Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} ax \quad + z = a \\ 2x - y - z = -1 \\ x \quad + az = a \end{array}\right\} \; a \in \mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de *a*. (1.5 puntos)
b) Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)

Bloque 1.B Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

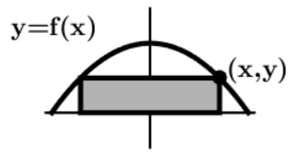
a) Si existe, su inversa. (1 punto)
b) La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica:

$(X+A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3$ (I_3 matriz identidad de orden 3). (1.5 puntos)

Bloque 2.A Sea la función $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

a) Haz un esbozo de su gráfica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad. (1.5 puntos)
b) Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$; la recta y = 1 y el eje de ordenadas. (1 punto)

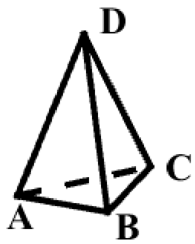
Bloque 2.B En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) = 12 - \dfrac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos *(x, y)* que hacen máxima el área de la pantalla. (2.5 puntos)



Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

Bloque 3.A. Sea el tetraedro de la figura formado por A(3, 0. 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 6) y D(α, 3, 1). Calcula:



a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C. (0.5 puntos)
b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. (0.75 puntos)
c) El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior. (0.75 puntos)
d) Para α = 5, el punto D´ simétrico de D respecto al plano π. (0.5 puntos)

Bloque 3.B. Sean el punto P(1, 0, 1) y la recta $r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ Calcula:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta *r*. (0.75 puntos)
b) La distancia de *r* a P y el punto $Q \in r$ donde se alcanza dicha distancia. (1 punto)
c) La ecuación del plano π que contiene a *r* y está a la misma distancia de P que *r*. (0.75 puntos)

Bloque 4.A. Se tienen tres cajas. En la caja A hay 4 bolas negras y 6 bolas rojas. En la caja B, 6 dados negros y 2 dados rojos y en la caja C, 2 dados negros y 4 dados rojos. El suceso consiste en sacar una bola y un dado. En primer lugar se extrae al azar una bola de la caja A. Si es negra, se extrae al azar un dado de la caja B pero, si la bola es roja se extrae al azar un dado de la caja C.
Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos sin relación entre ellos:

a) La probabilidad de que la bola y el dado sean rojos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color. (0.75 puntos)

c) La probabilidad de que el dado sea rojo. (1 punto)

Bloque 4.B. Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media μ = 30 y desviación típica σ = 10. Calcula:

a) La probabilidad de que X ≤ 20. (1.25 puntos)
b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la probabilidad del 50% se alcanza en el valor X ≤ 35. y la probabilidad del 75% se alcanza en el valor X ≤ 40. ¿Cuáles son las nuevas media y desviación típica?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x)=P(Z\le x)$; *F(0) = 0.5; F(0.6745) = 0.75; F(0.8416) = 0.8; F(1) = 0.8413; F(1.375) =0.9154; F(1.5) = 0.9332; F(2) = 0.9772)*

SOLUCIONES:

Bloque 1.A Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} ax \quad\quad + \ z = a \\ 2x \ - y \ - \ z = -1 \\ x \quad\quad + az = a \end{array}\right\} \ a \in \mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de *a*. (1.5 puntos)
b) Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a & a \end{array}\right)$

Hallamos el determinante de A y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq -1 \ \ y \ a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Transformamos la matriz ampliada en otra matriz triangular equivalente.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Fila 2ª + 2 · Fila 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & 1 & -3 \end{array} \\ \text{Nueva Fila 2ª} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Fila 3ª + Fila 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \\ \text{Nueva Fila 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Observando la matriz vemos que el rango de A es 2 y el de A/B es 3. Como son distintos el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Transformamos la matriz ampliada en otra matriz triangular equivalente.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\2&-1&-1&-1\\1&0&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 2^a - 2\cdot\text{Fila } 1^a}\\2&-1&-1&-1\\-2&0&-2&-2\\\hline 0&-1&-3&-3\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 2^a}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a}\\1&0&1&1\\-1&0&-1&-1\\\hline 0&0&0&0\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 3^a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A/B)'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&-1&-3&-3\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A}$$

Observando la matriz transformada vemos que el rango de A es 2 y el de A/B también es 2, pero distintos del número de incógnitas (3).
El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Es compatible indeterminado para $a=1$.
Lo resolvemos a partir de la matriz triangular equivalente a A/B.

$$\boxed{A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\2&-1&-1&-1\\1&0&1&1\end{array}\right)\Rightarrow (A/B)'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&-1&-3&-3\\0&0&0&0\end{array}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+z=1\\2x-y-z=-1\\x+z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+z=1\\-y-3z=-3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=1-z\\-y=-3+3z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=1-z\\y=3-3z\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\left.\begin{array}{r}x=1-\lambda\\y=3-3\lambda\\z=\lambda\end{array}\right\}\ siendo\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Bloque 1.B Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) Si existe, su inversa. (1 punto)
b) La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica:
$(X+A)^2 - X^2 - X\cdot A = I_3$ (I_3 matriz identidad de orden 3). (1.5 puntos)

a) Calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+4-2-4 = -1 \neq 0. \text{ Existe la inversa de A.}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$(X+A)^2 - X^2 - X\cdot A = I_3 \Rightarrow (X+A)(X+A) - X^2 - XA = I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{X^2} + \cancel{XA} + AX + A^2 - \cancel{X^2} - \cancel{XA} = I_3 \Rightarrow AX + A^2 = I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX = I_3 - A^2 \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}I_3 - A^{-1}AA \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} - A}$$

Sustituimos los valores de las matrices.

$$X = A^{-1} - A$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Bloque 2.A Sea la función $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

a) Haz un esbozo de su gráfica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad. (1.5 puntos)

b) Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=1$; la recta y = 1 y el eje de ordenadas. (1 punto)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
$Dominio\ f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x = 0$ es asíntota?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} 1-\frac{1}{x^2}=1-\frac{1}{0^2}=1-\infty=-\infty$$

La recta $x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} 1-\frac{1}{x^2}=1-\frac{1}{\infty}=1-0=1$$

La recta $y=1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene, pues existe asíntota horizontal.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Derivamos e igualamos a cero la derivada.

$$f(x)=1-\frac{1}{x^2}=1-x^{-2}\Rightarrow f'(x)=0+2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2}{x^3}=0\Rightarrow 2=0\ \text{¡¡Imposible!!}$$

La función no presenta puntos críticos.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$ (discontinuidad de la función).

- En $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{2}{(-1)^3}=-2<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En $(0,+\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{2}{1^3}=2>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.

La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$.

La función no presenta máximos ni mínimos relativos.

Intervalos de concavidad y convexidad.

Hallamos la segunda derivada e igualamos a cero.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3} \Rightarrow f''(x) = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6}{x^4} = 0 \Rightarrow 6 = 0 \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

La función no tiene puntos de inflexión.

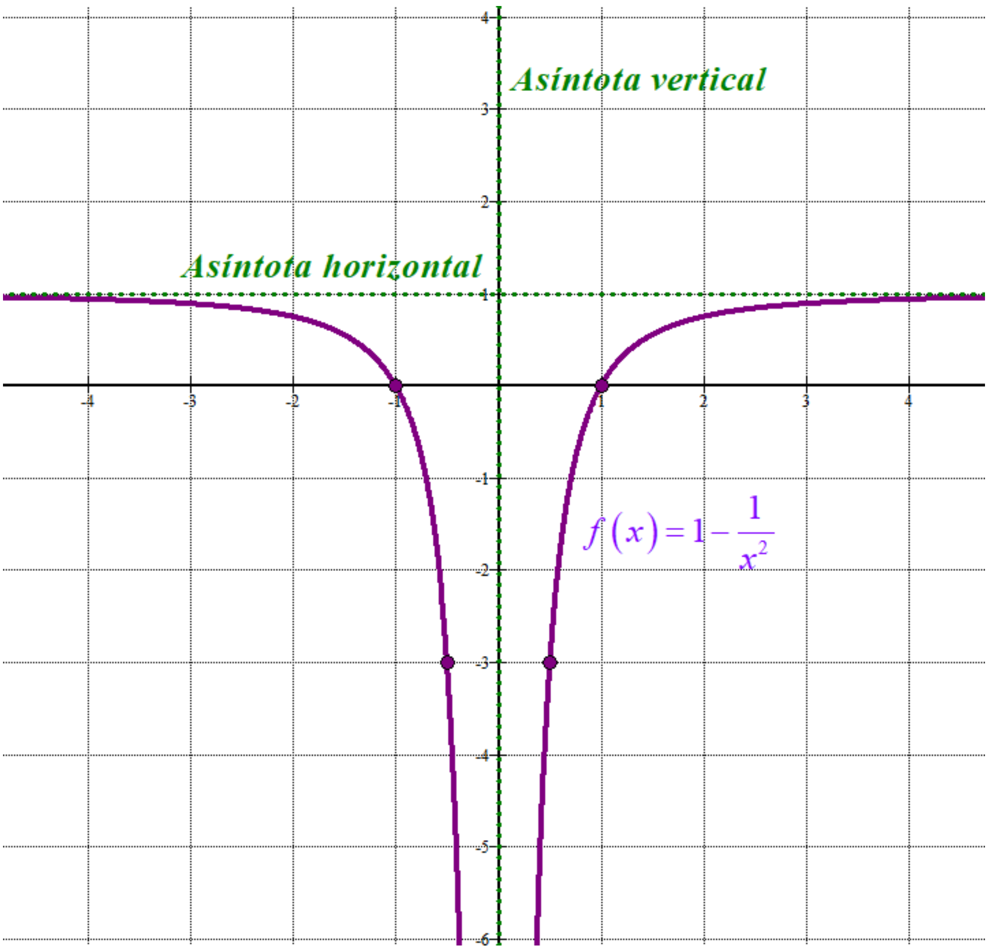
Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 0$ (discontinuidad de la función).

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale $f''(-1) = \frac{6}{(-1)^4} = 6 > 0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f''(1) = \frac{6}{1^4} = 6 > 0$. La función es cóncava (∩) en $(0, +\infty)$.

La función es cóncava en todo su dominio.

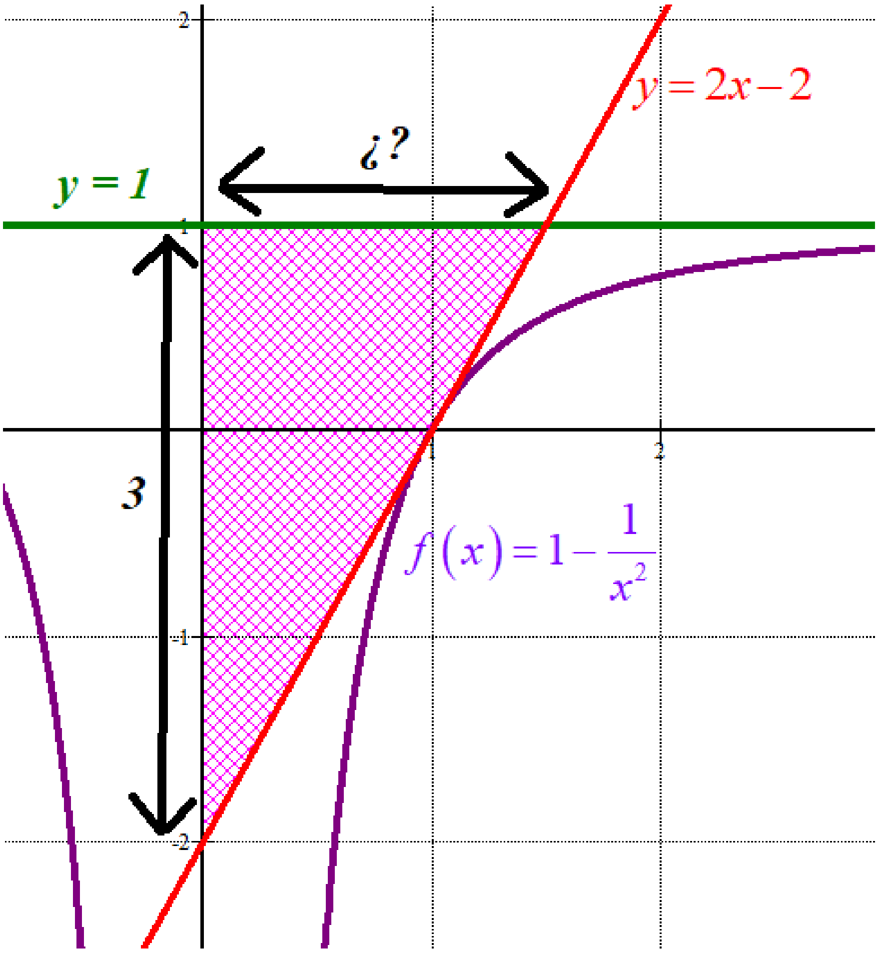
Añadimos una tabla de valores.

x	$y = 1 - \frac{1}{x^2}$
-2	0.75
-1	0
-0.5	-3
0.5	-3
1	0
2	0.75



b) Calculamos la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1-\dfrac{1}{1^2}=0 \\ f'(1)=\dfrac{2}{1^3}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=2(x-1) \Rightarrow \boxed{y=2x-2}$$

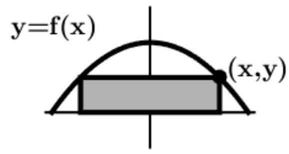


La región es un triángulo de altura 3 y nos falta determinar la base como el punto de corte de las rectas $y=1,\ y=2x-2$.

$$\left.\begin{array}{l} y=2x-2 \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=2x-2 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}=1.5}$$

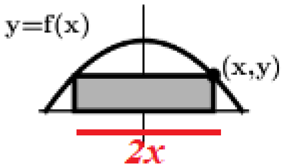
El área de la región pintada de rosa es $\dfrac{3\cdot 1.5}{2}=\boxed{2.25\,u^2}$

Bloque 2.B En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x)=12-\frac{x^2}{3}\geq 0$. Calcula los valores positivos *(x, y)* que hacen máxima el área de la pantalla. (2.5 puntos)



Si la función es $f(x)=12-\frac{x^2}{3}\geq 0$ veamos cual es el dominio de definición.

$$\frac{36-x^2}{3}\geq 0 \Rightarrow 36-x^2\geq 0 \Rightarrow (6-x)(6+x)\geq 0 \Rightarrow x\in(-6,6)$$



El área de la pantalla es base por altura → $A(x,y)=2xy$

Como los puntos *(x, y)* son los de la gráfica de $f(x)=12-\frac{x^2}{3}$ entonces tenemos que el área depende solo del valor de *x*.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=2xy \\ y=12-\frac{x^2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=2x\left(12-\frac{x^2}{3}\right)=24x-\frac{2x^3}{3}$$

Derivamos e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$A(x)=24x-\frac{2x^3}{3} \Rightarrow A'(x)=24-3\frac{2x^2}{3}=24-2x^2$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow 24-2x^2=0 \Rightarrow x^2=12 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{12}}$$

Tomamos el valor positivo $x=+\sqrt{12}\simeq 3.46$, que es un punto crítico de la función y está en el intervalo $(-6,6)$.

Calculamos la segunda derivada y sustituimos $x=+\sqrt{12}$ para comprobar si es máximo.

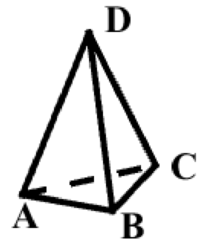
$$A'(x)=24-2x^2 \Rightarrow A''(x)=-4x \Rightarrow A''\left(\sqrt{12}\right)=-4\sqrt{12}<0$$

La función *A(x)* presenta un máximo relativo en $x=+\sqrt{12}$.

También es absoluto en el intervalo $(-6,6)$ pues $f(6)=12-\frac{6^2}{3}=0$.

Como $f\left(\sqrt{12}\right)=12-\frac{\left(\sqrt{12}\right)^2}{3}=12-4=8$ el punto buscado es $\left(\sqrt{12},8\right)$

Bloque 3.A. Sea el tetraedro de la figura formado por A(3, 0. 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 6) y D(α, 3, 1). Calcula:
a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C. (0.5 puntos)
b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. (0.75 puntos)
c) El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior. (0.75 puntos)
d) Para α = 5, el punto D´ simétrico de D respecto al plano π. (0.5 puntos)



a) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)-(3,0,0)=(-3,2,0)$$
$$\overrightarrow{AC}=(0,0,6)-(3,0,0)=(-3,0,6)$$
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix}=(12,18,6)$$
$$\acute{A}rea\ ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{12^2+18^2+6^2}}{2}=\boxed{3\sqrt{14}\simeq 11.225\,u^2}$$

b) El plano pedido tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y pasa por el punto A.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-3,2,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-3,0,6) \\ A(3,0,0)\in\pi \end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 12x-36+6z+18y=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi\equiv 2x+3y+z-6=0}$$

c) Para que sea $\overrightarrow{AD}$ perpendicular al plano deben ser el vector normal del plano y $\overrightarrow{AD}$ vectores con coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD}=(\alpha,3,1)-(3,0,0)=(\alpha-3,3,1) \\ \pi\equiv 2x+3y+z-6=0\rightarrow \vec{n}=(2,3,1) \\ \vec{n}\ y\ \overrightarrow{AD} \text{ con coordenadas proporcionales} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\alpha-3}{2}=\frac{3}{3}=\frac{1}{1}\Rightarrow\frac{\alpha-3}{2}=1\Rightarrow\alpha-3=2\Rightarrow\boxed{\alpha=5}$$

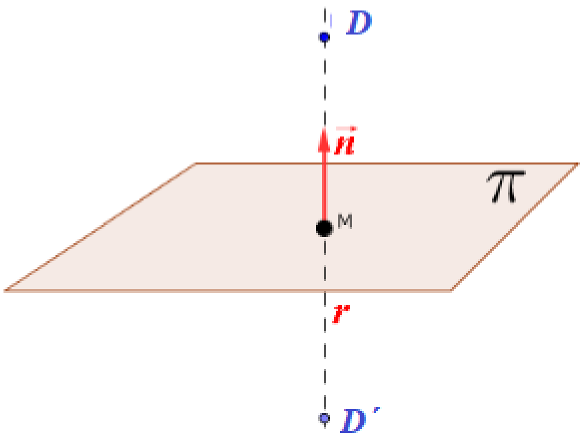
d) Hallamos la ecuación de la recta *t* perpendicular al plano $\pi\equiv 2x+3y+z-6=0$ que pasa por el punto D(5, 3, 1).

$$\left.\begin{array}{l} D(5,3,1)\in t \\ \vec{v_t}=\vec{n}=(2,3,1) \end{array}\right\}\Rightarrow t\equiv\begin{cases} x=5+2\alpha \\ y=3+3\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte M de la recta *t* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{r} t \equiv \begin{cases} x = 5+2\alpha \\ y = 3+3\alpha \\ z = 1+\alpha \end{cases} \\ \pi \equiv 2x+3y+z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(5+2\alpha)+3(3+3\alpha)+1+\alpha-6=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10+4\alpha+9+9\alpha+1+\alpha-6=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14\alpha+14=0 \Rightarrow 14\alpha=-14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=5-2=3 \\ y=3-3=0 \Rightarrow M(3,0,0) \\ z=1-1=0 \end{cases}$$



El punto simétrico *D´(a,b,c)* es un punto tal que el vector $\overrightarrow{D´M} = \overrightarrow{MD}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{D´M} = (3,0,0)-(a,b,c) = (3-a,-b,-c) \\ \overrightarrow{MD} = (5,3,1)-(3,0,0) = (2,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow (3-a,-b,-c) = (2,3,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3-a=2 \to a=1 \\ -b=3 \to b=-3 \Rightarrow \boxed{D´(1,-3,-1) \text{ Simétrico de D respecto del plano } \pi} \\ -c=1 \to c=-1 \end{cases}$$

OTRA FORMA MÁS FÁCIL Y MÁS RÁPIDA

Como el vector $\overrightarrow{AD}$ para α = 5 es perpendicular al plano π el punto M del dibujo superior es el punto A (de hecho nos ha salido ese punto), por lo que el punto D´ es el resultado de la suma del punto A y el vector $\overrightarrow{DA}$.

$$\overrightarrow{DA} = (3,0,0)-(5,3,1) = (-2,-3,-1) \Rightarrow D´ = A+\overrightarrow{DA} = (3,0,0)+(-2,-3,-1) \Rightarrow \boxed{D´=(1,-3,-1)}$$

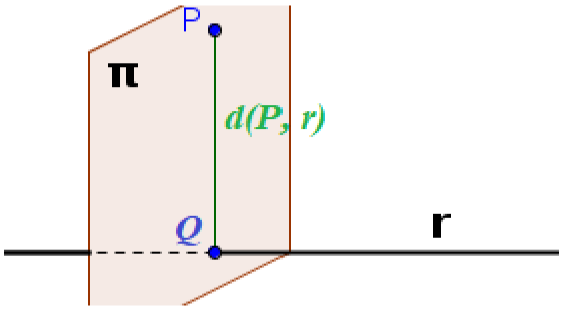
Bloque 3.B. Sean el punto P(1, 0, 1) y la recta $r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ Calcula:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta *r*. (0.75 puntos)
b) La distancia de *r* a P y el punto $Q \in r$ donde se alcanza dicha distancia. (1 punto)
c) La ecuación del plano π que contiene a *r* y está a la misma distancia de P que *r*. (0.75 puntos)

a)

$$r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=-y \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-z \end{cases} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}}$$

b) Hallamos el plano π perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P.
Determinamos el punto Q de corte de recta y plano.
La distancia entre P y *r* es el módulo del vector que une los puntos P y Q.



Hallamos el plano π perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P. Este plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$r:\begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_r}=(-1,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{u_r}=(-1,0,1) \\ P(1,0,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi\equiv -x+z+D=0 \\ P(1,0,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow -1+1+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \boxed{\pi\equiv -x+z=0}$$

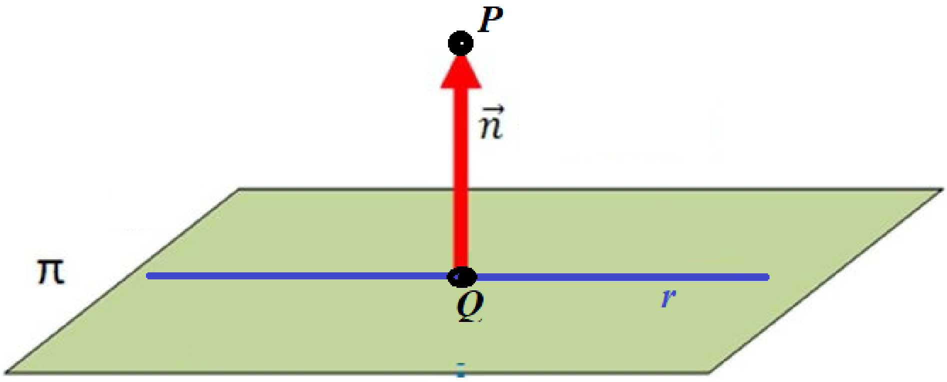
Determinamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi\equiv -x+z=0 \\ r:\begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(0,0,0)}$$

La distancia entre P y *r* es el módulo del vector que une los puntos P y Q.

$$\overrightarrow{QP}=(1,0,1)-(0,0,0)=(1,0,1) \Rightarrow d(P,r)=d(P,Q)=\left|\overrightarrow{QP}\right|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\boxed{\sqrt{2}\ u}$$

c) Tenemos que hallar la ecuación del plano π que contiene a la recta *r* y que es perpendicular al vector $\overrightarrow{QP}$.



Este plano tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{QP}$ y pasa por el punto Q.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{QP}=(1,0,1)\\ Q(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+z+D=0\\ Q(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 0+0+D=0\Rightarrow D=0\Rightarrow\boxed{\pi\equiv x+z=0}$$

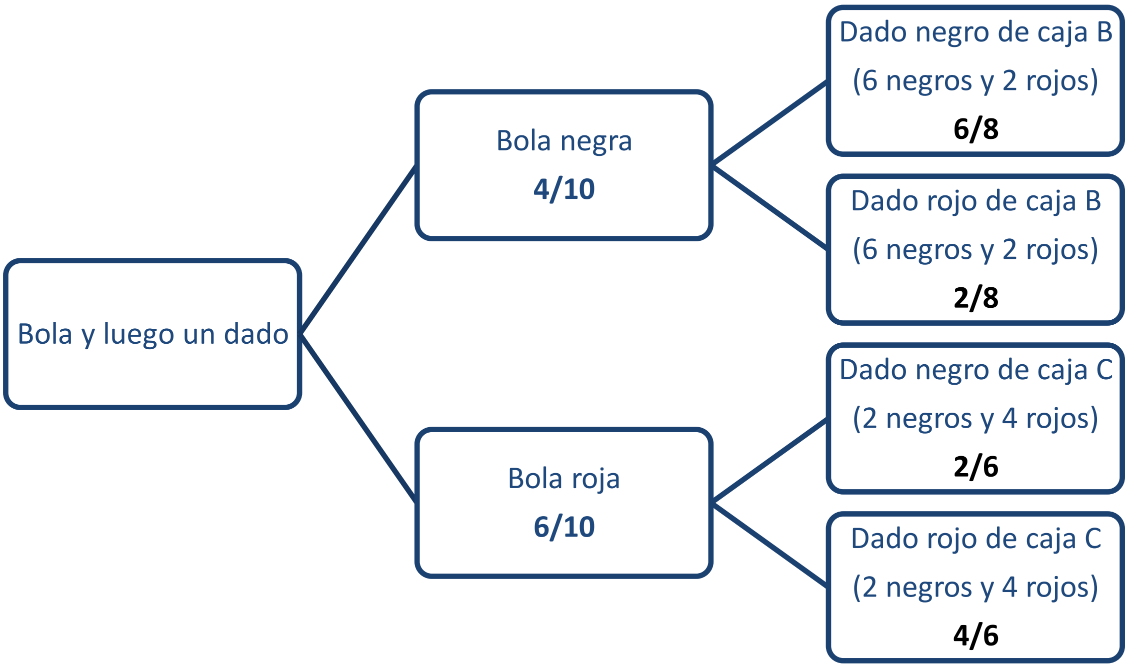
Bloque 4.A. Se tienen tres cajas. En la caja A hay 4 bolas negras y 6 bolas rojas. En la caja B, 6 dados negros y 2 dados rojos y en la caja C, 2 dados negros y 4 dados rojos. El suceso consiste en sacar una bola y un dado. En primer lugar se extrae al azar una bola de la caja A. Si es negra, se extrae al azar un dado de la caja B pero, si la bola es roja se extrae al azar un dado de la caja C.
Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos sin relación entre ellos:

a) La probabilidad de que la bola y el dado sean rojos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color. (0.75 puntos)

c) La probabilidad de que el dado sea rojo. (1 punto)

a) Hacemos un diagrama de árbol para establecer las distintas opciones que pueden ocurrir y sus probabilidades.



Llamamos BN a "Sacar bola negra" BR a "Sacar bola roja" y DN a "Sacar dado negro" y DR a "Sacar dado rojo".

a)

$$P(BR \cap DR) = P(BR)P(DR/BR) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{5} = 0.4}$$

b) Para que sean del mismo color debe ser bola y dado rojo o bola y dado negro.

$$P\big((BR \cap DR) \cup (BN \cap DN)\big) = P(BR \cap DR) + P(BN \cap DN) =$$

$$= 0.4 + P(BN)P(DN/BN) = 0.4 + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{8} = 0.4 + 0.3 = \boxed{0.7}$$

c) Que salga el dado rojo puede ocurrir de dos formas: bola roja y dado rojo o bola negra y dado rojo.

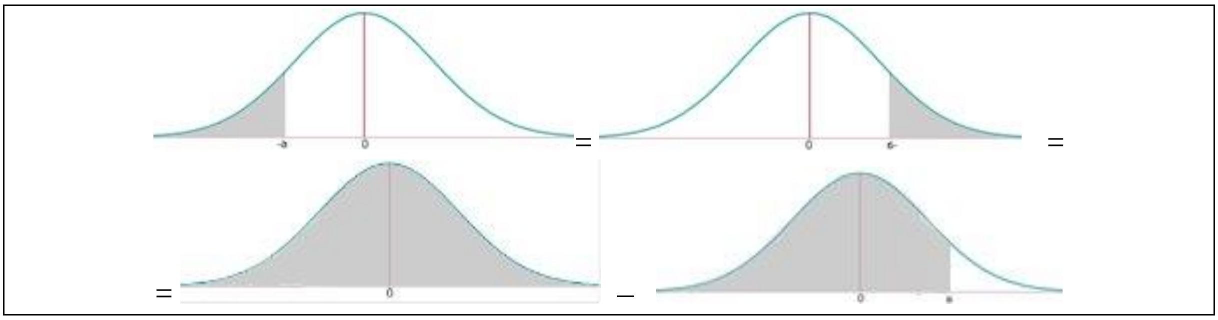
$$P(\text{Dado rojo}) = P(BR \cap DR) + P(BN \cap DR) = 0.4 + P(BN)P(DR/BN) =$$

$$= 0.4 + \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{8} = 0.4 + 0.1 = \boxed{0.5}$$

Bloque 4.B. Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media μ = 30 y desviación típica σ = 10. Calcula:
a) La probabilidad de que X ≤ 20. (1.25 puntos)
b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la probabilidad del 50% se alcanza en el valor X ≤ 35. y la probabilidad del 75% se alcanza en el valor X ≤ 40. ¿Cuáles son las nuevas media y desviación típica?

a) Sea X = N(30, 10).

$$P(X \leq 20) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{20-30}{10}\right) = P(Z \leq -1) = \ldots$$



$$\ldots = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

b) Tenemos X = N(μ, σ)

Y sabemos que $P(X \leq 35) = 0.5$ y que $P(X \leq 40) = 0.75$, por lo que:

$$P(X \leq 35) = P\left(Z \leq \frac{35-\mu}{\sigma}\right) = 0.5 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en los datos} \\ F(0) = 0.5\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{35-\mu}{\sigma} = 0}$$

$$P(X \leq 40) = P\left(Z \leq \frac{40-\mu}{\sigma}\right) = 0.75 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en los datos} \\ F(0.6745) = 0.75\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{40-\mu}{\sigma} = 0.6745}$$

Juntamos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{35-\mu}{\sigma} = 0 \\ \dfrac{40-\mu}{\sigma} = 0.6745\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}35-\mu = 0 \\ 40-\mu = 0.6745\sigma\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\boxed{\mu = 35} \\ 40-\mu = 0.6745\sigma\end{array}\right\} \Rightarrow 40-35 = 0.6745\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{5}{0.6745} = 7.413}$$

La nueva media es $\mu = 35$ y la desviación típica es σ = 7.413.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$; ***F(0) = 0.5***; ***F(0.6745) = 0.75***; *F(0.8416) = 0.8*; ***F(1) = 0.8413***; *F(1.375) =0.9154; F(1.5) = 0.9332; F(2) = 0.9772*)