

OPCIÓN A

1.- a) Dada la matriz, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Si I es la matriz identidad de orden **3**, calcula los valores de λ para los que $A + \lambda I$ no tiene inversa.

Calcula, si existe, la matriz inversa de $A - 2I$

b) Calcula la matriz X tal que $XA + A^t = 2X$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1+\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A + \lambda I| = \begin{vmatrix} -1+\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \Rightarrow \text{Si } |A + \lambda I| = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \Rightarrow |A + \lambda I| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (A + \lambda I)^{-1}$$

$$\text{Si } \lambda = -2 \Rightarrow |A - 2I| = (-2 - 1)^2(-2 + 1) = (-3)^2 \cdot (-1) = -9 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (A - 2I)^{-1} \Rightarrow$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{|A - 2I|} [\text{adj}(A - 2I)^t] \Rightarrow A - 2I = \begin{pmatrix} -1-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ 0 & 1 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A - 2I)^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A - 2I)^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{(-9)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b)

$$XA - 2X = -A^t \Rightarrow X(A - 2I) = -A^t \Rightarrow X(A - 2I)(A - 2I)^{-1} = -A^t(A - 2I)^{-1} \Rightarrow XI = -A^t(A - 2I)^{-1} \Rightarrow$$

$$X = -A^t(A - 2I)^{-1} \Rightarrow X = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(-9)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 3 & 15 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2.- Sea r la recta que pasa por el punto $P(1, -1, -2)$ y es perpendicular al plano $\alpha: x + 2y + 3z + 6 = 0$.

Sea s la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(-1, -3, -4)$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s . Si se cortan, calcula el punto de corte.

b) Calcula la distancia del punto $A(1, 0, 0)$ al plano que pasa por el punto $P(1, -1, -2)$ y es paralelo a α

a) El vector director de la recta r es el mismo que el del plano ya que, ambos, son perpendiculares a él, el punto P termina la definición de la recta

El vector director de la recta s es el vector $\overrightarrow{AB}$, siendo uno cualquiera de los puntos dados (tomaremos A) el punto que define a la recta.

Una vez halladas las rectas analizaremos si tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden

Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{v}_\alpha = (1, 2, 3) \\ P(1, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_s = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, -4) - (1, 0, 0) = (-2, -3, -4) \equiv (2, 3, 4) \\ A(1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 3\mu \\ z = 4\mu \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = 1 + 2\mu \\ -1 + 2\lambda = 3\mu \\ -2 + 3\lambda = 4\mu \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda - 2\mu = 0 \\ 2\lambda - 3\mu = 1 \\ 3\lambda - 4\mu = 2 \end{array} \right| \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible Determinado} \Rightarrow$

Son rectas que se cortan en un punto (secantes)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow \lambda - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \text{Punto de corte} \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = -1 + 2 \cdot 2 \\ z = -2 + 3 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow Q(3, 3, 4)$$

b) Si el plano π es paralelo al plano α , tendrá como ecuación $x + 2y + 3z + D = 0$ y contendrá al punto P
 $1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + D = 0 \Rightarrow 1 - 2 - 6 + D = 0 \Rightarrow D = 7 \Rightarrow \pi \equiv x + 2y + 3z + 7 = 0 \Rightarrow$

$$d(A, \pi) = \frac{|1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{|8|}{\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{14} = \frac{4\sqrt{14}}{7} u$$

3.- Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1}$, estudiando: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1) = \frac{(-1)^2 + 3 \cdot (-1)}{(-1)+1} = \frac{1-3}{0} = -\frac{2}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{Puntos de corte con} \Rightarrow \begin{cases} OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \frac{x^2+3x}{x+1}=0 \Rightarrow x^2+3x=0 \Rightarrow (x+3)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow (0,0) \\ x=-3 \Rightarrow (-3,0) \end{cases} \\ OY \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2+3 \cdot 0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow (0,0) \end{cases}$$

$$\text{Asíntotas verticales} \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{(-1)^2 + 3 \cdot (-1)}{(-1^-)+1} = \frac{-2}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{(-1)^2 + 3 \cdot (-1)}{(-1^+)+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3) = 2 \cdot \infty + 3 = \infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x+1} = \frac{\infty}{-\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+3) = 2 \cdot (-\infty) + 3 = -\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2+3x}{x+1} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x-x^2-x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1} = 2$$

Existe asíntota oblicua, $y = x + 2$ cuando $x \rightarrow \infty$

Continuación del Problema 2 de la Opción A*Asíntotas oblicuas (Continuación)*

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 3x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{2x + 1} = \frac{-\infty}{-\infty} =$$

$$= \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + 3x}{x+1} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} = \frac{-\infty}{-\infty} =$$

$$= \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1} = 2$$

Existe asíntota oblicua, $y = x + 2$ cuando $x \rightarrow -\infty$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 3x + 2x + 3 - x^2 - 3x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow \text{Sin solución}$$

$$\text{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ (x+1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

Creciente $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ No hay máximos ni mínimos relativos

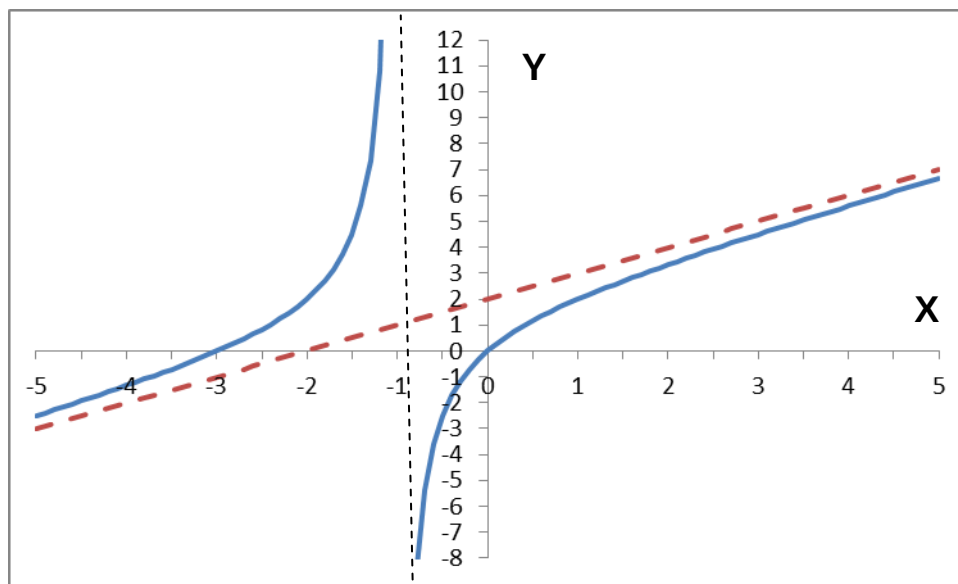
$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x+3)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x+3)}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - 2x^2 - 4x - 6}{(x+1)^3} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

$$\text{Concavidad} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{-4}{(x+1)^3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -4 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$$

	$-\infty$	-1	∞
4 < 0		(-)	(-)
x > -1		(-)	(+)
Solución		(+)	(-)

Concavidad $\forall x \in \mathbb{R} / x < -1$ **Convexidad** $\forall x \in \mathbb{R} / x > -1$ **No hay punto de inflexión porque en $x = -1$ no existe grafico ya que es el punto asíntótico vertical**

Continuación del Problema 2 de la Opción A

4.- a) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral.

Sabiendo que $\int_0^x f(t) dt = x^2(1+x)$, con **f** una función continua en todos los puntos de la recta real, calcula

f(2)

b) Calcula $\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} dx$

a) Si **f(x)** es integrable en **[a, b]** la función $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ con $t \in [a, b]$ recibe el nombre de **función**

integrable de **f(x)** en **[a, b]**, de esta definición se desprende el **Teorema fundamental del cálculo integral** que determina que:

Si **f(x)** es continua en **[a, b]** entonces la función integral es derivable y cumple que:

$$F'(t) = f(t), \forall t \in [a, b]$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = x^2(1+x) \Rightarrow f(x) = F'(x) = 2x(1+x) + x^2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2 \cdot (1+2) + 2^2 = 4 \cdot 3 + 4 = 16$$

b)

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = \frac{x^2 + 1}{x(x+1)} = \frac{-x^2 - x}{-x^2 - x} + \frac{1}{-x+1}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = 1 + \frac{-x+1}{x^2 + x} \Rightarrow \frac{-x+1}{x^2 + x} = \frac{-x+1}{(x+1)x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} = \frac{Ax + B(x+1)}{(x+1)x} \Rightarrow Ax + B(x+1) = -x+1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow A(-1) + B(-1+1) = -(-1)+1 \Rightarrow -A = 2 \Rightarrow A = -2 \\ x = 0 \Rightarrow A \cdot 0 + B(0+1) = -0+1 \Rightarrow B = 1 \end{cases}$$

Continuación del Problema 4 de la Opción A*b) Continuación*

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} dx = \int_1^2 dx - \int_1^2 \frac{2}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [x]_1^2 - 2 \int_2^3 \frac{dt}{t} + [\ln x]_1^2 = (2-1) - 2 \cdot [\ln t]_2^3 + (\ln 2 - \ln 1)$$

$$x+1=t \Rightarrow dx=dt \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=2 \\ x=2 \Rightarrow t=3 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} dx = 1 - 2 \cdot (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 2 - 0) = 1 - 2 \cdot \ln 3 + 3 \cdot \ln 2 = 1 + \ln \frac{2^3}{3^2} = 1 + \ln \frac{8}{9}$$

OPCIÓN B

1.- a) Discute, según los valores del parámetro **a**, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + 2y + 2z = a \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = a \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en el caso **a = 0**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-a & 2-a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2-a & 2-a \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3(2-a) \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -3(2-a) = 0 \Rightarrow$$

$$2-a = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Si $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b)

Si $a = 0$ nos encontramos con una ecuación homogénea y como es Compatible Determinado su solución es la trivial $\Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$; veámoslo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 + 2z = 0 \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$$

2.- Dada la recta $r : \begin{cases} y = 1 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano α que pasa por el punto **Q(0, 2, 2)** y contiene la recta **r**. Calcula el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección de α con los ejes de coordenadas.

b) Calcula la ecuación general del plano que contiene la recta **r** y es perpendicular al plano α

a) Del haz de planos generado por la recta **r** tomaremos aquel que pasa por **Q**

$$r : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Haz de planos} \Rightarrow x - z + 4 + \lambda(y - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Pasando por } Q \Rightarrow 0 - 2 + 4 + \lambda(2 - 1) = 0 \Rightarrow 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow x - z + 4 - 2(y - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha \equiv x - 2y - z + 6 = 0$$

Continuación del Problema 2 de la Opción B

a) Continuación

Los puntos de intersección X, Y, Z con OX, OY y OZ son los puntos pedidos. El área del triángulo XYZ es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores XY y XZ

$$OX : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de corte } X \Rightarrow \lambda - 2 \cdot 0 - 0 + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -6 \Rightarrow X \begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow X(-6, 0, 0)$$

$$OY : \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de corte } Y \Rightarrow 0 - 2\mu - 0 + 6 = 0 \Rightarrow \mu = 3 \Rightarrow Y \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow Y(0, 3, 0)$$

$$OZ : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \rho \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de corte } Z \Rightarrow 0 - 2 \cdot 0 - \rho + 6 = 0 \Rightarrow \rho = 6 \Rightarrow Z \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases} \Rightarrow Z(0, 0, 6)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |XY \wedge XZ| \Rightarrow \begin{cases} XY = (0, 3, 0) - (-6, 0, 0) = (6, 3, 0) \\ XZ = (0, 0, 6) - (-6, 0, 0) = (6, 0, 6) \end{cases} \Rightarrow$$

$$XY \wedge XZ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 18i - 18k - 36j \Rightarrow |XY \wedge XZ| = \sqrt{18^2 + (-18)^2 + (-36)^2} = \sqrt{1944} = 18\sqrt{6}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{6} = 9\sqrt{6} \text{ u}^2$$

b) La ecuación del plano π queda determinada por el vector director del plano α , ya que es perpendicular a este plano, por el vector director de la recta r y por el vector $\mathbf{RG}$, siendo $\mathbf{R}$ un punto cualquiera del plano y $\mathbf{G}$ el punto generador del plano, estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector $\mathbf{RG}$ es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$r : y = 1 \Rightarrow x = -4 + z \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 0, 1) \\ R(-4, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v}_\pi = (1, 1, -6) \\ \vec{RG} = (x, y, z) - (-4, 1, 0) = (x+4, y-1, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(y-1) + z - (x+4) + 6(y-1) = 0 \Rightarrow (x+4) - 7(y-1) - z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 7y - z + 11 = 0$$

3.- a) Define función continua en un punto. ¿Cuándo se dice que una discontinuidad es evitable? ¿Para qué

valores de k , la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ es continua en todos los puntos de la recta real?

b) Determina los valores de a , b , c y d para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto $(0, 4)$ y un mínimo relativo en el punto $(2, 0)$

a) Una función es **continua en el punto** $x = x_0$ si, y solo si, verifica que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Desglosando el concepto de límite podremos dar una definición de función continua equivalente:

Una función f es **continua en el punto** $x = x_0$ si verifica las siguientes condiciones:

- Existe $f(x_0)$, es decir la función está definida en $x = x_0$
- Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Los dos valores anteriores coinciden $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Una función f tiene una **discontinuidad evitable** en un punto x_0 cuando $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Existirá continuidad de la función cuando $k > 0$ ya que al ser k positivo se cumple:

$$x^2 + k = 0 \Rightarrow x^2 = -k \Rightarrow x = \pm\sqrt{-k} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

y, por lo tanto, se cumplirá la continuidad

b)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 4 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 4 \Rightarrow d = 4 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f(2) = 0 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + 4 = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ -3a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0 \end{cases}$$

$$-a = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 + b = -1 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow f(0) = -x^3 - 3x^2 + 4$$

4.- Dibuja y calcula el área de la región limitada por la recta $x + y = 7$ y la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 + 5$ (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad o convexidad)

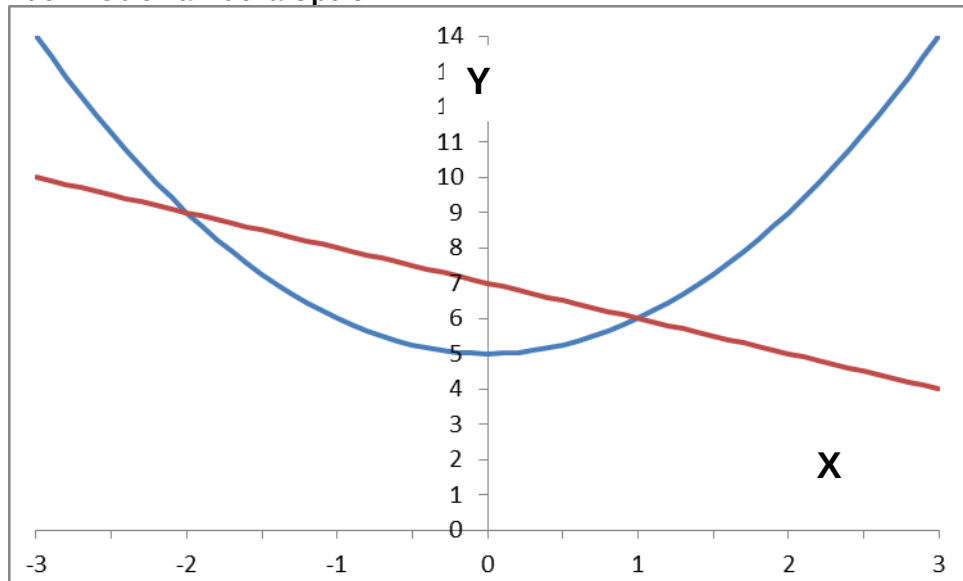
$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 7 - x = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (7, 0) \\ 0 = x^2 + 5 \Rightarrow x^2 = -5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-5} \Rightarrow \text{No hay puntos de corte} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte con OY} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 7 - 0 = 7 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow (0, 7) \\ f(0) = 0^2 + 5 = 5 \Rightarrow (0, 5) \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Decreciente} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x < 0 \\ \text{Creciente} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Vértice y Mínimo relativo en } x = 0 \Rightarrow f(0) = 5 \Rightarrow (0, 5)$$

$$f''(x) = 2 \Rightarrow \text{Concava} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow \text{Cóncava} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

Continuación del Problema 4 de la Opción B

Punto de corte entre funciones $\Rightarrow x^2 + 5 = 7 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 \geq 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$A = \int_{-2}^1 (7 - x) dx - \int_{-2}^1 (x^2 + 5) dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = 2 \cdot [x]_{-2}^1 - \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-2}^1 - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-2}^1 =$$

$$A = 2 \cdot [1 - (-2)] - \frac{1}{2} \cdot [1^2 - (-2)^2] - \frac{1}{3} \cdot [1^3 - (-2)^3] = 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot (1 - 4) - \frac{1}{3} \cdot [1 - (-8)] = 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3}$$

$$A = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} u^2$$