Bloque 1 (Algebra Lineal) (*Puntuación máxima 3 puntos*)

Opción 1

a) Sean $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{F_3}$ las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada $\boldsymbol{M}$ de orden 3, con **det (*M*) = - 2**. Calcula el valor del determinante de la matriz que ten por filas $\boldsymbol{F_1 - F_2}$, $\boldsymbol{2F_1}$, $\boldsymbol{F_2 + F_3}$.

b) Dada a matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla dos matrices *X* e *Y* que verifican $\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases}$ siendo C^t la matriz traspuesta de *C*.

a) Llamando N a la matriz con las filas dadas en el problema

$$\det(N) = |N| = \begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ F_1 + F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 + F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 + F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = (-2) + (-2) = -4$$

b)

$$\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases} \Rightarrow 2X = C + C^t \Rightarrow X = \frac{1}{2}\left(C + C^t\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y^{-1} = C - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y = \left(Y^{-1}\right)^{-1} \Rightarrow \left|Y^{-1}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow Existe \left(Y^{-1}\right)^{-1} \Rightarrow \left(Y^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{\left|Y^{-1}\right|} \cdot \left[adj\left(Y^{-1}\right)^t\right] \Rightarrow$$

$$\left(Y^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\left(Y^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \left(Y^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción 2.- a) Discute, según los valores del parámetro **m**, el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

b) Resuelve, si es posible, en el caso **m = 2**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 3 & 1-m & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-2)(1-m) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow (m-2)(1-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \{1, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m = 1 \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ m = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Núm.\ de\ incognitas$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$b)$

$Si\ m = 2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 5y + 3z = 0 \Rightarrow 3z = 5y \Rightarrow z = \frac{5}{3}y \Rightarrow x - 2y - \frac{5}{3}y = 1 \Rightarrow x = \frac{11}{3}y$$

$$Solución\ (x, y, z) = \left(\frac{11}{3}\lambda, \lambda, \frac{5}{3}\lambda\right) = (11\lambda, 3\lambda, 5\lambda)$$

Bloque 2 (Geometría) (*Puntuación máxima 3 puntos*)

Opción 1.- a) Los puntos ***A*(1 ,1 , 0)**, ***B*(0 , 1 , 1)** y ***C*(-1 , 0 , 1)** son vértices consecutivos de un paralelogramo ***ABCD***. Calcula las coordenadas del vértice *D* y el área del paralelogramo.
b) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto ***B*(0 , 1 , 1)** y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos ***A*(1 , 1 , 0)** y ***C*(-1 , 0 , 1).**

a) El punto medio **P** de **AC** es el mismo que el de **BD**, conocido **B** hallaremos el punto buscado

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0 \\ y_P = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \\ z_P = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(0 , \frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{0+x_D}{2} \Rightarrow x_D = 0 \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{1+y_D}{2} \Rightarrow 2\,(1+y_D) = 2 \Rightarrow 1+y_D = 1 \Rightarrow y_D = 0 \Rightarrow D(0 , 0 , 0) \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{1+z_D}{2} \Rightarrow 2\,(1+z_D) = 2 \Rightarrow 1+z_D = 1 \Rightarrow z_D = 0 \end{cases}$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores **BA** y **BC**

$$A = \left|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\right|$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (1 , 1 , 0) - (0 , 1 , 1) = (1 , 0 , -1) \\ \overrightarrow{BC} = (-1 , 0 , 1) - (0 , 1 , 1) = (-1 , -1 , 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} - \vec{k} - \vec{i} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = (-1 , 1 , -1) \Rightarrow A = \left|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}\ u^2$$

b) El vector **AC**, que es perpendicular al plano π buscado, es el vector director de dicho plano que es perpendicular, a su vez, al vector **BG**, siendo **G** el punto generador del plano, siendo el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{AC} = (-1 , 0 , 1) - (1 , 1 , 0) = (-2 , -1 , 1) \equiv (2 , 1 , -1) \\ \overrightarrow{BG} = (x , y , z) - (0 , 1 , 1) = (x , y-1 , z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{BG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \Rightarrow$$

$$(2 , 1 , -1) \cdot (x , y-1 , z-1) = 0 \Rightarrow 2x + (y-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - z = 0$$

Opción 2.- Dadas las rectas $r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$ y $s:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$;

a) Estudia su posición relativa.
b) Calcula la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, si la solución del sistema planteado es compatible determinado se cortan en un punto, son secantes; si el sistema es compatible indeterminado las rectas son coincidentes
Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} \\ s:\begin{cases} x=\mu \\ y=-1+2\mu \\ z=-2+2\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=\mu \\ 2+\lambda=-1+2\mu \\ 2+2\lambda=-2+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+\lambda=-1+2\cdot 1 \Rightarrow \lambda=-1 \\ 2+2\lambda=-2+2\cdot 1 \Rightarrow 2\lambda=-2 \Rightarrow \lambda=-1 \end{cases} \Rightarrow Comp.\ Determ.$$

$$Tiene\ solución\ única \Rightarrow Son\ \sec antes \Rightarrow Punto\ de\ corte \Rightarrow P\begin{cases} x=1 \\ y=2+(-1) \\ z=2+2\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow P(1\,,1\,,0)$$

b) El plano π queda determinado por los vectores directores de las dos rectas y por el vector **PG**, siendo G el punto genérico del plano.
Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(0\,,1\,,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(1\,,2\,,2) \\ \overrightarrow{PG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,1\,,0)=(x-1\,,y-1\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$2\,(x-1)+2\,(y-1)-z-4\,(x-1)=0 \Rightarrow -2\,(x-1)+2\,(y-1)-z=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x-2y+z=0$$

Bloque 3 (Análisis) (*Puntuación máxima 4 puntos*)

Opción 1.- a) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & si \quad x<2 \\ e^{2-x}+2 & si \quad x\geq 2\end{cases}$ calcula ***a*** para que ***f(x)*** sea continua en ***x* = 2**. Para el valor obtenido de ***a***, ¿es ***f(x)*** derivable en ***x* = 2**?

b) Dada ***g(x) = ax⁴ + bx + c***, calcula los valores de ***a***, ***b*** y ***c*** para que ***g(x)*** tenga en el punto **(1 , -1)** un mínimo relativo y la recta tangente a la gráfica de ***g(x)***, en **x = 0** , sea paralela a la recta ***y* = 4*x***.

c) Enunciad el teorema fundamental del cálculo integral. Dada la función $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, ¿tiene ***F(x)*** puntos de inflexión? Justifica la respuesta.

$a)$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x)=a\cdot 2^2+1=4a+1 \\ f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=e^{2-2}+2=e^0+2=3\end{cases} \Rightarrow 4a+1=3 \Rightarrow 4a=2 \Rightarrow a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2\cdot\frac{1}{2}x & si \quad x<2 \\ (-1)e^{2-x}+2 & si \quad x\geq 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f'(x)=2 \\ \lim_{x\to 2^+} f'(x)=-e^{2-2}=-e^0=-1\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f'(x)=2\neq \lim_{x\to 2^+} f'(x)=-1$$

$$No\ es\ derivable\ para\ x=2$$

$b)$

$$f'(x)=4ax^3+b \Rightarrow \begin{cases} f(1)=-1 \Rightarrow a\,(-1)^4+b\,(-1)+c=-1 \Rightarrow a-b+c=-1 \\ f'(1)=0 \Rightarrow 4a\cdot 1^3+b=0 \Rightarrow 4a+b=0 \\ f'(0)=4 \Rightarrow 4a\cdot 0^3+b=4 \Rightarrow b=4\end{cases} \Rightarrow 4a+4=0 \Rightarrow 4a=-4 \Rightarrow$$

$$a=-1 \Rightarrow -1-4+c=-1 \Rightarrow c=4 \Rightarrow f(x)=-x^4+4x+4$$

c)

Si **f(x)** es continua en **[a , b]**, la función $F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$, con $t\in[a\,,b]$, recibe el nombre de función integral de **f(x)** en **[a , b]**, de ello se determina el

<u>Teorema fundamental del cálculo integral</u>

Si f(x) es continua en **[a , b]**, entonces la función integral es derivable y cumple que:

$$F'(t)=f(x)\,,\ \forall t\in[a\,,b]$$

$$F'(x)=e^{-x^2} \Rightarrow Es\ una\ función\ continua\ y\ derivable$$

$$F''(x)=-2xe^{-x^2} \Rightarrow F''(x)=0 \Rightarrow -2xe^{-x^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x^2}>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ x=0\end{cases} \Rightarrow F'''(x)=-2\left(1e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}\right)$$

$$F'''(x)=-2\,e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) \Rightarrow F'''(0)=-2\,e^{-0^2}\left(1-2\cdot 0^2\right)=-2\neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ \inf lexión\ en\ x=0$$

Opción 2.- a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.
b) Dada $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 9x}$, calcula para $f(x)$: puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.
c) Calcula el área de la región del plano limitada por el eje OX y la curva $\boldsymbol{y = x^3 - 9x}$.

a)
<u>Teorema de Rolle</u>
Sea **f(x)** una función continua en **[a , b]**, derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f'(c) = 0**

La **interpretación geométrica** de este teorema es que si el origen y el extremo de una curva continua y derivable tienen la misma ordenada, entonces, en al menos un punto, la tangente a la curva en dicho punto (o puntos) es paralela al eje OX.

$b)$

$$Punto\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 9 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (0\ ,\ 0)$$

$$Punto\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^3 - 9 \cdot x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 9\right) = x\,(x-3)\,(x+3) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (0\ ,\ 0) \\ x = -3 \Rightarrow (-3\ ,\ 0) \\ x = 3 \Rightarrow (3\ ,\ 0) \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 3\left(x^2 - 3\right) = 3\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 3\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x - \sqrt{3} > 0 \Rightarrow x > \sqrt{3} \\ x + \sqrt{3} > 0 \Rightarrow x > -\sqrt{3} \end{cases}$$

	$-\infty$ a $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ a $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ a ∞
3 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > $-\sqrt{3}$	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > $\sqrt{3}$	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x \in \Re / \left(x < -\sqrt{3}\right) \cup \left(x > \sqrt{3}\right)$ **Decrecimiento** $\forall x \in \Re / -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

Máximo relativo en $x = -\sqrt{3} \Rightarrow f\left(-\sqrt{3}\right) = \left(-\sqrt{3}\right)^4 - 9\left(-\sqrt{3}\right) = 9 + 9\sqrt{3} = 9\left(1 + \sqrt{3}\right)$

Máximo relativo en $x = -\sqrt{3} \Rightarrow f\left(-\sqrt{3}\right) = \left(-\sqrt{3}\right)^4 - 9\left(-\sqrt{3}\right) = 9 + 9\sqrt{3} = 9\left(1 + \sqrt{3}\right)$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow Concavidad \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow 6x \Rightarrow \begin{cases} 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \end{cases}$$

Concavidad $\forall x \in \Re / x > 0$ **Convexidad** $\forall x \in x < 0$

Punto de inflexión en $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^4 - 9 \cdot 0 = 0$

c)

$$\textit{Punto de corte con el eje OX} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (0\ ,\ 0) \\ x = -3 \Rightarrow (-3\ ,\ 0) \\ x = 3 \Rightarrow (3\ ,\ 0) \end{cases}$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 9\,(-x) = -x^3 + 9x = -f(x) \Rightarrow \textit{Simétrica respecto a OY} \Rightarrow$$

$$x = 1 \in \left(0\ ,\ \sqrt{3}\right) \Rightarrow f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1 = -8 < 0$$

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^{\sqrt{3}} \left(x^3 - 9x\right) dx \right| = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \left(-x^3 + 9x\right) dx = -2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[x^4\right]_0^{\sqrt{3}} + 2 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$A = -\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3}^4 - 0^4\right) + 9 \cdot \left(\sqrt{3}^2 - 0^2\right) = -\frac{9}{2} + 9 \cdot 3 = \frac{54 - 9}{2} = \frac{45}{2}\ u^2$$