Bloque 1 (Algebra Lineal) (*Puntuación máxima 3 puntos*)

Opción 1.- a) Estudia, según los valores de *m* , el rango de la matriz $M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -m\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -m & m\end{pmatrix}$

b) Para el valor ***m* = 1**, resuelve la ecuación matricial ***MX* = 3*A*^{t}**, siendo ***A* = (1 0 1)** e ***A*^{t}**= matriz transpuesta de **A**. Para este valor de ***m***, ¿canto valdrá el determinante de la matriz $2M^{21}$?

a)

$$|M|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & -m\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -m & m\end{vmatrix}=m\cdot\begin{vmatrix}-1 & -m\\ -1 & 0\end{vmatrix}=m\cdot(-m)=-m^2\Rightarrow Si\ |M|=0\Rightarrow -m^2=0\Rightarrow m=0\Rightarrow$$

$$\forall m\in\Re-\{0\}\Rightarrow |M|\neq 0\Rightarrow rang\ (M)=3$$

$Si\ m=0$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (M)=1$$

b)

$$M^{-1}MX=M^{-1}\,3A^t\Rightarrow IX=3M^{-1}\,A^t\Rightarrow X=3M^{-1}\,A^t$$

$$Si\ m=1\Rightarrow |M|=-1^2=-1\Rightarrow Existe\ M^{-1}\Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{|M|}\cdot\left(adj\ M^t\right)$$

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow M^t=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ M^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=3\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0\\ -2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -6\\ -3\end{pmatrix}$$

$$Como\ |M|=-1\Rightarrow |M^{21}|=(-1)^{21}=-1\Rightarrow |2M^{21}|=2^3\cdot(-1)=-8$$

Opción 2.- a) Discute, según los valores del parámetro ***m***, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = m \\ x + y - z = 1 \\ mx + 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior para el caso ***m* = 0**.

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ m & 3-m & 2+m \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3-m & 2+m \end{vmatrix} = -(-4)(2+m) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 4(2+m) = 0$$

$2 + m = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow$

$\forall m \in \Re - \{-2\} \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$Si\ m = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$rang(A) = 2 \neq rang(A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$

$b)$

$Si\ m = 0 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow -4y = -3 \Rightarrow y = \frac{3}{4} \Rightarrow 3 \cdot \frac{3}{4} + 2z = 3 \Rightarrow 2z = 3 - \frac{9}{4} \Rightarrow 2z = \frac{3}{4}$$

$$z = \frac{3}{8} \Rightarrow x + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{8-6+3}{8} = \frac{5}{8} \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = \left(\frac{5}{8}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{3}{8}\right)$$

Bloque 2 (Geometría) (*Puntuación máxima 3 puntos*)

Opción 1.- a) Calcula a distancia del origen de coordenadas al plano que pasa por el punto *P*(1 , 1 , 2) y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases} 4x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

b) Calcula el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección del plano π : *x* – 2y + 2*z* –3 = 0 con los ejes de coordenadas. ¿Es un triángulo rectángulo?

a) El vector director de la recta **r** es, al ser perpendicular al plano, el vector del plano α que es, a su vez, perpendicular al vector PG, siendo G el punto generador del plano y por tener esa condición el producto escalar de ambos vectores es nulo y la ecuación buscada del plano.

Para hallar el vector director de la recta **r**, calcularemos el producto vectorial de los vectores que la definen.

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+4\vec{k}+\vec{i}-4\vec{j}=2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=(2\,,-4\,,4)\equiv(1\,,-2\,,2)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\alpha}=\overrightarrow{v_r}=(1\,,-2\,,2) \\ \overrightarrow{PG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,1\,,2)=(x-1\,,y-1\,,z-2) \end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_\alpha}\perp\overrightarrow{PG}\Rightarrow\overrightarrow{v_\alpha}\cdot\overrightarrow{PG}=0\Rightarrow$$

$$(1\,,-2\,,2)\cdot(x-1\,,y-1\,,z-2)=0\Rightarrow x-1-2\,(y-1)+2\,(z-2)=0\Rightarrow\alpha\equiv x-2y+2z-3=0$$

b) Los puntos de corte son las intersecciones del plano π con las rectas que definen los ejes **OX**, **OY** y **OZ**

$$OX\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}\Rightarrow\lambda-2\cdot0+2\cdot0-3=0\Rightarrow\lambda-3=0\Rightarrow\lambda=3\Rightarrow Punto\ X\begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}\Rightarrow X(3\,,0\,,0)$$

$$OY\equiv\begin{cases} x=0 \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases}\Rightarrow0-2\cdot\mu+2\cdot0-3=0\Rightarrow-2\cdot\mu-3=0\Rightarrow\mu=-\frac{3}{2}\Rightarrow Y\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{3}{2} \\ z=0 \end{cases}\Rightarrow Y\left(0\,,-\frac{3}{2}\,,0\right)$$

$$OZ\equiv\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\rho \end{cases}\Rightarrow0-2\cdot0+2\cdot\rho-3=0\Rightarrow2\cdot\rho-3=0\Rightarrow\rho=\frac{3}{2}\Rightarrow Z\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}\Rightarrow Z\left(0\,,0\,,\frac{3}{2}\right)$$

b) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **XY** y **XZ**

$$\begin{cases} \overrightarrow{XY}=\left(0\,,-\frac{3}{2}\,,0\right)-(3\,,0\,,0)=\left(-3\,,-\frac{3}{2}\,,0\right) \\ \overrightarrow{XZ}=\left(0\,,0\,,\frac{3}{2}\right)-(3\,,0\,,0)=\left(-3\,,0\,,\frac{3}{2}\right) \end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{XY}\wedge\overrightarrow{XZ}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -3 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}=-\frac{9}{4}\vec{i}-\frac{9}{2}\vec{k}+\frac{9}{2}\vec{j}\Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{XY}\wedge\overrightarrow{XZ}\right|=\sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{16}+\frac{81}{4}+\frac{81}{4}}=\sqrt{\frac{81+324+324}{16}}=\frac{\sqrt{729}}{4}=\frac{27}{4}$$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 2

$b)\ Continuación$

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{XY}\wedge\overrightarrow{XZ}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{27}{4} = \frac{27}{8}\ u^2$$

Cuando se calculan valores numéricos, distancias o áreas, los vectores no se pueden cambiar por su canónico

Será triángulo rectángulo si algunos de sus lados XY, XZ o YZ son perpendiculares entre si, para ellos hallaremos el producto escalar de esos vectores, del que ahora podremos hallar su representante canónico, que tiene que ser de valor nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{XY} = \left(-3\,,\,-\frac{3}{2}\,,\,0\right) = (6\,,\,3\,,\,0) \equiv (2\,,\,1\,,\,0) \\ \overrightarrow{XZ} = \left(-3\,,\,0\,,\,\frac{3}{2}\right) \equiv (-6\,,\,0\,,\,3) \equiv (2\,,\,0\,,\,-1) \\ \overrightarrow{YZ} = \left(0\,,\,-\frac{3}{2}\,,\,0\right) - \left(0\,,\,0\,,\,\frac{3}{2}\right) = \left(0\,,\,-\frac{3}{2}\,,\,-\frac{3}{2}\right) \equiv (0\,,\,1\,,\,1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{XZ} = (2\,,\,1\,,\,0)\cdot(2\,,\,0\,,\,-1) = 4+1-1 = 4 \neq 0 \\ \overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{YZ} = (2\,,\,1\,,\,0)\cdot(0\,,\,1\,,\,1) = 2+1+0 = 3 \neq 0 \\ \overrightarrow{XZ}\cdot\overrightarrow{YZ} = (2\,,\,0\,,\,-1)\cdot(0\,,\,1\,,\,1) = 0+0-1 = -1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow No\ es\ triángulo\ rectángulo$$

Opción 2.- a) Dados los planos $\pi_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$; $\pi_2 : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$ 0; estudia su posición relativa y calcula la distancia entre ellos.

b) Dado el punto ***P*(2 , 1 , 7)**, calcula su simétrico respecto al plano π_2

a) Los planos pueden ser paralelos, coincidentes y secantes o cortarse según una recta. Para los dos casos primeros sus vectores directores tienen que ser iguales o proporcionales, de serlo tendremos que analizar, ya que nos lo pide el problema la distancia entre ellos, para ello se toma un punto cualquiera de uno de los planos (tomaremos el indicado en la ecuación paramétrica de π_2) y hallaremos la distancia a π_1, si es nula son coincidentes, si no lo es son paralelos. Finalmente si no hay proporcionalidad los planos son secantes.

Para hallar el vector director del plano π_2, calcularemos el producto vectorial de los vectores que lo definen

$$\overrightarrow{v_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} - 4\vec{k} + 2\vec{i} + 6\vec{j} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (-4\,,\,8\,,\,-8) \equiv (1\,,\,-2\,,\,2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1\,,\,-2\,,\,2) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1\,,\,-2\,,\,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} = \overrightarrow{v_{\pi_2}} \Rightarrow Son\ paralelos\ o\ coincidentes$$

$$Punto\ de\ \pi_2 \Rightarrow Q(3\,,\,0\,,\,1) \Rightarrow d(Q\,,\,\pi_1) = \frac{|3 - 2\cdot 0 + 2\cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|3+2-1|}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}\ u \Rightarrow Son\ paralelos$$

Continuación de la Opción 2 del Bloque 2

b) Hallaremos una recta r que contenga el punto **P** y sea perpendicular al plano π_2, y que será definida por ese punto y por el vector director del plano. Una vez hallada calcularemos el punto **R** de corte de **r** con el plano π_2 que es el punto medio entre P y su simétrico P'.

Para hallar la ecuación del plano π_2, y calculado ya su vector director, que es perpendicular al vector **QG**, siendo **Q** un punto cualquiera del plano (tomaremos el indicado en la ecuación paramétrica dada) y **G** el punto genérico de ese plano, y por ello su producto escalar es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1\,,-2\,,2) \\ \overrightarrow{QG} = (x\,,y\,,z)-(3\,,0\,,1) = (x-3\,,y\,,z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} \perp \overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} \cdot \overrightarrow{QG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\,,-2\,,2)\cdot(x-3\,,y\,,z-1) = 0 \Rightarrow x-3-2y+2z-2 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x-2y+2z-5 = 0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1\,,-2\,,2) \\ P(2\,,1\,,7) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1-2\alpha \\ z = 7+2\alpha \end{cases} \Rightarrow (2+\alpha)-2\,(1-2\alpha)+2\,(7+2\alpha)-5 = 0 \Rightarrow$$

$$2+\alpha-2+4\alpha+14+4\alpha-5 = 0 \Rightarrow 9\alpha+9 = 0 \Rightarrow 9\alpha = -9 \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow R\begin{cases} x = 2+(-1) \\ y = 1-2\cdot(-1) \\ z = 7+2\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$R(1\,,3\,,5) \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{2+x_{P'}}{2} \Rightarrow 2+x_{P'} = 2 \Rightarrow x_{P'} = 0 \\ 3 = \dfrac{1+y_{P'}}{2} \Rightarrow 1+y_{P'} = 6 \Rightarrow y_{P'} = 5 \\ 5 = \dfrac{7+z_{P'}}{2} \Rightarrow 7+z_{P'} = 10 \Rightarrow z_{P'} = 3 \end{cases} \Rightarrow P'(0\,,5\,,3)$$

Bloque 3 (Análisis) (*Puntuación máxima 4 puntos*)

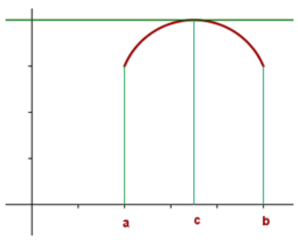
Opción 1.- a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.

b) Sea ***f*(*x*) = *e*^{x} (2*x* –1)**. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de ***f*(*x*)** en el punto de abscisa ***x* = 0**.

c) Calcula: $\int_0^1 e^x(2x-1)\,dx$

a) <u>**Teorema de Rolle**</u>

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b]**, derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\,,b)$ tal que **f'(c) = 0**



La **interpretación gráfica del teorema de Rolle** nos dice que hay un punto en el que la tangente es paralela al eje de abscisas.

Continuación de la Opción 1 del Bloque 3
b)

$$f'(x)=e^x(2x-1)+2\,e^x=e^x(2x-1+2)=e^x(2x+1)\Rightarrow Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\begin{cases}e^x>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\2x+1>0\Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

C**reciente** $\forall x\in\Re\,/\,x>-\dfrac{1}{2}$ **Decreciente** $\forall x\in\Re\,/\,x<-\dfrac{1}{2}$

$$Ecuación\ de\ la\ recta\ \tan gente\ en\ x=0$$

$$\begin{cases}f(0)=e^0(2\cdot 0-1)=1\cdot(0-1)=-1\\f'(0)=e^0(2\cdot 0+1)=1\cdot(0+1)=1\end{cases}\Rightarrow y-(-1)=1\cdot(x-0)\Rightarrow y+1=x\Rightarrow y=x-1\Rightarrow x-y-1=0$$

$c)$

$$\int e^x(2x-1)\,dx=e^x(2x-1)-\int 2e^x\,dx=e^x(2x-1)-2e^x=e^x(2x-1-2)=e^x(2x-3)+K$$

$$Por\ partes\Rightarrow\begin{cases}u=2x-1\Rightarrow du=2\,dx\\e^x dx=dv\Rightarrow v=\int e^x dx=e^x\end{cases}$$

$$\int_0^1 e^x(2x-1)\,dx=\left[e^x(2x-3)\right]_0^1=\left[e^1(2\cdot 1-3)-e^0(2\cdot 0-3)\right]=e\cdot(-1)-1\cdot(-3)=3-e$$

Opción 2.- a) Calcula ***a***, ***b***, ***c***, para que $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & si\quad x\le 0\\x+\ln\left(1+x^2\right) & si\quad x>0\end{cases}$ sea continua y derivable en ***R*** y tenga un extremo relativo en ***x* = –2**. (Nota: ln = logaritmo neperiano)

b) Sea *g*(*x*) = *x* (*x* –1), 0 ≤ *x* ≤ 2. Razona si *g*(*x*) tiene máximo y mínimo absolutos en el intervalo **[0 , 2]**. En caso afirmativo, calcúlalos.
c) Definición de primitiva de una función. Enunciado de la regla de Barrow.

$a)$

$$\begin{cases}f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c\\\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0+\ln\left(1+0^2\right)=\ln 1=0\end{cases}\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\Rightarrow c=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & si\quad x<0\\1+\dfrac{2x}{1+x^2} & si\quad x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=2a\cdot 0+b=b\\\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=1+\dfrac{2\cdot 0}{1+0^2}=1+\dfrac{0}{1}=1\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)\Rightarrow b=1$$

$$f'(-2)=0\Rightarrow 2a\,(-2)+1=0\Rightarrow -4a=-1\Rightarrow a=\frac{1}{4}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^2+x$$

b) Es una función polinómica por lo tanto continua en el intervalo **[0 , 2]**. y derivable en el intervalo **(0 , 2)**, por lo tanto propiedades que se conservan en el intervalo **[0 , 1]** en donde $\begin{cases}f(0)=0\cdot(0-1)=0\\f(1)=1\cdot(1-1)=0\end{cases}$ los extremos de dicho intervalo son iguales y según el teorema de Rolle al verificarse que **f(0) = f(1)** entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f’(c) = 0**

Este punto es:

$$f'(x)=2x-1\Rightarrow f'(c)=0\Rightarrow 2c-1=0\Rightarrow 2c=1\Rightarrow c=\frac{1}{2}\Rightarrow f(c)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{1}{4}$$

Continuación de la Opción 2 del Bloque 3
b) Continuación

Asimismo la función es **estrictamente creciente** para valores de **x >** $\frac{1}{2}$ por lo tanto el **máximo absoluto** se encontrará en el extremo derecho del intervalo en $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot (2-1) = 2$

c)
Dadas dos funciones, **f(x)** y **F(x)** definidas en un intervalo **I = [a , b]**, diremos que **F(x)** es una **función primitiva** de **f(x)** si la derivada de **F(x)** es la función **f(x)** en el intervalo **I**

$$F(x)\, es\ primitiva\ de\ f(x)\ en\ I \Leftrightarrow F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$$

<u>Regla de Barrow</u>

Si **f(x)** es integrable en **[a , b]**, la función $F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$, con $t \in [a\ ,\ b]$ recibe el nombre de **función integral** de **f(x)** en **[a , b]**.