Se consideran las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & k & 0\\ -k & 1 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

a) Calcúlese los valores de $k$ para los cuales la matriz $A$ no es invertible.

b) Para $k=0$ calcúlese la matriz inversa $A^{-1}$

c) Para $k=0$ resuélvase la ecuación matricial $A\cdot X=B$.

---

**Solución:**

**a)** Calcúlese los valores de $k$ para los cuales la matriz $A$ no es invertible.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & k & 0\\ -k & 1 & 4\end{vmatrix}=k^2-4k+3 \rightarrow k=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \rightarrow \left\langle \begin{array}{l}\boxed{k=1}\\ \boxed{k=3}\end{array}\right.$$

**b)** Para $k=0$ calcúlese la matriz inversa $A^{-1}$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix} \rightarrow |A|=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(\mathrm{Adj}\,A)^t=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -12 & -4 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/3 & 0\\ -4 & -4/3 & 1\\ 1 & 1/3 & 0\end{pmatrix}}$$

**c)** Para $k=0$ resuélvase la ecuación matricial $A\cdot X=B$.

$$A\cdot X=B \rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow \boxed{X=A^{-1}\cdot B}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1/3 & 0\\ -4 & -4/3 & 1\\ 1 & 1/3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -10 & -8\\ 3 & 2\end{pmatrix}}$$

Comprobación: $A\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -10 & -8\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}=B$

Se consideran las matrices: $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de $a$ para los cuales la matriz A no tiene inversa.
b) Para $a=2$ calcular la inversa de la matriz A.
c) Para $a=2$ calcular la matriz $X$ que satisface $A\cdot X=B$
*(PAU Madrid CCSS Modelo 2011 – Opción B)*

---

## Solución:

**a)** Calcular los valores de $a$ para los cuales la matriz $A$ no tiene inversa.

Para que una matriz tenga inversa debe ser cuadrada y su determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \xrightarrow{F_3=F_3+F_1} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ a & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & -5 \end{vmatrix} = 5-a^2=0 \rightarrow a=\pm\sqrt{5}$$

Por tanto $\boxed{a\neq\pm\sqrt{5}}$

**b)** Para $a=2$ calcular la inversa de la matriz A.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=5-a^2=5-2^2=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(Adj\ \mathrm{A}\right)^t=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -5 & -2 & 12 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}^t \rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}}$$

**c)** Para $a=2$ calcular la matriz $X$ que satisface $A\cdot X=B$

$$A\cdot X=B \rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow \boxed{X=A^{-1}\cdot B}$$

$$X=\begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}$$

Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2\cdot(a+1) & a+1 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de $a$ para los cuales no existe la matriz inversa.
b) Para $a=-1$, calcúlese la matriz inversa $A^{-1}$.
c) Para $a=0$, calcúlense todas las soluciones del sistema lineal $A\cdot X=0$.
*(PAU Madrid CCSS Septiembre 2010 FE – Opción B)*

---

**Solución:**

**a)** La matriz inversa no existe cuando su determinante es nulo:

$$|A|=\begin{vmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2\cdot(a+1) & a+1 \end{vmatrix} = \xrightarrow{C_1=C_1-C_3} = \begin{vmatrix} a-1 & 2 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ a-1 & 2\cdot(a+1) & a+1 \end{vmatrix} = \xrightarrow{F_3=F_3-F_1} =$$

$$=\begin{vmatrix} a-1 & 2 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2a & a+2 \end{vmatrix} = (a-1)\cdot\left(a^2+2a-4a\right)=a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\neq 0 \rightarrow \boxed{\begin{matrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{matrix}}$$

**b)** Para $a=-1$ calcular la inversa

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Determinante}} |A|=-6 \xrightarrow{\text{Menores complementarios}} \alpha_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz de adjuntos}}$$

$$\xrightarrow{\text{Matriz de adjuntos}} Adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta de la adjunta}} Adj(A)^t=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}}$$

**c)** Para $a=0$ resolver el sistema $A\cdot X=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda}$$

$$\xrightarrow{z=\lambda} \left(\left.\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & \lambda \\ 0 & 2 & -\lambda \end{array}\right)\right| \begin{matrix} \xrightarrow{-2+2\cdot(-\lambda/2)=\lambda} \\ \xrightarrow{2y=-\lambda} \\ \xrightarrow{z=\lambda} \end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix} x=-\lambda \\ y=-\lambda/2 \\ z=\lambda \end{matrix}}$$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}$ estudiarla para qué valores de $a$ tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

*(PAU Madrid II Junio 2010 FE)*

---

## Solución:

**a)** Para qué valores de $a$ existe $A^{-1}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=a=0 \quad\rightarrow\quad \exists \text{ inversa siempre que } a\neq 0$$

**b)** Calcular $A^{-1}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Determinante}} |A|=a \xrightarrow{\text{Matriz de menores complementarios}} \alpha_{ij}=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ a^2-1 & a & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adj}(A)}$$

$$\xrightarrow{\text{Adj}(A)} \text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 1-a^2 & a & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adj}(A)^t} \begin{pmatrix}a & 1-a^2 & -1\\ 0 & a & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{a}\cdot\begin{pmatrix}a & 1-a^2 & -1\\ 0 & a & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$