OPCIÓN A

1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de **m** , el rango de la matriz .

b) Resolver, si es posible, el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para el valor **m = 1**.

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m^2 - m \\ 0 & m^2 - 1 & m^2 - 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & m^2 - m \\ m^2 - 1 & m^2 - 1 \end{vmatrix} = (m^2 - m)(m^2 - 1) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow$$

$$(m^2 - m)(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m\,(m-1)(m-1)(m+1) = 0 \Rightarrow m\,(m-1)^2\,(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \\ m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \{-1\,,\,0\,,\,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3$$

$Si\ m = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (A) = 2$$

$Si\ m = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (A) = 2$$

$Si\ m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (A) = 1$$

$b)$

$$Si\ m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y+z = 1 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = (1 - \lambda - \mu\,,\,\lambda\,,\,\mu)$$

2.- Dados los puntos **A(3 , 0 , 2)**, **B (1 , -2 , 0)**, **C(1 , -1, 3) y D** $(\lambda , \lambda - 2 , - \lambda)$

a) Determina el valor de λ para qué **A**, **B**, **C** y **D**, sean coplanarios. ¿Para algún valor de λ son, vértices consecutivos de un paralelogramo?

b) Calcula las ecuaciones paramétricas del plano π que pasa por el punto **C** y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos **A** y **B**.

.

a) Los vectores **AB**, **AC** y **AD** para que sean coplanarios (pertenecen al mismo plano) debe ser uno combinación lineal de los otros dos y, por ello, determinante de la matriz formada por ellos es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1 , -2 , 0) - (3 , 0 , 2) = (-2 , -2 , -2) \equiv (1 , 1 , 1) \\ \overrightarrow{AC} = (1 , -1, 3) - (1 , 0 , 2) = (0 , -1 , 1) \\ \overrightarrow{AD} = (\lambda , \lambda - 2 , -\lambda) - (3 , 0 , 2) = (\lambda - 3 , \lambda - 2 , -\lambda - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & \lambda - 2 & -(\lambda + 2) \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda - 3 + \lambda + 2 + \lambda - 3 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow D(1 , -1 , -1)$$

El punto medio **P** del vector **AC** es el mismo que el del vector **BD** (al tratarse de longitudes no podremos usar los representantes canónicos)

$$P\begin{cases} x_P = \dfrac{x_A + x_c}{2} = \dfrac{3+1}{4} = 2 \\ y_P = \dfrac{y_A + y_c}{2} = \dfrac{0 + (-1)}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ z_P = \dfrac{z_A + z_c}{2} = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(2 , -\frac{1}{2} , \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 2 = \dfrac{1+\lambda}{2} \Rightarrow 1 + \lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 3 \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{-2 + \lambda - 2}{2} \Rightarrow \lambda - 4 = -1 \Rightarrow \lambda = 3 \\ \dfrac{5}{2} = \dfrac{0 + (-\lambda)}{2} \Rightarrow -\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

No existe ningún valor de λ que haga que sean vértices consecutivos de un paralelogramo

b) El plano π , queda determinado por su vector director que coincide con el vector **AB** y por el vector **CG**, siendo G el punto generador, estos dos vectores son perpendiculares y su producto escalar es nulo y la ecuación general del plano pedido, a partir de ella hallaremos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{AB} = (1 , 1 , 1) \\ \overrightarrow{CG} = (x , y , z) - (1 , -1 , 3) = (x - 1 , y + 1 , z - 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{CG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{CG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1 , 1 , 1) \cdot (x - 1 , y + 1 , z - 3) = 0 \Rightarrow x - 1 + y + 1 + z - 3 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + z - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 3 - y - z \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

3.- a) Enuncia el teorema de Bolzano. Probar que a función **f(x) = x³ + 2x - 4** corta el eje OX en algún punto del intervalo **[1 , 2]**. ¿Puede cortarlo en más de un punto?

b) Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

a) **<u>Teorema de Bolzano</u>**

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que **f(c) = 0**

La función **f(x) = x³ + 2x – 4** es continua en el intervalo **[1 , 2]**, y sus valores en los extremos del intervalo son:

$\begin{cases} f(1) = 1^3 + 2\cdot 1 - 4 = 3 - 4 = -1 < 0 \\ f(2) = 2^3 + 2\cdot 2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0 \end{cases}$ de distinto signo **[sign f(1) $\neq$ sign f(2)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (1\ ,2)$ tal que **f(c) = 0** que es el punto de corte con **OX**

Veamos si es una solución única, supongamos que existe otro punto $d \in (1\ ,2)$ en donde **f(d) = 0,** según el **<u>Teorema de Rolle</u>**: "Sea **f(x**) una función continua en **[c , d]**, derivable en **(c , d)** y que verifica que **f(c) = f(d)** =0; entonces existe, al menos, un punto $p \in (c\ ,d)$ tal que **f'(p) = 0**

Derivemos la función

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(p) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{2}{3}}$$

que no tiene solución, por lo tanto no hay otro punto, en el intervalo **[c , d]** que pertenece al intervalo **[1 , 2]**, que corte al eje **OX**

$b)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{0+2}{0^2+0+2}\right)^{\frac{1}{0^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x+2-x^2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2+x+2} + \frac{-x^2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+x+2}{-x^2}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+x+2}{-x^2}}\right)^{-\frac{x^2+x+2}{x^2}\cdot\frac{(-1)}{x^2+x+2}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+x+2}{-x^2}}\right)^{-\frac{x^2+x+2}{x^2}}\right]^{\frac{(-1)}{x^2+x+2}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{(-1)}{x^2+x+2}} = e^{\frac{(-1)}{0^2+0+2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

4.- Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola **f(x) = 3x - x²** y su recta normal en el punto **(3 , 0)**. (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad o convexidad).

$$\textit{Ecuación de la recta normal} \Rightarrow f'(x) = 3 - 2x \Rightarrow m = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{3 - 2\cdot 3} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}(x-3) \Rightarrow$$

$$y = \frac{x}{3} - 1 \Rightarrow 3y = x - 3 \Rightarrow x - 3y - 3 = 0$$

$$\textit{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3\,,0) \\ 0 = 3x - x^2 \Rightarrow x(3-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

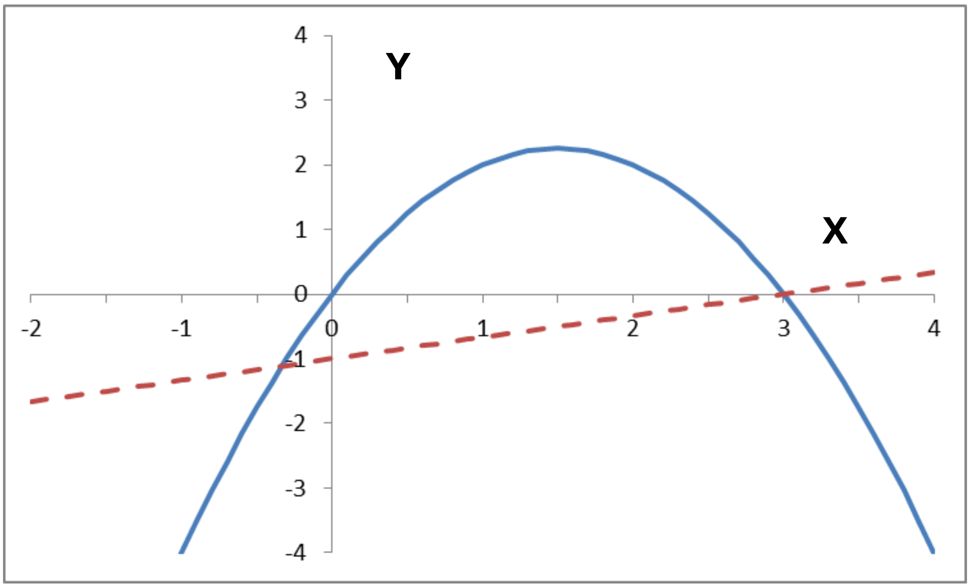
$$\textit{Puntos de corte con OY} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{0}{3} - 1 = -1 \Rightarrow (0\,,-1) \\ f(0) = 3\cdot 0 - 0^2 = 0 \Rightarrow (0\,,0) \end{cases}$$

$$f'(x) = 3 - 2x \Rightarrow \textit{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 3 - 2x > 0 \Rightarrow -2x > -3 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \textit{Crece} \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, x < \frac{3}{2} \\ \textit{Decrece} \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, x > \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \textit{Vértice o máximo relativo en } \; x = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{18-9}{4} = \frac{9}{4} \textit{De crecimiento pasa a decrecimiento}$$

$$f''(x) = 3 \Rightarrow \textit{Concavidad} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow 3 > 0 \Rightarrow \textit{Concavidad} \Rightarrow \forall x \in \Re$$



Continuación del Problema 4 de la Opción A

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow 3x - x^2 = \frac{x}{3} - 1 \Rightarrow 9x - 3x^2 = x - 3 \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64 + 36 = 100 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8+10}{6} = 3 \\ x = \dfrac{8-10}{6} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$A = \left| \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) dx \right| - \left| \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left(3x - x^2 \right) dx \right| + \int_{0}^{3} \left(3x - x^2 \right) dx + \left| \int_{0}^{3} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) dx \right| =$$

$$A = -\int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) dx - \int_{0}^{3} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) dx + \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left(3x - x^2 \right) dx + \int_{0}^{3} \left(3x - x^2 \right) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{3} \left(3x - x^2 \right) dx - \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) dx$$

$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^{3} \left(3x - x^2 - \frac{x}{3} + 1 \right) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{3} \left(-x^2 + \frac{8x}{3} + 1 \right) dx = -\frac{1}{3} \cdot \left[x^3 \right]_{-\frac{1}{3}}^{3} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \right]_{-\frac{1}{3}}^{3} + \left[x \right]_{-\frac{1}{3}}^{3}$$

$$A = -\frac{1}{3} \cdot \left[3^3 - \left(-\frac{1}{3} \right)^3 \right] + \frac{4}{3} \cdot \left[3^2 - \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right] + \left[3 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right] = -\frac{1}{3} \cdot \left[27 - \left(-\frac{1}{27} \right) \right] + \frac{4}{3} \cdot \left(9 - \frac{1}{9} \right) + \left(3 + \frac{1}{3} \right)$$

$$A = -\frac{1}{3} \cdot \left(27 + \frac{1}{27} \right) + \frac{4}{3} \cdot \frac{80}{9} + \frac{10}{3} = -\frac{1}{3} \cdot \left(27 + \frac{1}{27} \right) + \frac{4}{3} \cdot \frac{80}{9} + \frac{10}{3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{780}{27} + \frac{320}{27} + \frac{10}{3}$$

$$A = \frac{-260 + 320 + 90}{27} = \frac{150}{27} = \frac{50}{9}\, u^2$$

OPCIÓN B

1.- Dado el sistema $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ x-3y+2z=-4 \end{cases}$

a) Calcula el valor de α para que al añadirle la ecuación $\alpha x+y+z=9$ resulte un sistema compatible indeterminado. Resuélvelo, si es posible, para **α = 0**.

b) ¿Existe algún valor de α para el cual el sistema con estas **3** ecuaciones no tenga solución?

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1+2\alpha & 1-3\alpha \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1+2\alpha & 1-3\alpha \end{vmatrix}=-(1-3\alpha)+(1+2\alpha)=-1+3\alpha+1+2\alpha \Rightarrow$$

$$|A|=5\alpha \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow 5\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$$

$$Si\ \alpha=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ inconitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -y-z=-9 \Rightarrow y=9-z \Rightarrow x-2\ (9-z)+3z=5 \Rightarrow x-18+2z+3z=5 \Rightarrow$$

$$x=23-5z \Rightarrow Cuando\ \alpha=0 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(23-5\lambda\ ,\ 9-\lambda\ ,\ \lambda)$$

b)

Hemos visto en el apartado a) que:

$$\forall\,\alpha \in \Re-\{0\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ inconitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

No hay ningun valor de α que haga que el Sistema sea Incompatible

2.- a) Sea $\left|\vec{v}\right| = 6,\ \left|\vec{w}\right| = 10\ y\ \left|\vec{v}+\vec{w}\right| = 14$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{v}\ y\ \vec{w}$

b) Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por los puntos **A(-1 , 5 , 0)** y **B(0 , 1 , 1)** y es paralelo a la recta $r:\begin{cases}3x+2y-3=0\\2y-3z-1=0\end{cases}$

a) Sabiendo que:

$$\left(\vec{v}+\vec{w}\right)^2 = \vec{v}^{\,2} + 2\cdot\vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{w}^{\,2} \Rightarrow \left|\vec{v}+\vec{w}\right|^2 = \left|\vec{v}\right|^2 + 2\cdot\vec{v}\cdot\vec{w} + \left|\vec{w}\right|^2 \ \ y\ sabiendo\ que\ \vec{v}\cdot\vec{w} = \left|\vec{v}\right|\left|\vec{w}\right|\cdot\cos\left(\vec{v}\ ,\ \vec{w}\right)$$

$$Siendo\ \alpha = ángulo\left(\vec{v}\ ,\ \vec{w}\right) \Rightarrow \left|\vec{v}+\vec{w}\right|^2 = \left|\vec{v}\right|^2 + 2\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cdot\cos\alpha + \left|\vec{w}\right|^2 \Rightarrow$$

$$2\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cdot\cos\alpha = \left|\vec{v}+\vec{w}\right|^2 - \left|\vec{v}\right|^2 - \left|\vec{w}\right|^2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left|\vec{v}+\vec{w}\right|^2 - \left|\vec{v}\right|^2 - \left|\vec{w}\right|^2}{2\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|} = \frac{14^2-6^2-10^2}{2\cdot 6\cdot 10} = \frac{196-36-100}{120}$$

$$\cos\alpha = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = arc\ \cos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^0 = \frac{\pi}{3}\ rad$$

b) Con los datos dados tenemos los elementos necesarios para determinar la ecuación paramétrica del plano π, estos son los vectores **AB**, el vector director de la recta **r** y uno cualquiera de los puntos dados (tomaremos el punto A)

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB} = (0\ ,1\ ,1) - (-1\ ,5\ ,0) = (1\ ,-4\ ,1)\\ 3x = 3-2y \Rightarrow x = 1-\frac{2}{3}y \Rightarrow 3z = -1+2y \Rightarrow z = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}y \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \left(-\frac{2}{3}\ ,1\ ,\frac{2}{3}\right) \equiv (-2\ ,3\ ,2) \Rightarrow \\ A(-1\ ,5\ ,0)\end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{cases}x = -1+\lambda-2\mu\\ y = 5-4\lambda+3\mu\\ z = \lambda+2\mu\end{cases}$$

Los vectores **AB** y el vector director de la recta **r** son coplanarios con el vector **AG**, siendo **G** el punto genérico de la recta, Estos tres vectores al ser coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **AG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB} = (1\ ,-4\ ,1)\\ \overrightarrow{v_r} = (-2\ ,3\ ,2)\\ \overrightarrow{AG} = (x\ ,y\ ,z) - (-1\ ,5\ ,0) = (x+1\ ,y-5\ ,z)\end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix}x+1 & y-5 & z\\ 1 & -4 & 1\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-8\,(x+1) - 2\,(y-5) + 3z - 8z - 3\,(x+1) - 2\,(y-5) = 0 \Rightarrow 11\,(x+1) + 4\,(y-5) + 5z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 11x + 4y + 5z - 9 = 0$$

3.- a) Determina los valores de **a** para que la función $f:\Re\to\Re \quad f(x)=\begin{cases} a-x^2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & si \quad x>1 \end{cases}$ sea continua. ¿Es derivable en **x = 1** para algún valor de **a**?
b) Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial.

$a)$

$$\begin{cases} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a-1^2=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{2}{a\cdot 1}=\dfrac{2}{a} \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow a-1=\frac{2}{a}\Rightarrow a^2-a=2\Rightarrow$$

$$a^2-a-2=0\Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9\ge 0\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ a=\dfrac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & si \quad x<1 \\ -\dfrac{2}{ax^2} & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=-2\cdot 1=-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=-\dfrac{2}{a\cdot 1^2}=-\dfrac{2}{a} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)\Rightarrow -2=-\frac{2}{a}\Rightarrow$$

$$-2a=-2\Rightarrow a=1$$

Cuando **a = 1** la función no es **continua** y **tiene derivada** o sea **no es derivable**
Cuando **a = -1** la función es **continua** y **no tiene derivada** o sea **no es derivable, es continua**
Cuando **a = 2** la función es **continua** y **no tiene derivada** o sea **no es derivable, es continua**

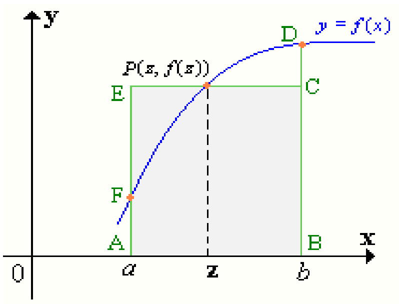
b)
c) Establece que:
Si f es continua en [a, b] existe al menos un número c en [a, b] tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

Al número **f(c)** se le llama valor medio de **f** en el intervalo **[a, b]**

Interpretación geométrica

Si f es no negativa, f(x) $\ge$ 0 , en [a, b] $\int_a^b f(x)\,dx$ mide el área encerrada entre la curva y = **f(x)** y las rectas **x = a** y **x = b**.
El teorema del valor medio del cálculo integral viene a decir que dicha área es igual al área de cierto rectángulo de base **b – a** y altura **f(c).**
En otras palabras, existe una recta horizontal tal que el área encerrada por la curva por encima de dicha recta coincide con el área encerrada por la curva por debajo de la recta en **[a, b].**



4.- Calcula $\displaystyle\int_2^3 \frac{5x^3-3x+1}{x^3-x}\,dx$

$$\begin{array}{l|l} 5x^3-3x+1 & x^3-x \\ \cline{2-2} \underline{-5x^3+5x} & 5 \\ \quad 2x+1 & \end{array}$$

$$\frac{5x^2+3x+1}{x^3-x}=5+\frac{2x+1}{x^3-x}\Rightarrow\frac{2x+1}{x^3-x}=\frac{2x+1}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{2x+1}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

$$\frac{2x+1}{x^3-x}==\frac{A\left(x-1\right)\left(x+1\right)+B\,x\left(x+1\right)+C\,x\left(x-1\right)}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}\Rightarrow A\left(x-1\right)\left(x+1\right)+B\,x\left(x+1\right)+C\,x\left(x-1\right)=2x+1\Rightarrow$$

$$Si\begin{cases} x=-1\Rightarrow A\left(-1-1\right)\left(-1+1\right)+B\left(-1\right)\left(-1+1\right)+C\left(-1\right)\left(-1-1\right)=2\cdot\left(-1\right)+1\Rightarrow 2C=-1\Rightarrow C=-\dfrac{1}{2} \\ x=0\Rightarrow A\left(0-1\right)\left(0+1\right)+B\cdot 0\cdot\left(0+1\right)+C\cdot 0\cdot\left(0-1\right)=2\cdot 0+1\Rightarrow -A=1\Rightarrow A=-1 \\ x=1\Rightarrow A\left(1-1\right)\left(1+1\right)+B\cdot 1\cdot\left(1+1\right)+C\cdot 1\cdot\left(1-1\right)=2\cdot 1+1\Rightarrow 2B=3\Rightarrow B=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{2x+1}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\frac{-1}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\Rightarrow\frac{2x+1}{x^3-x}=5+\frac{2x+1}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=5-\frac{1}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$\int_2^3\frac{5x^3-3x+1}{x^3-x}=\int_2^3 5\,dx-\int_2^3\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int_2^3\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int_2^3\frac{dx}{x+1}=5\cdot\left[x\right]_2^3-\left[\ln x\right]_2^3+\frac{3}{2}\int_1^2\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int_3^4\frac{du}{u}=$$

$$\begin{cases} x-1=t\Rightarrow dx=dt\Rightarrow\begin{cases}x=3\Rightarrow t=2\\ x=2\Rightarrow t=1\end{cases} \\ x+1=u\Rightarrow dx=du\Rightarrow\begin{cases}x=3\Rightarrow u=4\\ x=2\Rightarrow u=3\end{cases}\end{cases}$$

$$\int_2^3\frac{5x^3-3x+1}{x^3-x}=5\cdot\left(3-2\right)-\left(\ln 3-\ln 2\right)+\frac{3}{2}\cdot\left[\ln t\right]_1^2-\frac{1}{2}\cdot\left[\ln u\right]_3^4=$$

$$\int_2^3\frac{5x^2+3x+1}{x^2-x}\,dx=5-\ln 3+\ln 2+\frac{3}{2}\cdot\left(\ln 2-0\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\ln 2^2-\ln 3\right)=$$

$$\int_2^3\frac{5x^2+3x+1}{x^2-x}\,dx=5-\ln 3+\ln 2+\frac{3}{2}\cdot\ln 2-\frac{2}{2}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}\cdot\ln 3=5+\left(1+\frac{3}{2}-1\right)\cdot\ln 2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln 3$$

$$\int_2^3\frac{5x^2+3x+1}{x^2-x}\,dx=5+\frac{3}{2}\cdot\ln 2-\frac{1}{2}\cdot\ln 3=5+\ln 2^{\frac{3}{2}}-\ln 3^{\frac{1}{2}}=5+\ln\frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{3}}=5+\ln\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=5+\ln\frac{2\sqrt{6}}{3}$$