Bloque 1 (Algebra Lineal) (*Puntuación máxima 3 puntos*)

Opción 1. a) Sean **A**, **B** y **C** tres matrices de tal manera que el producto **ABC** es una matriz **3x2** y el producto $\mathbf{A.C^t}$ es una matriz cuadrada, siendo $\mathbf{C^t}$ la transpuesta de **C**. Calcular, razonando la respuesta, las dimensiones de **A**, **B** y **C**.

b) Dada $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ obtener todas las matrices **X** que conmutan con **M**, es decir, verifican **XM** = **MX**

c) Calcular la matriz **Y** que verifica $\mathbf{MY + M^{-1}.Y = I}$, siendo la matriz dada en b), $\mathbf{M^{-1}}$ la inversa de la matriz **M** y **I** la matriz identidad de orden 2

a)

Siendo **ABC** de dimensiones **3 x 2** las posibilidades son:

AB	C
3 x 1	1 x 2
3 x 2	2 x 2
3 x 3	3 x 2

Siendo $\mathbf{AC^t}$ cuadrada

C	C^t	A	C^t	Resultado
1 x 2	2 x 1	1 x 2	2 x 1	1 x 1
2 x 2	2 x 2	2 x 2	2 x 2	2 x 2
3 x 2	2 x 3	3 x 2	2 x 3	3 x 3

AB	A	B
3 x 1	1 x 2	Imposible
	2 x 2	Imposible
	3 x 2	2 x 1
3 x 2	1 x 2	Imposible
	2 x 2	Imposible
	3 x 2	2 x 2
3 x 3	1 x 2	Imposible
	2 x 2	Imposible
	3 x 2	2 x 3

Resultado final

A	B	AB	C	C^t	AC^t	ABC
3 x 2	2 x 1	3 x 1	1 x 2	2 x 1	3 x 1 (NO)	3 x 2
3 x 2	2 x 2	3 x 2	2 x 2	2 x 2	3 x 2 (NO)	3 x 2
3 x 2	2 x 3	3 x 3	3 x 2	2 x 3	3 x 3	3 x 2

Continuación de la Opción 1 del Bloque 1

$b)$

$$Sea\ X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a+b & -b \\ -c+d & -d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -a=-a+b \Rightarrow b=0 \\ -b=-b \\ a-c=-c+d \Rightarrow a=d \\ b-d=-d \Rightarrow b=0 \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

$c)$

$$Y\left(M+M^{-1}\right)=I \Rightarrow Y\left(M+M^{-1}\right)\left(M+M^{-1}\right)^{-1}=I\left(M+M^{-1}\right)^{-1} \Rightarrow YI=\left(M+M^{-1}\right)^{-1} \Rightarrow Y=\left(M+M^{-1}\right)^{-1}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow Existe\ M^{-1} \Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{|M|}\cdot\left(adj\ M^t\right) \Rightarrow M^t=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ M^t=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M+M^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|M+M^{-1}\right|=\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=4\neq 0 \Rightarrow Existe\ \left(M+M^{-1}\right)^{-1} \Rightarrow \left(M+M^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{\left|M+M^{-1}\right|}\cdot\left[adj\ \left(M+M^{-1}\right)^t\right]$$

$$\left(M+M^{-1}\right)^t=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ \left(M+M^{-1}\right)^t=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y=\left(M+M^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Opción 2.-

a) Si un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, el rango de la matriz de los coeficientes es **3**, ¿podemos afirmar que el sistema es compatible? Razona la respuesta.

b) Discute, segundo los valores del parámetro ***m***, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y+mz=0 \\ x+z=0 \\ mx-y=m \end{cases}$$

c) Resuelve el sistema anterior para el caso en que ***m = 0***

a) El sistema es **Compatible Determinado**, porque eso determina que el rango de la matriz ampliada sea también 3, al coincidir el rango de las dos matrices es Compatible tal como determina el teorema de Rouche y como este valor es igual al número de incógnitas y, según la regla de Cramer, tiene una solución única

$b)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix}=m-m=0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -m & m \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m\neq 0 \Rightarrow rang(A)=2\neq rang(A)=3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible \\ m=0 \Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado \end{cases}$$

Continuación de la Opción 2 del Bloque 1

$$b) Si\ m = 0 \Rightarrow Sistema\ homogéneo \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow x = -z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (-\lambda\ ,\ 0\ ,\ \lambda)$$

Bloque 2 (Geometría) (*Puntuación máxima 3 puntos*)

Opción 1.-

a) Dados los vectores $\vec{u} = (1\ ,0\ ,-1)$, $\vec{v} = (1\ ,1\ ,0)$, calcula los vectores unitarios de $\Re^3$ que son ortogonales a los dos vectores dados.

b) Sea π el plano determinado por el punto ***P*(2 , 2 , 2)** y los vectores $\vec{u} = (1\ ,0\ ,-1)$, $\vec{v} = (1\ ,1\ ,0)$.Calcula el ángulo que forma el plano π con la recta que pasa por los puntos
***O*(0 , 0 , 0)** y ***Q*(2 , -2 , 2)**.

c) Calcula el punto simétrico de ***O*(0 , 0, 0)** respecto del plano ***x* - *y* + *z* - 2 = 0.**

a) Es el vector $\vec{w}$ perpendicular a ambos vectores y lo calcularemos hallando el producto vectorial de los dos, seguidamente lo normalizaremos

$$\begin{cases} \vec{u} = (1\ ,0\ ,-1) \\ \vec{v} = (1\ ,1\ ,0) \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{j} + \vec{k} + \vec{i} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{w} = (1\ ,-1\ ,1) \Rightarrow$$

$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow \left\|\vec{w}\right\| = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,-\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,-\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

b) El vector director del plano π, que es perpendicular a él y a los dos vectores dados, fue calculado en el apartado a) es igual a $\vec{w}$, que siendo, a la vez, perpendicular al vector **PG,** siendo **G** el punto genérico del plano y eso tiene como consecuencia que su producto escalar es nulo y la ecuación del plano pedido.
El ángulo entre plano π y el vector **OQ** es el formado por el vector director de este con el vector director de aquel que es el producto escalar de ambos entre el producto de sus módulos, siendo el valor calculado el seno del ángulo α que forman.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \vec{w} = (1\ ,-1\ ,1) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,\ y\ ,\ z) - (2\ ,2\ ,2) = (x-2\ ,\ y-2\ ,\ z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\ ,-1\ ,1) \cdot (x-2\ ,\ y-2\ ,\ z-2) = 0 \Rightarrow x - 2 - y + 2 + z - 2 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y + z - 2 = 0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \vec{w} = (1\ ,-1\ ,1) \\ \overrightarrow{OQ} = (2\ ,-2\ ,2) - (0\ ,0\ ,0) = (2\ ,-2\ ,2) \end{cases} \Rightarrow sen\,(\alpha) = \frac{\left|\overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{OQ}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\pi}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OQ}\right|} = \frac{\left|(1\ ,-1\ ,1) \cdot (2\ ,-2\ ,2)\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$

$$sen\,(\alpha) = \frac{|2+2+2|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}} = \frac{|6|}{\sqrt{36}} = 1 \Rightarrow \alpha = arc\ sen\, 1 = 90^{o} = \frac{\pi}{2}\ rad \Rightarrow Son\ perpendiculares$$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 2

c) Hallaremos una recta **r**, perpendicular al plano α dado, y por ello su vector director es el del plano que pase por **O**.
Calcularemos el punto **P** de corte de la recta **r** hallada y el plano que es el punto medio entre **O** y su simétrico **O'**

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\alpha} = (1, -1, 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow Punto\ P \Rightarrow \lambda - (-\lambda) + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

$$P \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{0 + x_{o'}}{2} \Rightarrow x_{o'} = \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} = \frac{0 + y_{o'}}{2} \Rightarrow y_{o'} = -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{0 + z_{o'}}{2} \Rightarrow z_{o'} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow O'\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Opción 2.- Los lados de un triángulo están sobre las rectas:

$$r_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2} \quad ; \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases} \quad ; \quad r_3 : \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

a) Calcula los vértices del triángulo. ¿Es un triángulo rectángulo? Razona la respuesta
b) Calcula la ecuación del plano π que contiene el triángulo. Calcula la intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ.

a) Hallaremos los puntos de corte **A**, **B** y **C** de las rectas entre si ya que tienen que cortarse para formar triángulo. Una vez hallado los vértices y para estudiar si son triángulo rectángulo veremos si los vectores **AB** y **AC** lo son para ello hallaremos su producto escalar que tiene que ser nulo, de no serlo estudiaremos si lo es el formado por los vectores **BA** y **BC**, y finalmente analizarlo con **CA** y **CB**, de no dar ninguno nulo no será triángulo rectángulo

$$r_3 : \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow -y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow -x + z = 0 \Rightarrow x = z$$

$$\begin{cases} r_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \\ r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = 2 + t \\ 1 - \lambda = 2 + t \\ -1 + 2\lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + 0 = 2 + t \Rightarrow t = -1 \\ 1 - 0 = 2 + t \Rightarrow t = -1 \end{cases} \Rightarrow A \begin{cases} x = 1 + 0 \\ y = 1 - 0 \\ z = -1 + 2 \cdot 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \\ r_3 : \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = \mu \\ 1 - \lambda = -1 \\ -1 + 2\lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow -\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 = \mu \Rightarrow \mu = 3 \\ -1 + 2 \cdot 2 = \mu \Rightarrow \mu = 3 \end{cases} \Rightarrow B \begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = 1 - 2 \\ z = -1 + 2 \cdot 2 \end{cases}$$

Continuación de la Opción 2 del Bloque 2

a)Continuación

$$\begin{cases} r_2 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+t \\ z = -1 \end{cases} \\ r_3 : \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+t = \mu \\ 2+t = -1 \Rightarrow \\ -1 = \mu \end{cases} \begin{cases} 2+t = -1 \Rightarrow t = -3 \\ 2+t = -1 \Rightarrow t = -3 \end{cases} \Rightarrow C \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3\,,-1\,,3) - (1\,,1\,,-1) = (2\,,-2\,,4) \equiv (1\,,-1\,,2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1\,,-1\,,-1) - (1\,,1\,,-1) = (-2\,,-2\,,0) \equiv (1\,,1\,,0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1\,,-1\,,2) \cdot (1\,,1\,,0) = 1 - 1 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \textit{Es un triángulo rectángulo}$$

b) El plano π queda determinado por los vectores **AB**, **AC** y **AG** siendo **G** el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **AG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1\,,-1\,,2) \\ \overrightarrow{AC} = (1\,,1\,,0) \\ \overrightarrow{AG} = (x\,,y\,,z) - (1\,,1\,,-1) = (x-1\,,y-1\,,z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2\,(y-1) + (z+1) + (z+1) - 2\,(x-1) = 0 \Rightarrow -2\,(x-1) + 2\,(y-1) + 2\,(z+1) = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1) - (y-1) - (z+1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y - z - 1 = 0$$

Puntos de corte del plano π con los ejes

$$OX \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \Rightarrow \alpha - 0 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow X \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \Rightarrow X(1\,,0\,,0) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \beta \Rightarrow 0 - \beta - 0 - 1 = 0 \Rightarrow -\beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow Y \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \Rightarrow Y(0\,,-1\,,0) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow 0 - 0 - \gamma - 1 = 0 \Rightarrow -\gamma - 1 = 0 \Rightarrow \gamma = -1 \Rightarrow Z \\ z = \gamma \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow Z(0\,,0\,,-1) \\ z = -1 \end{cases}$$

Bloque 3 (Análisis) (*Puntuación máxima 4 puntos*)

Opción 1.- a) Calcula los valores de ***a*** y ***b*** para que a gráfica de $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}\,,4\right)$, Para esos valores de ***a*** y ***b***, calcula: asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{\cos^2 x-1}$

c) Definición de primitiva e integral indefinida de una función. Enunciado de la regla de Barrow

$a)$

$$f'(x)=a-\frac{b}{x^2}=\frac{ax^2-b}{x^2}\Rightarrow\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=4\Rightarrow a\cdot\frac{1}{2}+\frac{b}{\frac{1}{2}}=4\Rightarrow\frac{a}{2}+2b=4\Rightarrow\frac{a+4b}{2}=4\Rightarrow a+4b=8 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow a-\frac{b}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=0\Rightarrow a-\frac{b}{\frac{1}{4}}=0\Rightarrow a-4b=0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+4b=8 \\ a-4b=0 \end{cases}\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4\Rightarrow 4-4b=0\Rightarrow 4b=4\Rightarrow b=1\Rightarrow f(x)=4x+\frac{1}{x}=\frac{4x^2+1}{x}$$

$$x=0\Rightarrow f(x)=\frac{4\cdot 0^2+1}{0}=\frac{1}{0}\Rightarrow \textit{No tiene solución}\Rightarrow \textit{Asíntota vertical en } x=0$$

Asin tota horizontal

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{1}=8\cdot\infty=\infty\Rightarrow$$

No existe asin tota horizontal cuando $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+1}{x}=\frac{\infty}{-\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{1}=8\cdot(-\infty)=-\infty\Rightarrow$$

No existe asin tota horizontal cuando $x\to-\infty$

Asin tota oblicua

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2+1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{2x}=4$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+1}{x}-4x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+1-4x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

Existe asin tota oblicua, $y=4x$ *cuando* $x\to\infty$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 3

$a)$*Continuación*

Asintota oblicua

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{2x} = 4$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+1}{x} - 4x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+1-4x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Existe asintota oblicua, $y = 4x$ *cuando* $x \to -\infty$

$$Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{4x^2-1}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1>0 \Rightarrow 2x>-1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \\ 2x-1>0 \Rightarrow 2x>1 \Rightarrow x>\frac{1}{2} \\ x^2>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

	$-\infty$ a $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ a ∞
x > $-\frac{1}{2}$	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > $\frac{1}{2}$	**(-)**	**(-)**	**(+)**
$x^2 > 0$	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x \in \Re / \left(x < -\frac{1}{2}\right) \cup \left(x > \frac{1}{2}\right)$ **Decrecimiento** $\forall x \in \Re / -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

$b)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^x}{\cos^2 x - 1} = \frac{0^2 e^0}{\cos^2 0 - 1} = \frac{0 \cdot 1}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^x + x^2 e^x}{2\cdot\cos x\,(-sen\,x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,(2+x)\,e^x}{-2\cdot\cos x\; sen\,x} =$$

$$= \frac{0\cdot(2+0)\,e^0}{-2\cdot\cos 0\; sen\,0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x\to 0} \frac{(2+2x)\,e^x + \left(2x+x^2\right)e^x}{-2\cdot(-sen\,x\cdot sen\,x + \cos x \cdot \cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(2+4x+x^2\right)e^x}{-2\cdot\left(\cos^2 x - sen^2 x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(2+4x+x^2\right)e^x}{-2\cdot\cos 2x} = \frac{\left(2+4\cdot 0+0^2\right)e^0}{-2\cdot\cos 2\cdot 0} = \frac{2\cdot 1}{-2\cdot\cos 0} = \frac{2}{-2\cdot 1} = -1$$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 3

c)
Definición de función primitiva

Dadas dos funciones **f(x)** y **F(x)**, definidas en un intervalo **I = [a , b]**, diremos que **F(x)** es una **función primitiva** de **f(x)** si la derivada de **F(x)** es la función **f(x)** en el intervalo **I**

$$F(x)\ es\ \ primitiva\ de\ \ f(x)\ en\ I \Leftrightarrow F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$$

Definición de integral primitiva

Sea **F(x)** una primitiva de la función **f(x)** en el intervalo **I = [a , b]**; llamamos **integral indefinida** de **f(x)** al conjunto de todas sus primitivas **F(x) + C**, siendo **C** un valor constante y lo representamos por:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

Regla de Barrow

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b]**, y sea **F(x)** una primitiva de **f(x)** en **[a , b]**; entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Opción 2.-
a) Definición de función continua en un punto. ¿Que tipo de discontinuidad tiene en **x = 0** la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$?.
b) Un alambre de **170 cm**. de longitud se divide en dos partes. Con una de esas partes se quiere formar un cuadrado y con la otra un rectángulo de tal manera que la base mida el doble de la altura. Calcula las longitudes de las partes en las que se tiene que dividir el alambre para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.
c) Calcula el área del recinto limitado por la recta ***y = 2 – x*** y la curva ***y = x²***.

a) Una función ***f*** es **continua en el punto x = x_0** si, y solo si, verifica que: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Desglosando este concepto podremos dar una definición más precisa:

Una función ***f*** es **continua en el punto x = x_0** si verifica las siguientes condiciones:

- Existe ***f(x_0)***, es decir la función está definida en **x = x_0**
- Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- Los dos valores anteriores coinciden esto es $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x^2}{x} = \dfrac{0^2}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow Sin\ solución \\ \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x \to 0} x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow Discontinuidad\ evitable$$ Hay que redefinir la función

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 3

b) Sea **C** la base del cuadrado y **H** y **B** la altura y base, respectivamente del rectángulo

$$\begin{cases} B = 2H \\ 170 = 4C + 2H + 2B \Rightarrow 170 = 4C + 2H + 2\cdot 2H \Rightarrow 170 = 4C + 6H \Rightarrow 85 = 2C + 3H \Rightarrow 2C = 85 - 3H \Rightarrow \\ S = C^2 + BH = C^2 + 2H\cdot H = C^2 + 2H^2 \end{cases}$$

$$S = \left(\frac{85-3H}{2}\right)^2 + 2H^2 = \frac{(85-3H)^2 + 8H^2}{4} = \frac{85^2 - 2\cdot 85\cdot 3H + 9H^2 + 8H^2}{4} = \frac{17H^2 - 510H + 7225}{4}$$

$$S = \frac{17}{4}\left(H^2 - 30H + 425\right) \Rightarrow S' = \frac{dS}{dH} = \frac{17}{4}(2H-30) = \frac{17}{2}(H-15) \Rightarrow Si\ S' = 0 \Rightarrow \frac{17}{2}(H-15) = 0 \Rightarrow$$

$$H - 15 = 0 \Rightarrow H = 15 \Rightarrow S'' = \frac{d^2S}{dH^2} = \frac{17}{2} > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} H = 15\ cm \\ B = 2\cdot 15 = 30\ cm \\ C = \dfrac{85 - 3\cdot 15}{2} = \dfrac{40}{2} = 20\ cm \end{cases}$$

c)

$$Puntos\ de\ corte\ de\ las\ funciones\ con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow 2 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x = 0 \in (-2\ ,1) \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 2 - 0 = 2 \\ y(0) = 0^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow 2 - x > x^2\ en\ el\ intervalo\ (-2\ ,1)$$

$$A = \int_{-2}^{1}(2-x)\,dx - \int_{-2}^{1} x^2\ d = \int_{-2}^{1}\left(2 - x - x^2\right)dx = 2\cdot[x]_{-2}^{1} - \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-2}^{1} - \frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-2}^{1}$$

$$A = 2\cdot[1-(-2)] - \frac{1}{2}\cdot\left[1^2 - (-2)^2\right] - \frac{1}{3}\cdot\left[1^3 - (-2)^3\right] = 2\cdot(1+2) - \frac{1}{2}\cdot(1-4) - \frac{1}{3}\cdot[1-(-8)]$$

$$A = 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}\ u^2$$