Bloque 1 (Algebra Lineal) (*Puntuación máxima 3 puntos*)

Opción 1.- a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcula los rangos de $\boldsymbol{AA^t}$ y de $\boldsymbol{A^tA}$, siendo $\boldsymbol{A^t}$ la matriz traspuesta de ***A***. Para el valor ***a* = 1**, resuelve la ecuación matricial $\boldsymbol{AA^tX = B}$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Sea ***M*** una matriz cuadrada de orden **3** con **det (*M*) = -1** y que además verifica $\boldsymbol{M^3 + M + I = 0}$, siendo ***I*** la matriz unidad de orden **3**. Calcula los determinantes de las matrices: ***M + I*** y **3*M* + 3*I***

$a)$

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|AA^t\right| = \begin{vmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2+1 \end{vmatrix} = \left(a^2+1\right)^2 - a^2 \Rightarrow$$

$$\left|AA^t\right| = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = a^4 + a^2 + 1 \Rightarrow Si\ \left|AA^t\right| = 0 \Rightarrow a^4 + a^2 + 1 = 0 \Rightarrow Haciendo\ a^2 = t \Rightarrow$$

$$t^2 + t + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow \forall a \in \Re \Rightarrow \left|AA^t\right| \neq 0 \Rightarrow rang\ \left(AA^t\right) = 2$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & a & a \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|A^tA\right| = \begin{vmatrix} a^2+1 & a & a \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} a^2+1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left|A^tA\right| = a \cdot (-a) + a^2\left(a^2 + 1 - a^2\right) = -a^2 + a^2 = 0 \Rightarrow Hay\ que\ buscar\ un\ adjunto\ distinto\ de\ cero$$

$$adj\ A_{33} = \begin{vmatrix} a^2+1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 - a^2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \forall a \in \Re \Rightarrow rang\ \left(A^tA\right) = 2$$

$$\left(AA^t\right)^{-1} \cdot AA^tX = \left(AA^t\right)^{-1}B \Rightarrow IX = \left(AA^t\right)^{-1}B \Rightarrow X = \left(AA^t\right)^{-1}B$$

$$Si\ a = 1 \Rightarrow AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|AA^t\right| = 1^4 + 1^2 + 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow Existe\ \left(AA^t\right)^{-1} = \frac{1}{\left|AA^t\right|} \cdot \left[adj\ \left(AA^t\right)^t\right]$$

$$\left(AA^t\right)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ \left(AA^t\right)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(AA^t\right)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$b)$

$$M + I = -M^3 \Rightarrow \left|M^3\right| = -(-1)^3 \Rightarrow \left|M + I\right| = 1$$

$$3\left(M + I\right) = -3\,M^3 \Rightarrow -\left|3M^3\right| = -3^3 \cdot (-1)^3 \Rightarrow \left|M + I\right| = 27$$

Opción 2.- a) Resuelve, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x+y-2z=2 \end{cases}$

b) Calcula el valor de ***m***, para que al añadir al sistema anterior la ecuación: x + 2y – z = m resulte un sistema compatible indeterminado.

$a)$

$$\begin{cases} x+y=5+z \\ 2x+y=2+2z \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2=-1 \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Numero\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5+z \\ 2 & 1 & 2+2z \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5+z \\ 0 & -1 & 2+2z-10-2z \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$-y=-8 \Rightarrow y=8 \Rightarrow x+8=5+z \Rightarrow x=-3+z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (-3+\lambda\ ,\ 8\ ,\ \lambda)$$

$a)$

$$\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x+y-2z=2 \\ x+2y-z=m \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & m \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & m-5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & m+3 \end{array}\right) \Rightarrow m+3=0 \Rightarrow m=-3$$

$$Cuando\ m=-3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Numero\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow y=8 \Rightarrow x+8-z=5 \Rightarrow x=-3+z \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (-3+\lambda\ ,\ 8\ ,\ \lambda)$$

Bloque 2 (Geometría) (*Puntuación máxima 3 puntos*)

Opción 1.- Sea ***r*** la recta que pasa por los puntos **P(0 , 8 , 3)** y **Q(2 , 8 , 5)** y ***s*** la recta

$$\begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de ***r*** y ***s****.* Si se cortan, calcula el punto de corte.
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por **P** y es perpendicular al plano que contiene a ***r*** y **s**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (2\,,8\,,5) - (0\,,8\,,3) = (2\,,0\,,2) \equiv (1\,,0\,,1) \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 8 \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \\ \begin{cases} x = -7 + y \\ 2z = y \Rightarrow z = \dfrac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = \left(1\,,1\,,\dfrac{1}{2}\right) \equiv (2\,,2\,,1) \Rightarrow s : \begin{cases} x = -7 + 2\mu \\ y = 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -7 + 2\mu \\ 8 = 2\mu \Rightarrow \mu = \dfrac{8}{2} = 4 \Rightarrow \\ 3 + \lambda = \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -7 + 2 \cdot 4 = 1 \\ 3 + \lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado \Rightarrow Son\ coincidentes\ o\ se\ cortan\ en\ un\ punto$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\,,0\,,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (2\,,2\,,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{0}{2} \Rightarrow No\ son\ coincidentes \Rightarrow Son\ rectas\ que\ se\ cortan\ en\ R \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \\ z = 3 + 1 = 4 \end{cases}$$

b) El vector del plano pedido es perpendicular, simultáneamente, a los vectores directores de las rectas dadas por lo tanto es el resultante del producto vectorial de ambos, y la recta **t** quedara definida, además, por el punto **P**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\,,0\,,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (2\,,2\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} + 2\vec{k} - 2\vec{i} - \vec{j} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (-2\,,-1\,,2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t} = (2\,,1\,,-2) \\ P(0\,,8\,,3) \end{cases} \Rightarrow t : \frac{x}{2} = y - 8 = \frac{z-3}{-2}$$

Opción 2.- Sean π el plano que pasa por los puntos **A(1 , -1 , 1)**, **B(2 , 3 , 2)**, **C(3 , 1 , 0)** y ***r*** la recta dada por $r : \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$

a) Calcula el ángulo que forman la recta ***r*** y el plano π. Calcula el punto de intersección de ***r*** y π.

b) Calcula los puntos de la recta ***r*** que distan **6** unidades del plano π.

a) El seno del ángulo formado por el plano π y la recta r es igual al cociente entre el producto escalar de los vectores y el producto de sus módulos

El vector director del plano π es perpendicular a los vectores AB y AC que generan el plano y se calcula como el producto vectorial de ambos.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,3,2)-(1,-1,1) = (1,4,1) \\ \overrightarrow{AC} = (3,1,0)-(1,-1,1) = (2,2,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} - 8\vec{k} - 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\overrightarrow{v_\pi} = -6\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (-6,3,-6) \equiv (2,-1,2) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,-1,2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$sen\,(r\,,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left|(2,-1,2)\cdot(2,-1,2)\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|4+1+4|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}} = \frac{|9|}{9} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow$$

$$ángulo\,(r\,,\pi) = arc\ sen\,1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}\,rad$$

Hallaremos la ecuación general del plano π, sabiendo que su vector director, ya hallado, es perpendicular al vector **AG**, siendo **G** el punto genérico del plano, y que su producto escalar es nulo y la ecuación pedida del plano.

Calcularemos las ecuaciones paramétricas de la recta **r**.

Una vez obtenidas ambas ecuaciones hallaremos el punto **P** de corte entre recta y plano sustituyendo las coordenadas de la recta en el plano, que nos dará el valor necesario para obtener el punto de intersección

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2,-1,2) \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z)-(1,-1,1) = (x-1, y+1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(2,-1,2)\cdot(x-1, y+1, z-1) = 0 \Rightarrow 2x-2-y-1+2z-2 = 0 \Rightarrow \pi : 2x-y+2z-5 = 0$$

$$r : \begin{cases} x = 7+2\lambda \\ y = -6-\lambda \\ z = -3+2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2\,(7+2\lambda)-(-6-\lambda)+2\,(-3+2\lambda)-5 = 0 \Rightarrow 14+4\lambda+6+\lambda-6+4\lambda-5 = 0 \Rightarrow$$

$$9\lambda+9 = 0 \Rightarrow 9\lambda = -9 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P \begin{cases} x = 7+2\cdot(-1) = 5 \\ y = -6-(-1) = -5 \\ z = -3+2\cdot(-1) = -5 \end{cases} \Rightarrow P(5,-5,-5)$$

Continuación de la Opción 2 del Bloque 2

b) Sean **Q** y **S** los puntos buscados

$$\begin{cases} \pi : 2x - y + 2z - 5 = 0 \\ r : \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -6 - \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow d(\pi \, , \, r) = \frac{2\,(7+2\lambda) - (-6-\lambda) + 2\,(-3+2\lambda) - 5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9\lambda + 9}{\sqrt{9}} = 6 \\ \dfrac{9\lambda + 9}{\sqrt{9}} = -6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 9\lambda + 9 = 18 \Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = \dfrac{9}{9} = 1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 7 + 2 \cdot 1 \\ y = -6 - 1 \\ z = -3 + 2 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow Q(9 \, , -7 \, , -1) \\ 9\lambda + 9 = -18 \Rightarrow 9\lambda = -27 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{27}{9} = -3 \Rightarrow S \begin{cases} x = 7 + 2 \cdot (-3) \\ y = -6 - (-3) \\ z = -3 + 2 \cdot (-3) \end{cases} \Rightarrow S(1 \, , -3 \, , -3) \end{cases}$$

Bloque 3 (Análisis) (*Puntuación máxima 4 puntos*)

Opción 1.- a) Define función continua en un punto. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ en ***x* = 0**?

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función ***g*(*x*) = 2*x*³ - 3*x*²**.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de ***g*(*x*) = 2*x*³ - 3*x*²** y la recta ***y* = 2*x***.

a) Una función es **continua en el punto $x = x_0$** si, y solo si, verifica que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Desglosando el concepto de límite podremos dar una definición de función continua equivalente:

Una función **f** es **continua en el punto $x = x_0$** si verifica las siguientes condiciones:

- Existe $f(x_0)$, es decir la función está definida en $x = x_0$
- Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- Los dos valores anteriores coinciden $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\begin{cases} f(0) = \dfrac{\ln(1+0^2)}{0} = \dfrac{\ln 1}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow Sin\ solución \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = \dfrac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2 \cdot 0}{1+0^2} = \dfrac{0}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow Disc.\ evitable$$

Tendremos que redefinir la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 \quad si & x = 0 \end{cases}$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 3

$b)$

$$g'(x)=6x^2-6x \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow 6x^2-6x>0 \Rightarrow 6x(x-1)>0 \Rightarrow \begin{cases} 6>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x>0 \\ x-1>0 \Rightarrow x>1 \end{cases}$$

	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … ∞
6 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x \in \Re / (x<0) \cup (x>1)$ **Decrecimiento** $\forall x \in \Re / 0<x<1$

Máximo relativo en $x=0 \Rightarrow f(0)=2\cdot 0^3-3\cdot 0^2=0$ de crecimiento pasa a decrecimiento

Mínimo relativo en $x=1 \Rightarrow f(1)=2\cdot 1^3-3\cdot 1^2=-1$ de decrecimiento pasa a crecimiento

$$g''(x)=12x-6 \Rightarrow Posible\ punto\ de\ \inf lexión \Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow 12x-6=0 \Rightarrow 12x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$g'''(x)=12 \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ \inf lexión\ en\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$c)$

$$Puntos\ de\ corte\ de\ las\ funciones\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ 2x^3-3x^2=0 \Rightarrow x^2(2x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow 2x=2x^3-3x^2 \Rightarrow 2x^3-3x^2-2x=0 \Rightarrow (2x^2-3x-2)x=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 2x^2-3x-2=0 \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)=25 \geq 0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3+5}{4}=2 \\ x=\frac{3-5}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$(2x)\cap(2x^3-3x^2) \Rightarrow \forall x \in \Re / \left(-\frac{1}{2}<x<0\right) \cup \left(0<x<\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}<x<2\right)$$

$$x=-\frac{1}{4} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow \begin{cases} y=2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2} \\ g\left(-\frac{1}{4}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2=-\frac{2}{64}-\frac{3}{16}=-\frac{1}{32}-\frac{3}{16}=-\frac{7}{32} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}<-\frac{7}{32}$$

En zona negativa

$$x=1 \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} y=2\cdot 1=2>0 \\ g(1)=2\cdot 1^3-3\cdot 1^2=-1<0 \end{cases}$$

$$x=\frac{7}{4} \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \Rightarrow \begin{cases} y=2\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{2}>0 \\ g\left(\frac{7}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^3-3\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{343}{32}-\frac{147}{16}=\frac{343-294}{32}=\frac{49}{32} \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{2}>\frac{49}{32}$$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 3

c)Continuación

$$A=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{0}2x\,dx\right|-\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(2x^3-3x^2\right)dx\right|+\int_{0}^{\frac{3}{2}}2x\,dx+\left|\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(2x^3-3x^2\right)dx\right|+\int_{\frac{3}{2}}^{2}2x\,dx-\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(2x^3-3x^2\right)dx$$

$$A=-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}2x\,dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(2x^3-3x^2\right)dx+\int_{0}^{\frac{3}{2}}2x\,dx-\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(2x^3-3x^2\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}2x\,dx-\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(2x^3-3x^2\right)dx$$

$$A=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x\,dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(2x^3-3x^2\right)dx+2\int_{0}^{2}x\,dx-\int_{0}^{2}\left(2x^3-3x^2\right)dx=$$

$$A=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{0}^{2}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_{0}^{2}+3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{0}^{2}$$

$$A=-\left[0^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[0^4-\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]-\left[0^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]+\left(2^2-0^2\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(2^4-0^4\right)+\left(2^3-0^3\right)$$

$$A=-\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{8}+4-\frac{16}{2}+8=\frac{1}{4}-\frac{1}{32}-\frac{1}{8}+4=\frac{8-1-4+128}{32}=\frac{131}{32}\,u^2$$

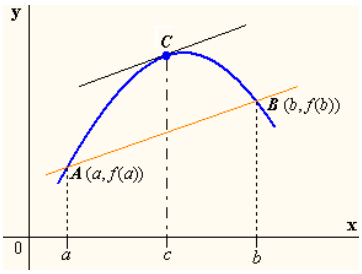
Opción 2.- a) Enuncia e interpreta geometricamente el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

b) Calcula un punto de la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ en el que la recta tangente sea paralela al eje OX; escribe la ecuación de esa recta tangente. Calcula las asíntotas, si las tiene, de *g*(*x*).

c) Calcula: $\displaystyle\int_0^{\ln 5}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx$; (Nota: ln = logaritmo neperiano)

a) Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\,,b)$ tal que: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Geométricamente, como **f'(c) es** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**



Continuación de la Opción 2 del Bloque 3

b)

$$g'(x)=\frac{e^x\left(1+e^x\right)^2-2\left(1+e^x\right)e^xe^x}{\left(1+e^x\right)^4}=\frac{e^x\left(1+e^x\right)-2e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^3}=\frac{e^x\left(1+e^x-2e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}=\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}\Rightarrow$$

$$m=g'(x)=0\Rightarrow\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}=0\Rightarrow e^x\left(1-e^x\right)=0\Rightarrow\begin{cases}e^x\neq 0\Rightarrow\forall x\in\Re\\1-e^x=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow\ln e^x=\ln 1\Rightarrow x\ln e=0\Rightarrow x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}g(0)=\dfrac{e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=\dfrac{1}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow y-\dfrac{1}{4}=0\,(x-0)\Rightarrow y-\dfrac{1}{4}=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}\\m=g'(0)=0\end{cases}$$

$1+e^x=0\Rightarrow e^x=-1\Rightarrow x\ln e=\ln(-1)\Rightarrow x=\ln(-1)\Rightarrow$ *Sin solución* $\Rightarrow$ *No existen asíntotas verticales*

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^x\left(1+e^x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\left(1+e^x\right)}=\frac{1}{2\cdot\infty}=0$$

Existe asíntota horizontal, $y=0$, *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^x}}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{e^x\left(e^x+1\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=0$$

Existe asíntota horizontal, $y=0$, *cuando* $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x\left(1+e^x\right)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2+2xe^x\left(1+e^x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left(1+e^x+2xe^x\right)\left(1+e^x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x+2xe^x+e^x+e^{2x}+2xe^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+2e^x+2xe^x+e^{2x}+2xe^{2x}}=$$

$$=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^x+2xe^x+2e^x+2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{4e^x+2xe^x+4e^{2x}+4xe^{2x}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{4e^x\left(1+2x+4e^x+4xe^x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4\left(1+2x+4e^x+4xe^x\right)}=\frac{1}{\infty}=0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{-x\left(1+e^{-x}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-xe^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{-xe^x\left(e^x+1\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{-x\left(e^x+1\right)^2}=-\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{-x\left(e^x+1\right)^2}=-0=0\Rightarrow\text{Calculado cuando } x\to\infty$$

No existe,TAMPOCO, asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$

Continuación de la Opción 2 del Bloque 3

c)

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx = \int_2^6 \frac{dt}{t^2} = \int_2^6 t^{-2}dt = \frac{1}{(-1)}\left[t^{-1}\right]_2^6 = -\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1-3}{6}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$1+e^x = t \Rightarrow e^x\,dx = dt \Rightarrow \begin{cases} x = \ln 5 \Rightarrow t = 1+e^{\ln 5} = 1+5 = 6 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1+e^0 = 2 \end{cases}$$