

PROBABILIDAD

Experimentos aleatorios y deterministas.

Decimos que un experimento es **determinista** si su resultado se puede predecir a partir del conocimiento de las condiciones en las que se realiza.

Decimos que un experimento es **aleatorio** si no es posible predecir su resultado, a pesar de conocer las condiciones en las que se realiza.

El **espacio muestral** asociado a un experimento aleatorio es el conjunto formado por todos los resultados posibles. Lo representaremos por E .

Cada uno de los resultados posibles también recibe el nombre de **suceso elemental**.

Sucesos.

Cada uno de los subconjuntos del espacio muestral E recibe el nombre de **suceso** y se representa mediante una letra mayúscula. También se le llama suceso aleatorio o suceso estocástico.

Decimos que un suceso se **verifica** u **ocurre** al efectuar un experimento aleatorio si el resultado obtenido forma parte de dicho suceso.

Suceso seguro: Es el que contiene todos los resultados posibles del experimento. Este suceso se verifica siempre y coincide con el espacio muestral E .

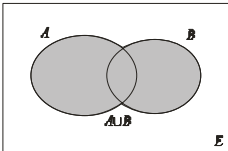
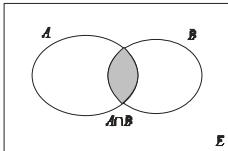
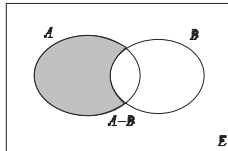
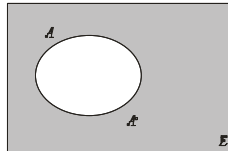
Suceso imposible: Es el que no contiene ningún resultado posible del experimento. Este suceso no se verifica nunca y coincide con el conjunto vacío $\emptyset$.

Llamamos **sucesos elementales** a los sucesos formados por un único elemento del espacio muestral, es decir, por un único resultado del experimento.

Y llamamos **sucesos compuestos** a los sucesos formados por dos o más elementos del espacio muestral, es decir, por dos o más resultados del experimento aleatorio.

Al conjunto formado por todos los sucesos de un experimento aleatorio se le denomina **espacio de sucesos** de E y se le designa por $\mathcal{A}(E)$.

Operaciones con sucesos.

UNIÓN	INTERSECCIÓN	DIFERENCIA	CONTRARIO
Se llama unión de los sucesos A y B al suceso formado por todos los resultados que están en A o en B . Se representa por $A \cup B$. El suceso $A \cup B$ se verifica si se verifica A o B .	Se llama intersección de los sucesos A y B al suceso formado por todos los resultados que están en A y en B . Se representa por $A \cap B$. El suceso $A \cap B$ se verifica si se verifican, simultáneamente, A y B .	Se llama diferencia entre el suceso A y suceso B al suceso formado por todos los resultados que están en A pero no en B . Se representa por $A - B$. El suceso $A - B$ se verifica si se verifica A pero no se verifica B .	Se llama contrario o complementario del suceso A y se representa por A^C , al suceso formado por todos los resultados del experimento que no están en A , es decir, a la diferencia $E - A$. El suceso A^C se verifica si no se verifica A .
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$	$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$	$A^C = \{x \mid x \notin A\}$
			

Propiedades de las operaciones con sucesos

Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificativa	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap E = A$
Contrario	$A \cup A^C = E$	$A \cap A^C = \emptyset$
Involución	$(A^C)^C = A$	
Leyes de Morgan	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$\mathcal{A}(E)$, con las operaciones unión, intersección y complementario, constituye un **álgebra de Boole**.

Observaciones:

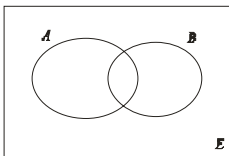
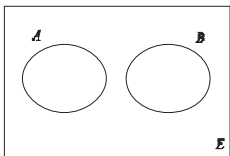
1) Puesto que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ podemos escribir simplemente $A \cup B \cup C$.

2) Puesto que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ podemos escribir simplemente $A \cap B \cap C$.

3) $A - B = A \cap B^c$

Sucesos compatibles y. sucesos incompatibles.

Dos o más sucesos son **compatibles** si pueden verificarse simultáneamente. En caso contrario, son **incompatibles**.

A y B compatibles $\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$	A y B incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
	

Tres o más sucesos son **incompatibles dos a dos** si es incompatible cualquier pareja que se pueda formar entre ellos.

Sistema completo de sucesos

Si E es el espacio muestral de un experimento aleatorio, los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ forman un **sistema completo de sucesos** si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- 1) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$
- 2) $A_1, A_2, \dots, A_n$ son incompatibles dos a dos.

Definición de probabilidad.

Estamos interesados en poder medir el grado de certeza de una situación. Esta medida se denomina **probabilidad**.

Definición experimental.

Dado cualquier suceso A asociado a un experimento aleatorio, llamamos probabilidad de A , $P(A)$, al número hacia el que tienden las frecuencias relativas de A al aumentar el número de realizaciones del experimento.

Definición axiomática.

Dado el espacio muestral E asociado a un experimento aleatorio y su espacio de sucesos $\mathcal{A}(E)$, llamamos **probabilidad** a una aplicación

$$P: \mathcal{A}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longrightarrow P(A)$$

que asocia a cada suceso A un número real llamado **probabilidad de A** , $P(A)$, y cumple los siguientes axiomas:

- A1. $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo suceso A de $\mathcal{A}(E)$.
- A2. $P(E) = 1$, siendo E el suceso seguro.
- A3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son incompatibles.

Consecuencias de los axiomas.

1. La probabilidad del suceso $\bar{A}$, contrario del suceso A , es igual a 1 menos la probabilidad del suceso A .

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2. La probabilidad del suceso imposible es cero.

$$P(\emptyset) = 0$$

3. La probabilidad de un suceso A contenido en otro suceso B es menor o igual que la probabilidad de B .

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

4. La probabilidad de la unión de varios sucesos incompatibles dos a dos es igual a la suma de sus probabilidades.

$$A_1, A_2, \dots, A_n \text{ incompatibles dos a dos} \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

5. La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos menos la probabilidad del suceso intersección de ambos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Regla de Laplace.

Si en un experimento aleatorio todos los sucesos elementales son **equiprobables**, la probabilidad de un suceso A se obtiene dividiendo el **número de resultados que forman el suceso A** (casos favorables) entre el **número de resultados posibles** del experimento (casos posibles).

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Probabilidad condicionada.

Dados dos sucesos A y B , tales que $P(B) \neq 0$, se llama probabilidad de A condicionada a B , $P(A/B)$, al cociente:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidad compuesta.

De la probabilidad condicionada se deduce una expresión muy útil en el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

A esta expresión se le conoce como **principio de la probabilidad compuesta**.

Al ser $A \cap B = B \cap A$, se tiene:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

La probabilidad del suceso intersección es igual a la probabilidad de uno de ellos, supuesta no nula, por la probabilidad del otro condicionada a la realización del anterior.

Propiedades de la probabilidad condicionada

1) Si un suceso B está contenido en un suceso C , entonces la probabilidad de B condicionada a A es menor o igual que la probabilidad de C condicionada a A .

$$B \subset C \Rightarrow P(B/A) \leq P(C/A)$$

2) Si un suceso B está contenido en otro suceso A , entonces la probabilidad del suceso B condicionada a A es el cociente entre la probabilidad del suceso B y la probabilidad del suceso A .

$$B \subset A \Rightarrow P(B/A) = \frac{P(B)}{P(A)}$$

3) Si un suceso A está contenido en otro suceso B , entonces la probabilidad del suceso B condicionada a A es uno.

$$A \subset B \Rightarrow P(B/A) = 1$$

Independencia de sucesos.

SUCESOS INDEPENDIENTES	SUCESOS DEPENDIENTES
A y B independientes $\Leftrightarrow P(A/B) = P(A)$	A y B dependientes $\Leftrightarrow P(A/B) \neq P(A)$
Del principio de probabilidad compuesta se deriva:	
A y B independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	A y B dependientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Teorema de la probabilidad total

Sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos y B , un suceso cualquiera, todos ellos asociados a un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ son no nulas, se cumple que:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Teorema de Bayes

Sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos y B , un suceso cualquiera, todos ellos asociados a un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ son no nulas, se cumple que:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

En una situación en la que sea aplicable el teorema de Bayes:

- $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ se llaman **probabilidades a priori**.
- $P(A_1/B), P(A_2/B), \dots, P(A_n/B)$ se denominan **probabilidades a posteriori**.
- $P(B/A_1), P(B/A_2), \dots, P(B/A_n)$ reciben el nombre de **verosimilitudes**.