cálculo do rango de } A\text{:} \\ \text{Sempre} \quad rang(A) \geq rang(C) \\ A^* \text{ é unha matriz 3x4} \Rightarrow rang(A) \leq 3 \\ m \neq 0 \;\Rightarrow\; rang(C) = 3 \\ m = 0 \Rightarrow a\ \text{última}\ columna\ de\ A\ \text{é}\ de\ ceros \end{array}\right\} \Rightarrow \; rang(C) = rang(A),\ \forall m$$

Discusión:

$$\boxed{\begin{array}{c} m = 0,\ rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ indeterminado. \\ m \neq 0, \quad rang(C) = rang(A) = 3 = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado. \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 0}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ x - y = -z \end{array}\right\}$$

Entón:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -(-2z) = 2z \\ \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -(-3z) = 3z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$As\ infinitas\ solucións\ son$:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \ ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Tamén podemos resolvelo por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & m \\ 3 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & m & -2 & \vdots & m \end{pmatrix} \xrightarrow[3^{a}-1^{a}]{2^{a}-3\cdot 1^{a}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & m \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -3m \\ 0 & m+1 & -3 & \vdots & m \end{pmatrix} \xrightarrow[3^{a}-2^{a}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & m \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & m & 0 & \vdots & m \end{pmatrix}$$

- Se $m \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} 3^{a} \text{ fila: } my = 3m \;\Rightarrow y = 3 \\ 2^{a} \text{ fila: } 3 - 3z = -3m \;\Rightarrow\; z = m + 1 \\ 1^{a} \text{ fila: } x - 3 + m + 1 = m \;\Rightarrow x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Sistema\ compatible\ determinado. Solución\ única}$$

- Se $m = 0$

Podemos prescindir da 3ª ecuación. Pasando a 3ª columna ao termo independente (Sistema compatible indeterminado. Infinitas solución):

$$\left.\begin{array}{l} x - y = -z \;\Rightarrow\; x = 2z \\ y = 3z \end{array}\right] \Rightarrow As\ infinitas\ solucións\ son\ \boxed{\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda\ ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{1-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{1+x} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) \text{ é } continua\ en\ x = 0}$

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{(1-x)^2} = 1$

$\Rightarrow$ As derivadas laterais son finitas e coinciden. Polo tanto $\boxed{f(x) \text{ é } derivable\ en\ x = 0}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{(1+x)^2} = 1$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & se\ \ x \le 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & se\ \ x \ge 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{4} = pendente\ da\ recta\ \ x - 4y = 0$

$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \begin{cases} -1 \\ \cancel{3}\ (non \text{ é } \le 0) \end{cases}$

$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \begin{cases} \cancel{-3}\ (non \text{ é } \ge 0) \\ 1 \end{cases}$

Recta tanxente en $x = -1$:

$y - f(1) = f'(1)(x+1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$

Recta tanxente en $x = 1$:

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}}$

c)

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{1-x}dx = \int_{-1}^{0} \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)dx = [-x - ln|1-x|]_{-1}^{0} = -(1 - ln2)$$

$$\boxed{\int_{-1}^{0} f(x)dx = ln2 - 1}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

***Exercicio 3*:**

a) Vectores normais aos planos α e β:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_\alpha = (2,-2,4) \\ \\ \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,2,-4)\end{array}\right] \Rightarrow \vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \Rightarrow \boxed{\alpha \ e \ \beta \ \ son\, paralelos}$$

Como os planos son paralelos, collemos un punto arbitrario nun dos planos e calculamos a distancia dese punto ao outro plano.
$P(1,5,4) \in \beta$

$$d(\alpha,\beta) = d(P,\alpha) = \frac{|2-10+16-7|}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{12} \ \ unidades}$$

b) Sexa π o plano buscado. O plano π está determinado por:

- Un punto arbitrario de r, por exemplo $P_r(3,5,0)$ (π contén á recta r)
- $\vec{n}_\alpha$ é un vector contido no plano ($\pi \perp \alpha$)
- Un vector director $\vec{v}_r$ da recta r é un vector contido no plano (π contén á recta r)

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,0,1)$$

$$\pi: 0 = \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2(x-3) - 8(y-5) - 4z - 2(y-5)$$

$$\boxed{\pi: x + 5y + 2z - 28 = 0}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} P : \begin{Bmatrix} z = 0 \\ x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow P(3,5,0) \\ \\ Q : \begin{Bmatrix} x = 0 \\ x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow Q\left(0,5,\frac{3}{2}\right) \end{array}\right] \Rightarrow d(P,Q) = \sqrt{3^2 + \left({}^3/_2\right)^2} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

***Exercicio 4*:**

Sexa X = total (en €) de ventas diarias

$$X \rightarrow N(1220; 120)$$

a) Tipificación $\frac{X-1220}{120} = Z \rightarrow N(0,1)$

$$P(X > 1400) = P\left(\frac{X-1220}{120} > \frac{1400-1220}{120}\right) = P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332$$

$$\boxed{P(X > 1400) = \ 0{,}0668}$$

b) Tipificación $\frac{X-1220}{120} = Z \rightarrow N(0,1)$

$$P(X < 980) = P\left(\frac{X-1220}{120} < \frac{980-1220}{120}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772$$

$$\boxed{P(X < 980) = \ 0{,}0228}$$