OPCIÓN A

1.- a) Sean **C_1**, **C_2**, **C_3** las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada **M** de orden **3** con **det(M) = 4**. Calcula, enunciando las propiedades de determinantes que utilices, el determinante de la matriz cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, **$-C_2$**, **$2C_1 - C_3$**, **$C_2 + C_3$**

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos os valores de **a** y **b** para los que **$A^{-1} = A^t$**, siendo **A^t** la matriz traspuesta de **A**.

$a)$

$$M = \left| -C_2 \quad 2C_1 - C_3 \quad C_2 + C_3 \right| = \left| -C_2 \quad 2C_1 - C_3 \quad C_2 \right| + \left| -C_2 \quad 2C_1 - C_3 \quad C_3 \right| (1) =$$
$$= (-1) \cdot \left| C_2 \quad 2C_1 - C_3 \quad C_2 \right| + \left| -C_2 \quad 2C_1 - C_3 \quad C_3 \right| (2) = (-1) \cdot 0 + \left| -C_2 \quad 2C_1 - C_3 \quad C_3 \right| (3) =$$
$$= \left| -C_2 \quad 2C_1 - C_3 \quad C_3 \right| = \left| -C_2 \quad 2C_1 \quad C_3 \right| + \left| -C_2 \quad -C_3 \quad C_3 \right| (1) =$$
$$= (-1) \cdot \left| C_2 \quad 2C_1 \quad C_3 \right| + (-1) \cdot (-1) \cdot \left| C_2 \quad C_3 \quad C_3 \right| (2) = (-1) \cdot \left| C_2 \quad 2C_1 \quad C_3 \right| + 1.0 \; (3) =$$
$$= (-1) \cdot 2 \cdot \left| C_2 \quad C_1 \quad C_3 \right| (4) = (-1) \cdot (-2) \cdot \left| C_1 \quad C_2 \quad C_3 \right| (4) = 2 \cdot 4 = 8$$

(1) Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha fila o columna el primero y el segundo sumando respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.
(2) Si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un número k, su determinante queda multiplicado por dicho número.
Como generalización de esta propiedad, si tenemos una fila (o una columna) donde todos sus términos están multiplicados por un valor k, este se puede sacar como factor común.
(3) Si una matriz cuadrada tiene dos filas (o columnas) iguales, entonces su determinante es nulo.
(4) Si intercambiamos dos filas (o dos columnas) de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo aunque son iguales en valor absoluto**.**

$b)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \Rightarrow Existe\ A^{-1} si\ a \in \Re - \{0\}\ y\ b \in \Re \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(adj\ A^t \right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases} \\ b = 0 \\ -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

2.- a) ¿Son coplanarios los puntos **A(1 , 0 , 2)**, **B(0 , -1 , 1)**, **C(-1 , -2 , 0)** y **D(0 , 2 , 2)**? Si existe, calcula la ecuación del plano que los contiene.
b) Calcula la ecuación general y las ecuaciones paramétricas del plano que es perpendicular al plano α : **2x + y – 3z + 4 = 0** y contiene la recta que pasa por los puntos **P(-1 , 1 , 2)** y **Q(2 , 3 , 6)**
.
a) Los vectores AB, AC y AD para que sean coplanarios (pertenecen al mismo plano) al ser uno combinación lineal de los otros dos hará que el determinante de la matriz formada por ellos es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0 , -1 , 1) - (1 , 0 , 2) = (-1 , -1 , -1) \equiv (1 , 1 , 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1 , -2 , 0) - (1 , 0 , 2) = (-2 , -2 , -2) \equiv (1 , 1 , 1) \\ \overrightarrow{AD} = (0 , 2 , 2) - (1 , 0 , 2) = (-1 , 2 , 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Dos\ \ filas\ iguales$$

$$Son\ coplanarios$$

El plano π, se determina por los vectores AB, AD y AG, siendo G el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector AG es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano. No cogemos **C** porque está alineado con A y B

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1 , 1 , 1) \\ \overrightarrow{AD} = (-1 , 2 , 0) \\ \overrightarrow{AG} = (x , y , z) - (1 , 0 , 2) = (x - 1 , y , z - 2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-y + 2\,(z-2) + (z-2) - 2\,(x-1) = 0 \Rightarrow 2\,(x-1) + y - 3\,(z-2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - 3z + 4 = 0$$

b) El plano β queda determinado por el vector director del plano α, el vector **PQ** y por el vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\alpha} = (2 , 1 , -3) \\ \overrightarrow{PQ} = (2 , 3 , 6) - (-1 , 1 , 2) = (3 , 2 , 4) \\ \overrightarrow{PG} = (x , y , z) - (-1 , 1 , 2) = (x + 1 , y - 1 , z - 2) \end{cases} \Rightarrow \beta \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$4\,(x+1) - 9\,(y-1) + 4\,(z-2) - 3\,(z-2) + 6\,(x+1) - 8\,(y-1) = 0 \Rightarrow 10\,(x+1) - 17\,(y-1) + (z-2) = 0 \Rightarrow$$
$$\beta \equiv 10x - 17y + z + 25 = 0$$

El vector director del plano α, el vector **PQ** y uno cualquiera de los puntos dados (tomaremos en este caso el punto Q, configuran la ecuación del plano en paramétricas

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\alpha} = (2 , 1 , -3) \\ \overrightarrow{PQ} = (2 , 3 , 6) - (-1 , 1 , 2) = (3 , 2 , 4) \\ Q = (2 , 3 , 6) \end{cases} \Rightarrow \beta \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda - \mu \\ y = 3 + \lambda + \mu \\ z = 6 - 3\lambda + 2\mu \end{cases}$$

3.- a) Enuncia el teorema de Rolle. Calcula el valor de **k** para que la función **f(x) = x^3 – kx + 10** cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo **[-2 , 0]** y para ese valor determina un punto de intervalo en el que se anule la derivada de **f(x)**.

b) Calcula el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $g(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

(Nota: ln = logaritmo neperiano).

a) **<u>Teorema de Rolle</u>**

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b]**, derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

$$\begin{cases} f(-2) = (-2)^3 - k\cdot(-2) + 10 = -8 + 2k + 10 = 2k + 2 \\ f(0) = 0^3 - k\cdot 0 + 10 = 10 \end{cases} \Rightarrow f(-2) = f(0) \Rightarrow 2k + 2 = 10 \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4$$

$$f(x) = x^3 - 4x + 10 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 4 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 4 \Rightarrow c^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = \frac{4\sqrt{3}}{3} \notin [-2\ ,0] \Rightarrow \textit{No es solución} \\ c = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \in [-2\ ,0] \end{cases}$$

$b)$

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \textit{Sin solución real} \\ \frac{x^2-1}{x^2+1} > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases} \end{cases}$$

	$-\infty$ -1	-1 1	1 ∞
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**
x^2+ 1 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

$$Dom\ (f) = \forall x \in \Re / (x < -1) \cup (x > 1)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \frac{2x\,(x^2+1) - 2x\,(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\textit{Crecimiento} \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow \frac{4x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

Continuación del Problema 3 de la Opción A

	$-\infty$	-1	0	1	∞
4 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**	
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**	
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**	
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**	
x^2+1 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**	
Solución	**(-)**	**No existe**	**No existe**	**(+)**	

En la zona sombreada no existe función

Decrecimiento $\forall x \in \Re / x < -1$ **Crecimiento** $\forall x \in \Re / x > 1$

4.- Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola **f(x) = x^2 – 2x + 1**, y su recta tangente en el punto **(3 , 4)** y el eje **OX** (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

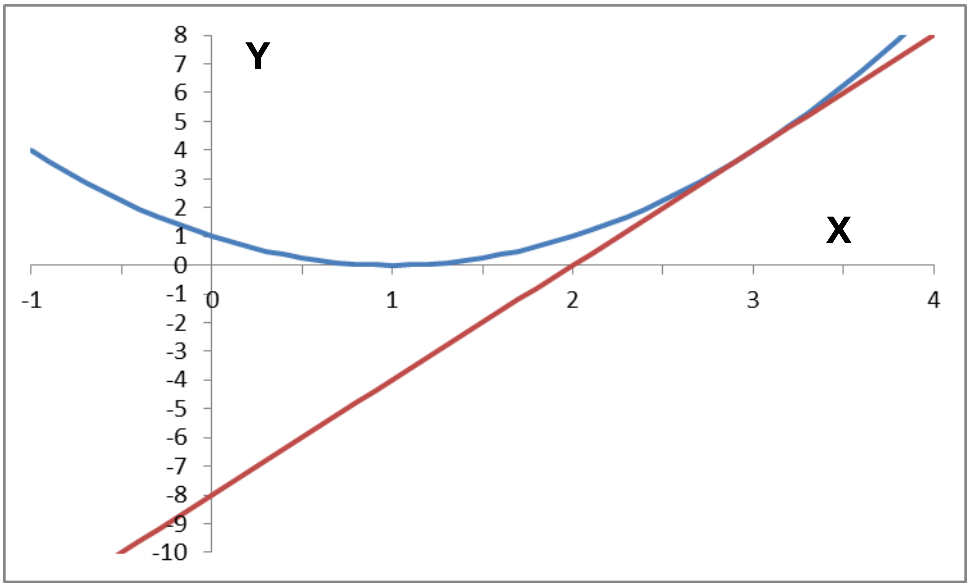
$$\textit{Ecuación de la recta tangente} \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow m = f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \Rightarrow y - 4 = 4(x-3) \Rightarrow$$
$$y = 4x - 12 + 4 \Rightarrow y = 4x - 8 \Rightarrow 4x - y - 8 = 0$$

$$\textit{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2\,,0) \\ 0 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow (1\,,0) \end{cases}$$

$$\textit{Puntos de corte con OY} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \cdot 0 - 8 = -8 \Rightarrow (0\,,-8) \\ f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0\,,1) \end{cases}$$

$$f'(x) = 2(x-1) \Rightarrow \textit{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 2(x-1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \textit{Decrece} \Rightarrow \forall x \in \Re / x < 1 \\ \textit{Crece} \Rightarrow \forall x \in \Re / x > 1 \end{cases} \Rightarrow \textit{Vértice o mínimo relativo en } x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow \textit{De decrec. pasa a crec.}$$



Continuación del Problema 4 de la Opción A

$$\textit{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4x - 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

$$A = \int_1^2 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx + \int_2^3 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx - \int_2^3 (4x - 8)\, dx = \int_1^3 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx - \int_2^3 (4x - 8)\, dx$$

$$A = \int_1^3 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx - \int_2^3 (4x - 8)\, dx = \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_1^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_1^3 + [x]_1^3 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_2^3 + 8 \cdot [x]_2^3$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \left(3^3 - 1^3\right) - \left(3^2 - 1^2\right) + (3 - 1) - 2 \cdot \left(3^2 - 2^2\right) + 8 \cdot (3 - 2) = \frac{26}{3} - 8 + 2 - 10 + 8 = \frac{26}{3} - 8 = \frac{26 - 24}{3} = \frac{2}{3}\, u^2$$

OPCIÓN B

1.- a) Discute, según los valores del parámetro **m**, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} mx-2y+2z=1 \\ 2x+my+z=2 \\ x+3y-z=m \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en el caso **m = 1**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} m & -2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -2-3m & 2+m \\ 0 & m-6 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -(2+3m) & 2+m \\ m-6 & 3 \end{vmatrix}=-3(2+3m)-(m-6)(2+m)=$$

$$|A|=-6-9m-2m-m^2+12+6m=-m^2-5m+6 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -m^2-5m+6=0 \Rightarrow m^2+5m-6=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=5^2-4\cdot1\cdot(-6)=25+24=49\geq0 \Rightarrow m=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2\cdot1} \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{-5+7}{2}=1 \\ m=\frac{-5-7}{2}=-6 \end{cases}$$

$$\forall m\in\Re-\{-6\ ,1\} \Rightarrow |A|\neq0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ m=-6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 16 & -4 & -35 \\ 0 & -12 & 3 & 14 \\ 1 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 16 & -4 & -35 \\ 0 & -48 & 12 & 56 \\ 1 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 16 & -4 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 49 \\ 1 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Si\ m=1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Si\ m=1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$solución\ es\ la\ trivial \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(0\ ,\ 0\ ,\ 0);\ veamoslo:$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow 5y-3z=0 \Rightarrow 5y=3z \Rightarrow y=\frac{3}{5}z \Rightarrow x-2\cdot\frac{3}{5}z+2z=1 \Rightarrow x+\frac{10-6}{5}z=1 \Rightarrow x=1-\frac{4}{5}z$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(1-\frac{4}{5}\lambda\ ,\ \frac{3}{5}\lambda\ ,\ \lambda\right)\equiv(1-4\lambda\ ,\ 3\lambda\ ,\ 5\lambda)$$

2.- a) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto **P(1 , 2 , -3)** y es perpendicular a la recta

$$r:\begin{cases}2x+y+2=0\\3x-z+1=0\end{cases}$$

b) Calcula la distancia ***d*** del punto **Q(-1 , 0 , -2)** al plano β : **x – 2y + 3z + 12 = 0**. Calcula, si existe, otro punto de la recta ***r*** que también diste ***d*** del plano β.

a) El vector director del plano π es el vector director de la recta **r** que es perpendicular al vector **PG**, donde **G** es el punto genérico del plano, y debido a ello el producto escalar de ambos vectores es nulo y la ecuación pedida del plano.
Para calcular el vector director de la recta **r** hallaremos el producto vectorial de los vectores directores de los planos que la determinan

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_1}=(2,1,0)\\\overrightarrow{v_2}=(3,0,-1)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&0\\3&0&-1\end{vmatrix}=-\vec{i}-3\vec{k}+2\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=(-1,2,-3)\equiv(1,-2,3)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(1,-2,3)\\\overrightarrow{PG}=(x,y,z)-(1,2,-3)=(x-1,y-2,z+3)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{PG}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{PG}=0\Rightarrow$$

$$(1,-2,3)\cdot(x-1,y-2,z+3)=0\Rightarrow x-1-2y+4+3z+9=0\Rightarrow\pi\equiv x-2y+3z+12=0$$

$b)$

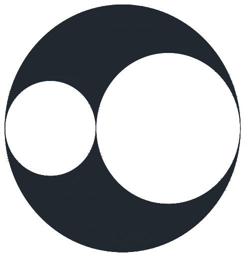
$$d(Q,\alpha)=\frac{|-1-2\cdot 0+3\cdot(-2)+12|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{14}}=\frac{5\sqrt{14}}{14}$$

$$y=-2-2x\Rightarrow z=1+3x\Rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\y=-2-2\lambda\\z=1+3\lambda\end{cases}\Rightarrow\frac{\lambda-2\cdot(-2-2\lambda)+3\cdot(1+3\lambda)+12}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\pm\frac{5}{\sqrt{14}}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda+4+4\lambda+3+9\lambda+12=5\Rightarrow14\lambda+19=5\Rightarrow14\lambda=-14\Rightarrow\lambda=-1\Rightarrow Q\begin{cases}x=-1\\y=-2-2\cdot(-1)\\z=1+3\cdot(-1)\end{cases}\\\lambda+4+4\lambda+3+9\lambda+12=-5\Rightarrow14\lambda+19=-5\Rightarrow12\lambda=-24\Rightarrow\lambda=-2\Rightarrow S\begin{cases}x=-2\\y=-2-2\cdot(-2)\\z=1+3\cdot(-2)\end{cases}\end{cases}\Rightarrow$$

$$Son\ los\ puntos\Rightarrow\begin{cases}Q(-1,0,-2)\\S(-2,2,-5)\end{cases}$$

3.- En una circunferencia de radio 10 cm., se divide en dos sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a ella. ¿Qué longitud debe de tener cada uno de estos dos diámetros para que sea máxima el área delimitada por las tres circunferencias (región sombreada)?



Siendo r y R los radios respectivos de las dos circunferencias

$$\begin{cases} 2\cdot 10 = 2r + 2R \Rightarrow 10 = r + R \Rightarrow R = 10 - r \\ A = \pi 10^2 - \pi r^2 - \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow A = \pi 10^2 - \pi r^2 - \pi (10 - r)^2$$

$$A = 100\pi - \pi r^2 - \pi\left(100 - 20r + r^2\right) = \pi 100 - \pi r^2 - 100\pi + 20\pi r - \pi r^2 = -2\pi r^2 + 20\pi r \Rightarrow$$

$$A' = \frac{dA}{dr} = -4\pi r + 20\pi \Rightarrow -4\pi r + 20\pi = 0 \Rightarrow 4\pi r = 20\pi \Rightarrow r = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{dr^2} = -4\pi < 0 \Rightarrow Max.$$

$$\begin{cases} r = 5\ cm \\ R = 10 - 5 = 5\ cm \end{cases}$$

4.- a) Define función derivable en un punto. Calcula, si existen, los valores de a y b, para que sea derivable la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & si \quad x < 0 \\ x^2 + ax + b & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

b) Define integral indefinida de una función. Calcula $\int x^2 \cos x\, dx$

a) La derivada de la función **f** en el punto **x = a**, **f'(a)**, si existe, es el valor del límite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La **derivada lateral por la izquierda** de una función **f** en el punto **x = a** es:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La **derivada lateral por la derecha** de una función **f** en el punto **x = a** es:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La función **f** es **derivable** en el punto **x = a** si existen la derivadas laterales y estas coinciden

Por lo tanto toda función derivable en un punto es continua en dicho punto

Continuidad de la función

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{1-0}{e^0} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^2 + a\cdot 0 + b = b \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow b = 1$$

Continuación del Problema 4 de la Opción B

a) Continuación

Derivabilidad

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-e^x-e^x(1-x)}{e^{2x}}=\dfrac{-e^x(1+1-x)}{e^{2x}}=\dfrac{x-2}{e^x} & si \quad x<0\\ 2x+a \quad si \quad x>0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\dfrac{0-2}{e^0}=\dfrac{-2}{1}=-2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=2\cdot 0+a=a\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)\Rightarrow a=-2\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{e^x} & si \quad x<0\\ x^2-2x+1 & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

b)

<u>Definición de integral indefinida</u>

Sea **F(x)** una primitiva de la función **f(x)** en el intervalo **I = [a , b]**; llamamos **integral indefinida** de **f(x)** al conjunto de todas sus primitivas **F(x) + C**, siendo **C** un valor constante y lo representamos por:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2 sen\ x-\int sen\ x\cdot 2x\,dx=x^2 sen\ x-2\int x\ sen\ x\,dx=x^2 sen\ x-2\cdot\left[x\,(-\cos x)-\int(-\cos x)dx\right]$$

$$Por\ \ partes\Rightarrow\begin{cases}x^2=u\Rightarrow 2x\,dx=du\\ \cos x\,dx=dv\Rightarrow v=\int\cos x\,dx=sen\ x\end{cases}\quad\begin{cases}x=u\Rightarrow dx=du\\ sen\ x\,dx=dv\Rightarrow v=\int sen\ x\,dx=-\cos x\end{cases}$$

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2 sen\ x+2x\cos x-2\int\cos x\,dx=x^2 sen\ x+2x\cos x-2\ sen\ x+K$$