OPCIÓN A

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sean B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3.

a) Estudia, según los valores del parámetro λ, el rango de $AB^t + \lambda I$.

b) Calcula la matriz X que verifica: $AB^tX - X = 2B$

a)

$$AB^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$AB^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|AB^t + \lambda I\right| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1) \cdot [\lambda(\lambda+1) - \lambda] = (\lambda+1) \cdot (\lambda^2 + \lambda - \lambda)$$

$$\left|AB^t + \lambda I\right| = \lambda^2(\lambda+1) \Rightarrow \left|AB^t + \lambda I\right| = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ \lambda+1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{-1, 0\} \Rightarrow \left|AB^t + \lambda I\right| \neq 0 \Rightarrow rang\ (AB^t + \lambda I) = 3$$

Si $\lambda = -1$

$$AB^t - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (AB^t + \lambda I) = 2$$

Si $\lambda = 0$

$$AB^t + 0 \cdot I = AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (AB^t + \lambda I) = 1$$

b)

$$(AB^t - 1)X = 2B \Rightarrow (AB^t - I)\,X = 2B \Rightarrow (AB^t - I)^{-1}(AB^t - I)\,X = (AB^t - I)^{-1}2B \Rightarrow X = (AB^t - I)^{-1}2B$$

$$AB^t - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|AB^t - I\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$(AB^t - I)^{-1} = \frac{1}{\left|AB^t - I\right|} \cdot adj\ \left[(AB^t - I)^t\right] \Rightarrow (AB^t - I)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ \left[(AB^t - I)^t\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB^t - I)^{-1} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Dados el plano $\pi: x+y-z-1=0$ y la recta $r: \begin{cases} 3x+y+z-6=0 \\ 2x+y \quad\; -2=0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y π. Calcula la distancia de r a π.

b) Calcula la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

.

a) Si el sistema de ecuaciones formado por el plano dado π y los dos planos que determinan la recta **r** es compatible determinado se cortan en un punto, si es compatible indeterminado la recta está contenida en el plano y, finalmente, si es incompatible la recta y el plano son paralelos. Solo en este el último caso la distancia será distinta de cero, y en este caso, hallaremos la distancia desde un punto cualquiera de la recta **R** (tomaremos el indicado en la ecuación) al plano π

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x+y+z=6 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\textit{No es compatible determinado} \Rightarrow \textit{No se cortan en un punto}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow$$

$$\textit{Sistema Incompatible} \Rightarrow \textit{El plano } \pi \textit{ y la recta son paralelas}$$

$$\begin{cases} 3x+y+z=6 \\ y=2-2x \end{cases} \Rightarrow 3x+2-2x+z=6 \Rightarrow z=4-x \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(0\,,2\,,4) \\ \overrightarrow{v_r}=(1\,,-2\,,-1) \end{cases}$$

$$d(r\,,\pi) = d(R\,,\pi) = \frac{|0+2-4-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ u$$

b) El plano α, queda determinado por el vector director del plano π, ya que siendo perpendicular a él, genera al plano pedido, el vector de la recta **r** y por el vector **RG**, siendo **G** el punto generador del plano buscado, estos tres vectores son coplanarios y el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación del plano que nos piden

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,1\,,-1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1\,,-2\,,-1) \\ \overrightarrow{RG} = (x\,,y\,,z)-(0\,,2\,,4) = (x\,,y-2\,,z-4) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-x-(y-2)-2\,(z-4)-(z-4)-2x+(y-2)=0 \Rightarrow -3x-3\,(z-4)=0 \Rightarrow \alpha \equiv x+z-4=0$$

3.- a) Enuncia el teorema de Bolzano. Probar que a función **f(x) = x³ + 2x - 2** corta el eje OX en algún punto del intervalo **[0 , 1]**. ¿Tiene esta ecuación más de una solución real?

b) Calcula los valores de **a** y **b** para que $\lim_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen\left(x^2\right)}=1$

a) **<u>Teorema de Bolzano</u>**

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) ≠ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c\in\left(a\ ,b\right)$ tal que **f(c) = 0**

La función **f(x) = x³ + 2x – 2** es continua en el intervalo **[0 , 1]**, y sus valores en los extremos del intervalo son:

$\begin{cases} f(0)=0^3+2\cdot 0-2=-2<0 \\ f(1)=1^3+1\cdot 2-2=3-2=1>0\end{cases}$ de distinto signo **[sign f(0) ≠ sign f(1)]**, entonces existe, al menos, un punto $c\in\left(0\ ,1\right)$ tal que **f(c) = 0** que es el punto de corte con **OX**

Veamos si es una solución única, supongamos que existe otro punto $d\in\left(0\ ,1\right)$ en donde **f(d) = 0,** según el **<u>Teorema de Rolle</u>**: "Sea **f(x**) una función continua en **[c , d]**, derivable en **(c , d)** y que verifica que **f(c) = f(d)** =0; entonces existe, al menos, un punto $p\in\left(c\ ,d\right)$ tal que **f'(p) = 0**

Derivemos la función

$$f'(x)=3x^2+2\Rightarrow f'(p)=0\Rightarrow 3x^2+2=0\Rightarrow 3x^2=-2\Rightarrow x^2=-\frac{2}{3}\Rightarrow x=\sqrt{-\frac{2}{3}}$$

que no tiene solución, por lo tanto no hay otro punto, en el intervalo **[c , d]** que pertenece al intervalo **[0 , 1]**, que corte al eje **OX**

$b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen\left(x^2\right)}=\frac{a\cdot 0^2+b\cdot 0+1-e^{2\cdot 0}}{sen\left(0^2\right)}=\frac{0+0+1-e^0}{sen\left(0\right)}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b-2e^{2x}}{2x\cos\left(x^2\right)}=\frac{2a\cdot 0+b-2e^{2\cdot 0}}{2\cdot 0\cdot\cos\left(0^2\right)}=\frac{0+b-2e^0}{0\cdot\cos\left(0\right)}=\frac{b-2\cdot 1}{0\cdot 1}=\frac{b-2}{0}\left(ser\acute{a}\ b-2=0\Rightarrow b=2\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+2-2e^{2x}}{2x\cos\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+1-e^{2x}}{x\cos\left(x^2\right)}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{a-2e^{2x}}{\cos\left(x^2\right)-x^2 sen\left(x^2\right)}=$$

$$=\frac{a-2e^{2\cdot 0}}{\cos\left(0^2\right)-0^2 sen\left(0^2\right)}=\frac{a-2e^0}{\cos\left(0\right)-0\cdot sen\left(0\right)}=\frac{a-2}{1-0\cdot 0}=\frac{a-2}{1}\Rightarrow\frac{a-2}{1}=1\Rightarrow a-2=1\Rightarrow a=3\Rightarrow$$

$$Soluci\acute{o}n\Rightarrow\left(a\ ,b\right)=\left(3\ ,2\right)$$

4. a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ y la bisectriz del primer cuadrante. (Nota: para el dibujo de la gráfica de $f(x)$, es suficiente utilizar el apartado anterior y calcular los puntos de corte con los ejes).

$a)$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 \Rightarrow$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 64 - 48 = 16 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8+4}{6} = 2 \\ x = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 > 0 \Rightarrow (x-2)\left(x - \frac{2}{3}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x - \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$-\infty$ $\qquad \frac{2}{3} \qquad$ **2** $\qquad \infty$

x > $\frac{2}{3}$	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x \in \Re / \left(x < \frac{2}{3}\right) \cup (x < 2)$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / \frac{2}{3} < x < 2$

$$f''(x) = 6x - 8 \Rightarrow Concavidad \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow 6x - 8 > 0 \Rightarrow 6x > 8 \Rightarrow x > \frac{8}{6} \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

Concavidad $\forall x \in \Re / x < \frac{4}{3}$ **Convexidad** $\forall x \in \Re / x < \frac{4}{3}$

b) La bisectriz del primer cuadrante es la función **g(x) = x**

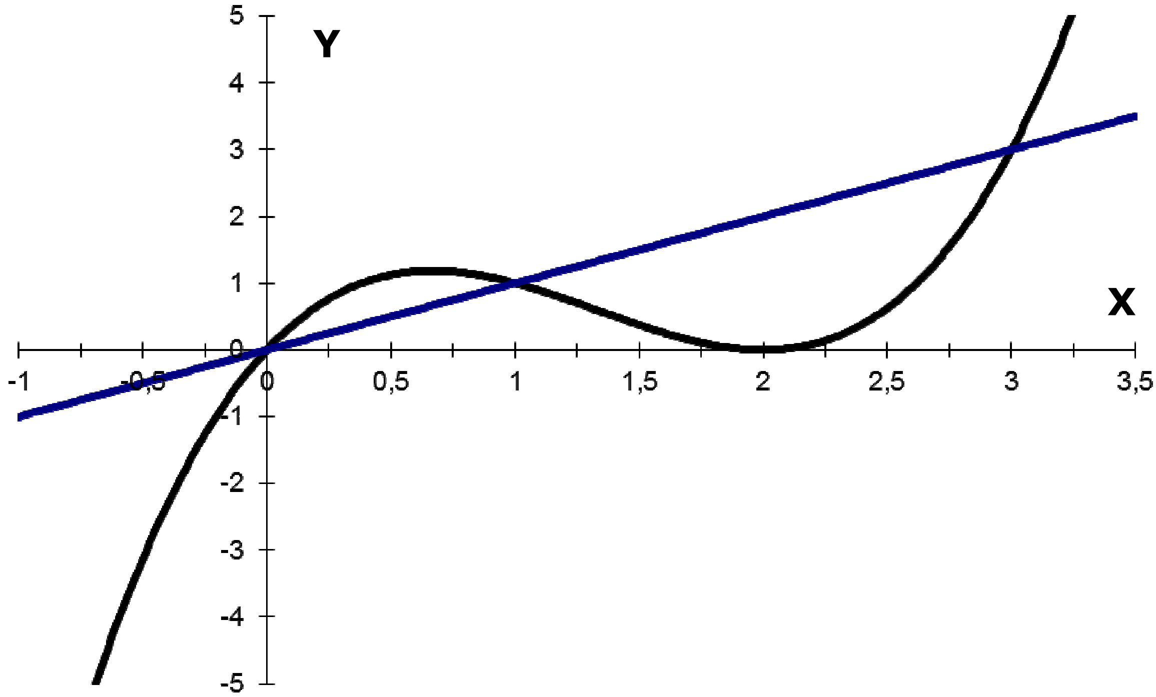
$$Corte\ con\ los\ ejes \Rightarrow \begin{cases} OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \\ x = 0 \end{cases} \\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$Corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = x \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x + 3)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Continuación del Problema 4 de la Opción A
b) Continuación



$$A=\int_0^1\left(x^3-4x^2+4x\right)dx-\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 x\,dx-\int_1^3\left(x^3-4x^2+4x\right)dx=$$

$$A=\int_0^1\left(x^3-4x^2+3x\right)dx-\int_1^3\left(x^3-4x^2+3x\right)dx$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_0^1-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1-\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_1^3+4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^3-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^3$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot\left(1^4-0^4\right)-\frac{4}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(1^3-0^3\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(3^4-1^4\right)+\frac{4}{3}\cdot\left(3^3-1^3\right)-\frac{3}{2}\cdot\left(3^2-1^2\right)$$

$$A=\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{80}{4}+\frac{26\cdot 4}{3}-\frac{3\cdot 8}{2}=\frac{3-16+18-240+416-144}{12}=\frac{437-400}{12}=\frac{37}{12}\,u^2$$

OPCIÓN B

1.- a) Discute, según los valores del parámetro **m**, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + my + z = 2 \\ mx - y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior para el caso **m = -1**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & -1-m & 0 \\ 0 & -1-2m & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m-1 & -(m+1) \\ 0 & -(2m+1) \end{vmatrix} = -(m-1)(2m+1) \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow -(m-1)(2m+1) = 0 \Rightarrow (m-1)(2m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m-1=0 \Rightarrow m=1 \\ 2m+1=0 \Rightarrow 2m=-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ incognitas \Rightarrow Sis.Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ m = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Si\ m = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Si\ m = -1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow y = -3 \Rightarrow -2 \cdot (-3) + 2z = 2 \Rightarrow 2z = -4 \Rightarrow z = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow$$

$$x - (-3) + (-2) = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1\ ,-3\ ,-2)$$

2. a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano π determinado por los puntos $A(1,0,2)$, $B(2,1,3)$ y $C(3,0,0)$.

b) Calcula los posibles valores de a para que el punto $P(a,a,a)$ equidiste de la recta r y del plano π del apartado anterior.

a) El vector director de la recta **r** buscada es el del plano π, que se halla como el producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**. Una vez determinado ese vector el punto origen de coordenadas termina de definirnos la recta pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,1,3)-(1,0,2) = (1,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (3,0,0)-(1,0,2) = (2,0,-2) \equiv (1,0,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} + \vec{j}$$

$$\overrightarrow{v_r} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (-1,2,-1) \equiv (1,-2,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 + 1\cdot\lambda \\ y = 0 - 2\cdot\lambda \\ z = 0 + 1\cdot\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) El plano π queda determinado por su vector director, hallado en el apartado a), y el vector **AG**, donde G es el punto genérico del plano, como ambos vectores son perpendiculares su producto escalar es nulo y la ecuación del plano. Después hallaremos la distancia de **P** al plano.

Para hallar la distancia del punto a la recta **r** hallaremos un plano α que lo contenga y sea perpendicular a la recta, cuyo vector director es el de la recta y la distancia entre el punto **P** y el punto **Q** intersección del plano hallado con la recta. Dichas distancias son iguales

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1,-2,1) \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z)-(1,0,2) = (x-1,y,z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow (1,-2,1)\cdot(x-1,y,z-2) = 0$$

$$x-1-2y+z-2=0 \Rightarrow \pi \equiv x-2y+z-3=0 \Rightarrow d(P,\ \pi) = \frac{|a-2a+a-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}\, u$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1,-2,1) \\ \overrightarrow{PG} = (x,y,z)-(a,a,a) = (x-a,y-a,z-a) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

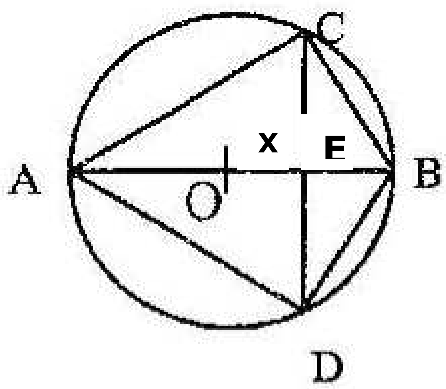
$$(1,-2,1)\cdot(x-a,y-a,z-a) = 0 \Rightarrow x-a-2y+2a+z-a=0 \Rightarrow \alpha \equiv x-2y+z=0 \Rightarrow$$

$$Punto\ Q \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda - 2(-2\lambda) + \lambda = 0 \Rightarrow 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 0 \\ y = -2\cdot 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(0,0,0) \Rightarrow$$

$$d(P,\ Q) = \sqrt{(a-0)^2+(a-0)^2+(a-0)^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$Como\ d(P,\ \pi) = d(P,\ Q) \Rightarrow a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3. En una circunferencia de centro O y radio 10 cm. se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD, para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima?



Siendo **x** la distancia entre el centro **O** y la cuerda **CD**
Sabiendo que **ACB** es un **triángulo rectángulo,** y por el **teorema de la altura** tenemos:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}\Rightarrow \overline{CE}^2=\overline{AE}\cdot\overline{EB}\Rightarrow \overline{CE}^2=(10+x)\cdot(10-x)\Rightarrow \overline{CE}^2=10-x^2\Rightarrow \overline{CE}=\sqrt{10\ldots}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Area_{ACD}=2\cdot Area_{ACE}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{CE}=(10+x)\sqrt{10-x^2} \\ Area_{BCD}=2\cdot Area_{BCE}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{BE}\cdot\overline{CE}=(10-x)\sqrt{10-x^2}\end{array}\right.\Rightarrow D=(10+x)\sqrt{10-x^2}-(\ldots$$

$$D=[10+x-(10-x)]\sqrt{10-x^2}=2x\sqrt{10-x^2}\Rightarrow D'=\frac{dD}{dx}=2\cdot\left[\sqrt{10-x^2}+\frac{1}{2\sqrt{10-x^2}}\cdot(\ldots\right.$$

$$D'=2\cdot\left(\sqrt{10-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{10-x^2}}\right)=2\left(\frac{10-x^2-x^2}{\sqrt{10-x^2}}\right)=2\,\frac{10-2x^2}{\sqrt{10-x^2}}=4\,\frac{5-x^2}{\sqrt{10-x^2}}\Rightarrow$$

$$Si\ D'=0\Rightarrow 4\,\frac{5-x^2}{\sqrt{10-x^2}}=0\Rightarrow 5-x^2=0\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5}\Rightarrow No\ solu\ldots\end{array}\right.$$

$$D''=\frac{d^2D}{dx^2}=4\,\frac{-2x\sqrt{10-x^2}-\frac{1}{2\sqrt{10-x^2}}\cdot(-2x)\cdot(5-x^2)}{10-x^2}=4\,\frac{-2x\sqrt{10-x^2}+\frac{5x-x^3}{\sqrt{10-x^2}}}{10-x^2}$$

$$D''=4\,\frac{-2x(10-x^2)+5x-x^3}{(10-x^2)\sqrt{10-x^2}}=4\,\frac{-20x+2x^3+5x-x^3}{(10-x^2)\sqrt{10-x^2}}=4\,\frac{x^3-15x}{(10-x^2)\sqrt{10-x^2}}\Rightarrow$$

$$D''\left(\sqrt{5}\right)=4\,\frac{\sqrt{5}^3-15\sqrt{5}}{\left(10-\sqrt{5}^2\right)\sqrt{10-\sqrt{5}^2}}=4\,\frac{5\sqrt{5}-15\sqrt{5}}{(10-5)\sqrt{10-5}}=\frac{-40\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}=-8<0\Rightarrow Máximo$$

$x=\sqrt{5}\ cm.$

4.- a) Enuncia el teorema de Rolle. Determinar el valor de **a** para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función **f(x) = x³ + ax – 1** en el intervalo **[0 , 1]**. Para este valor de **a**, calcula un punto $c \in (0\,,1)$ en el que la recta tangente a la gráfica de **f(x)** sea paralela al eje **OX**

b) Calcula $\int \frac{x^2+3}{x^2-x}\,dx$

a) <u>**Teorema de Rolle**</u>

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\,,b)$ tal que **f'(c) = 0**

La función estudiada es continua en **[0 , 1],** derivable en **(0 , 1)** y debe de verificar que **f(0) = f(1)**

$$\begin{cases} f(0) = 0^3 + a\cdot 0 - 1 = -1 \\ f(1) = 1^3 + a\cdot 1 - 1 = a \end{cases} \Rightarrow Como\ f(0) = f(1) \Rightarrow a = -1$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow 3c^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0\,,1) \\ c = -\frac{\sqrt{3}}{3} \notin (0\,,1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+3 & x^2-x \\ \hline \underline{-x^2+x} & 1 \\ \quad x+3 & \end{array}$$

$$\frac{x^2+3}{x^2-x} = 1 + \frac{x+3}{x^2-x} \Rightarrow \frac{x+3}{x^2-x} = \frac{x+3}{x\,(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A\,(x-1) + B\,x}{x\,(x-1)} \Rightarrow A\,(x-1) + B\,x = x+3$$

$$\begin{cases} Si\ x = 0 \Rightarrow A\,(0-1) + B\cdot 0 = 0+3 \Rightarrow -A = 3 \Rightarrow A = -3 \\ Si\ x = 1 \Rightarrow A\,(1-1) + B\cdot 1 = 1+3 \Rightarrow B = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1 + \frac{x+3}{x^2-x} = \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1 + \frac{-3}{x} + \frac{4}{x-1}$$

$$I = \int \frac{x^2+3}{x^2-x}\,dx = \int \left(1 + \frac{-3}{x} + \frac{4}{x-1}\right) dx = \int dx - 3\int\frac{dx}{x} + 4\int\frac{dx}{x-1} = x - 3\ln x + 4\int\frac{dt}{t} = x - \ln x^3 + 4\ln t$$

$$x - 1 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$I = \int \frac{dt}{t} = x - \ln x^3 + \ln\,(x-1)^4 = x + \ln\frac{(x-1)^4}{x^3} + K$$