CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
2021

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:

Despeje X en la ecuación matricial $B\left(X-I\right)=A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema: $\begin{cases} mx+y+z=2m \\ mx+\left(m+1\right)y+z=1 \\ mx+\left(m+1\right)y+2z=m+1 \end{cases}$

3. Análisis

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de a, b y c que hacen que $f\left(x\right)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpla $f(0)=1$ y tenga extremos relativos en $x=\pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

4. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x)=x+6$ y $g\left(x\right)=\begin{cases} -2x & si \quad x<0 \\ x^2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas

$$\pi:\begin{cases} x=1-\lambda, \\ y=2+\mu, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R} \\ z=1+\lambda+2\mu, \end{cases}$$

b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ y $D(2,0,2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

6. Geometría:

Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi:2x-y+z+3=0$.

7. Estadística y Probabilidad:

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.

b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

8. Estadística y Probabilidad:

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:
Despeje X en la ecuación matricial $B(X-I)=A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$B(X-I)=A \Rightarrow B^{-1}B(X-I)=B^{-1}A \Rightarrow X-I=B^{-1}A \Rightarrow X=B^{-1}A+I$$

Hallamos la inversa de B.

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\neq 0$$

$$B^{-1}=\frac{Adj(B^T)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}}{1/6}=6\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=6\begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión $X=B^{-1}A+I$.

$$X=B^{-1}A+I$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema: $\begin{cases} mx + \quad y + \quad z = 2m \\ mx + (m+1)y + \quad z = 1 \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1 \end{cases}$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{vmatrix} = m(m+1)2 + m + \cancel{m(m+1)} - \cancel{m(m+1)} - 2m - m(m+1)$$

$$|A| = 2m(m+1) - m(m+1) + m - 2m = m(m+1) - m = m^2 + m - m = m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=0}$$

Nos planteamos dos casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq 0$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Para analizar con facilidad esta situación transformamos la matriz ampliada A/B en una matriz triangular equivalente usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{Fila } 2^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}}} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \multicolumn{4}{l}{\text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}}} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \multicolumn{4}{l}{\text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila } 3^{\text{a}} \leftrightarrow \text{Fila } 2^{\text{a}}\} \Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right)$$

Observando la matriz triangular vemos que el rango de A es 2 y el de A/B es 3.

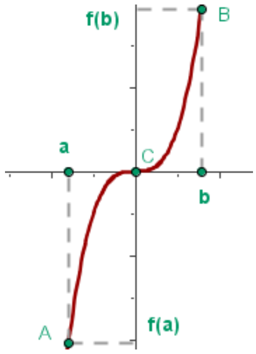
Como tienen distinto rango el sistema es **incompatible**, sin solución.

3. Análisis

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de a, b y c que hacen que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpla $f(0)=1$ y tenga extremos relativos en $x=\pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

a) **Teorema de Bolzano.** Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y que toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un valor $c\in(a,b)$ tal que *f(c) = 0*.



b) Debe cumplirse que $f(0)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2-3x+c \\ f(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2-3\cdot 0+c \Rightarrow \boxed{c=1}$$

Debe cumplirse que $f'(1)=0$ y $f'(-1)=0$.

$$f(x)=ax^3+bx^2-3x+c \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx-3$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3ax^2+2bx-3 \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot 1^2+2b\cdot 1-3 \Rightarrow \boxed{0=3a+2b-3}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3ax^2+2bx-3 \\ f'(-1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot(-1)^2+2b\cdot(-1)-3 \Rightarrow \boxed{0=3a-2b-3}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$(+)\left.\begin{array}{l} 3a+2b-3=0 \\ 3a-2b-3=0 \end{array}\right\}$$
$$6a \quad -6=0 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow 3+2b-3=0 \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

Los valores buscados son $a=1$, $b=0$ y $c=1$.

Averiguamos si $x=\pm 1$ son máximos o mínimos sustituyendo estos valores en la derivada segunda.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3ax^2+2bx-3 \\ a=1 \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f''(x)=6x$$

$x=+1 \Rightarrow f''(1)=6>0$. En $x=1$ hay un mínimo relativo.

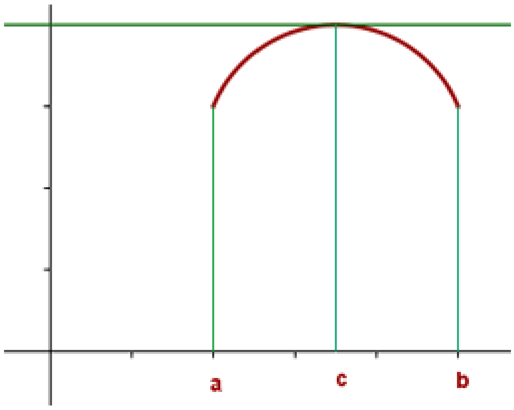
$x=-1 \Rightarrow f''(-1)=-6<0$. En $x=-1$ hay un máximo relativo.

4. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x)=x+6$ y $g(x)=\begin{cases}-2x & si \quad x<0\\ x^2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) **Teorema de Rolle**: Sea *f(x)* una función **continua** en [a, b] y **derivable** en (a, b) y que, además, cumple que *f(a) = f(b)*. Entonces existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que *f ´(c) = 0*.



b) Averiguamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x+6\\ g(x)=\begin{cases}-2x & si \quad x<0\\ x^2 & si \quad x\geq 0\end{cases}\\ f(x)=g(x)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}(x<0)\to x+6=-2x\Rightarrow 3x=-6\Rightarrow x=-2\,Válido(x<0)\\ (x\geq 0)\to x^2=x+6\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2+24}}{2}\Rightarrow\\ \Rightarrow x=\dfrac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+5}{2}=3 & Válido(x\geq 0)\\ \dfrac{1-5}{2}=-2 & No\ válido(x\geq 0)\end{cases}\end{cases}$$

Por el cambio de definición de la función la región la podemos dividir en dos partes, una entre *x = –2* y *x = 0* y la otra entre *x = 0* y *x = 3.*

En el intervalo (–2, 0) la función *g(x)* es *g(x) = –2x* y el área de la región es:

$$\int_{-2}^{0} f(x)-g(x)dx=\int_{-2}^{0} x+6-(-2x)dx=\int_{-2}^{0} 3x+6dx=\left[3\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{0}=$$

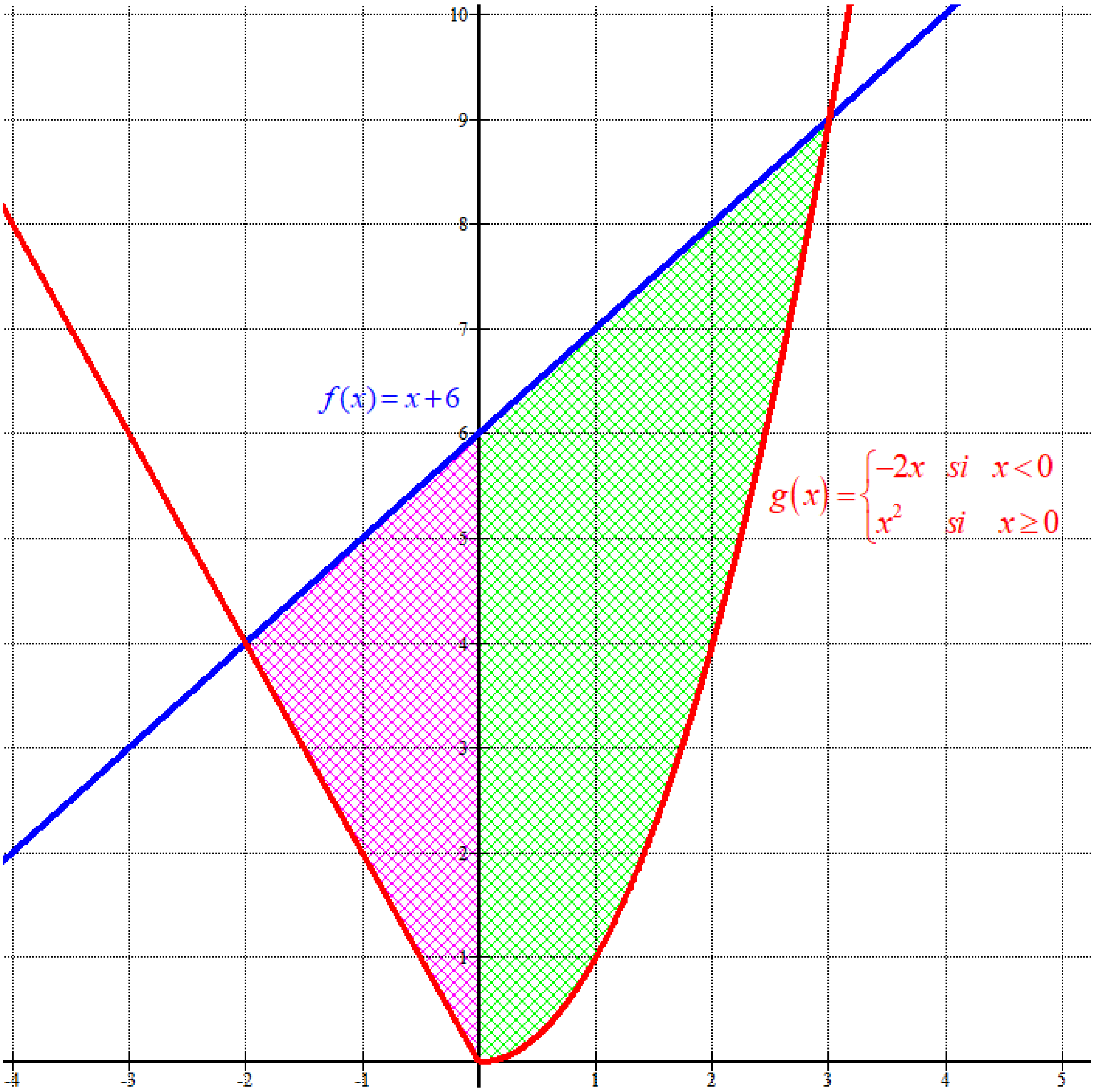
$$=\left[3\frac{0^2}{2}+0\right]-\left[3\frac{(-2)^2}{2}+6(-2)\right]=6$$

En el intervalo (0, 3) la función *g(x)* es *g(x) = x^2* y el área de la región es:

$$\int_0^3 f(x)-g(x)\,dx=\int_0^3 x+6-x^2dx=\left[\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=$$
$$=\left[\frac{3^2}{2}+18-\frac{3^3}{3}\right]-\left[\frac{0^2}{2}+0-\frac{0^3}{3}\right]=4.5+18-9=13.5$$

El área total es 6 + 13.5 = 19.5 u^2.

No lo piden, pero dibujamos la función para comprobar el resultado.



5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases}$$

b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ y $D(2,0,2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

a) Obtenemos dos vectores directores del plano y un punto contenido en él.

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{cases} \vec{u} = (-1,0,1) \\ \vec{v} = (0,1,2) \\ P(1,2,1) \in \pi \end{cases}$$

Obtenemos la ecuación implícita.

$$\pi : \begin{cases} \vec{u} = (-1,0,1) \\ \vec{v} = (0,1,2) \\ P(1,2,1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -z + 1 + 2y - 4 - x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : x - 2y + z + 2 = 0}$$

b) Hallamos el plano π que contiene a los puntos B, C y D. Luego calculamos *m* para que A pertenezca al plano π.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{BC} = (1,4,3) - (0,2,2) = (1,2,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BD} = (2,0,2) - (0,2,2) = (2,-2,0) \\ B(0,2,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y - 4 - 2z + 4 - 4z + 8 + 2x = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 6z + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y - 3z + 4 = 0}$$

Hacemos que A pertenezca al plano $\pi : x + y - 3z + 4 = 0$.

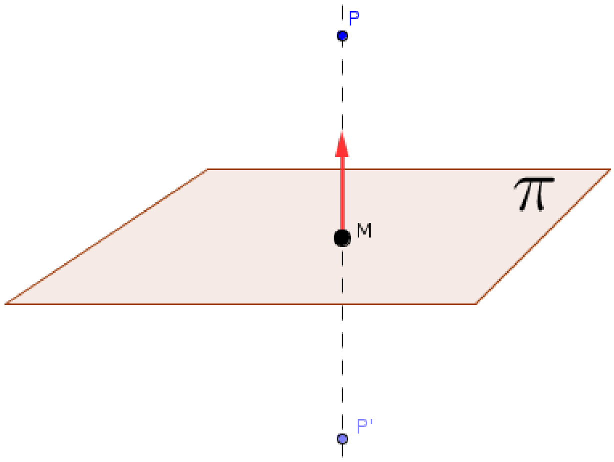
$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y - 3z + 4 = 0 \\ A(0,m,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + m - 0 + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -4}$$

El valor buscado es $m = -4$.

La ecuación del plano que contiene a los puntos A, B, C y D es $\pi : x + y - 3z + 4 = 0$.

6. Geometría:
Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

a) Debemos hallar el punto P´ del dibujo.



Obtenemos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. El vector director de la recta r será el vector normal del plano.

$$\pi: 2x - y + z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2,-1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = \vec{n} = (2,-1,1) \\ P(1,1,2) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Determinamos las coordenadas del punto M intersección de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 2x - y + z + 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+2t) - (1-t) + 2 + t + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4t - 1 + t + 2 + t + 3 = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{-6}{6} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(-1,2,1)$$

Determinamos las coordenadas del punto $P´(a, b, c)$ simétrico de P respecto del plano π haciendo que los vectores $\overrightarrow{PM}$ y $\overrightarrow{MP´}$ sean iguales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PM} = (-1,2,1) - (1,1,2) = (-2,1,-1) \\ \overrightarrow{MP´} = (a,b,c) - (-1,2,1) = (a+1, b-2, c-1) \end{array}\right\} \Rightarrow (-2,1,-1) = (a+1, b-2, c-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = a + 1 \Rightarrow a = -3 \\ 1 = b - 2 \Rightarrow b = 3 \\ -1 = c - 1 \Rightarrow c = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P´(-3,3,0)}.$$

El punto P´ simétrico de P con respecto al plano π tiene coordenadas $P´(-3,3,0)$

7. Estadística y Probabilidad:
En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:
a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.
b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

Realizamos una tabla de contingencia para organizar los datos.

	Tienen mascota	No tienen mascota	
Practican yoga	**3**		**8**
No practican yoga			
	20		**100**

Completamos la tabla.

	Tienen mascota	No tienen mascota	
Practican yoga	**3**	**5**	**8**
No practican yoga	**17**	**75**	**92**
	20	**80**	**100**

a) Mirando en la tabla se observa que de una población de 100 personas hay 17 que no practican yoga y tienen mascota. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(No\ practique\ yoga\ y\ a\ la\ vez\ tenga\ mascota\right)=\boxed{\frac{17}{100}=0.17}$$

	Tienen mascota	No tienen mascota	
Practican yoga	[illegible]		
No practican yoga	**17**	[illegible]	[illegible]
		[illegible]	**100**

b) Mirando en la tabla se observa que de los 8 que practican yoga hay 3 que tienen mascota. Aplicamos la regla de Laplace.

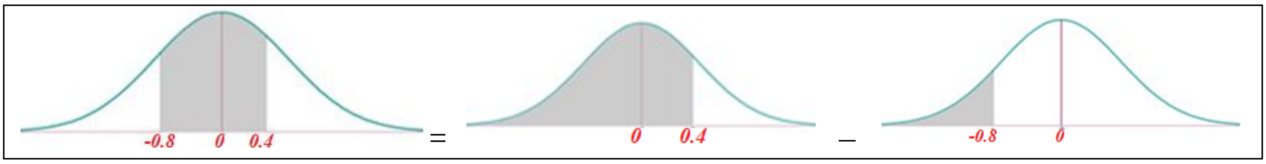
$$P\left(Tenga\ mascota\ sabiendo\ que\ practica\ yoga\right)=\boxed{\frac{3}{8}=0.375}$$

	Tienen mascota	No tienen mascota	
Practican yoga	**3**		**8**
No practican yoga			

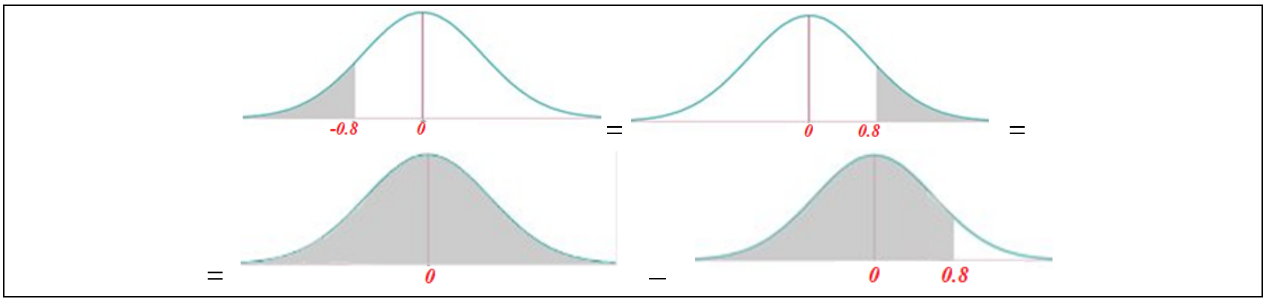
8. Estadística y Probabilidad:
El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

X = Grosor de una plancha de acero en mm.
X = N(8, 0.5)

$$P(7.6 \le X \le 8.2) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Tipificamos} \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \\ Z = N(0,1) \end{array} \right\} = P\left(\frac{7.6-8}{0.5} \le Z \le \frac{8.2-8}{0.5}\right) = P(-0.8 \le Z \le 0.4) = \ldots$$

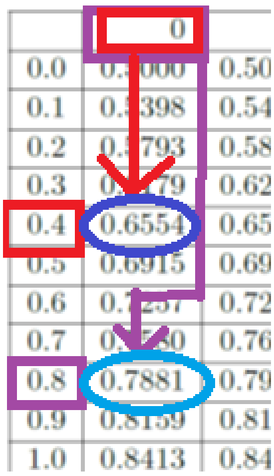


$$\ldots = P(Z \le 0.4) - P(Z \le -0.8) = \ldots$$



$$\ldots = P(Z \le 0.4) - P(Z > 0.8) = P(Z \le 0.4) - \left[1 - P(Z \le 0.8)\right] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\} = 0.6554 - [1 - 0.7881] = \boxed{0.4435}$$



	0	
0.0	[illegible]	0.50
0.1	[illegible]	0.54
0.2	[illegible]	0.58
0.3	[illegible]	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	[illegible]	0.72
0.7	[illegible]	0.76
0.8	0.7881	0.79
0.9	0.8159	0.81
1.0	0.8413	0.84