OPCIÓN A

1.- a) Calcula, según los valores de **a**, el rango de $A=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$.

Para **a = 1**, calcula el determinante de la matriz $2A^t \cdot A^{-1}$

b) Sea $B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & x & 0 \\ y & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calcula **x** e **y** para que se cumpla que $B^{-1} = B^t$.

(Nota: A^t, B^t representan la matriz traspuesta de A y B respectivamente)

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a+1 & a & -(a+1) \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} a & -(a+1) \\ a+1 & a+1 \end{vmatrix}=a\cdot\left[a\,(a+1)+(a+1)^2\right]$$

$$|A|=a\cdot(a+1)\cdot(a+a+1)=a\cdot(a+1)\cdot(2a+1)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow a\cdot(a+1)\cdot(2a+1)=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a+1=0\Rightarrow a=-1 \\ 2a+1=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\left\{-1\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,0\right\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3$$

$Si\ a=-1$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

$Si\ a=-\frac{1}{2}$

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

$Si\ a=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

Continua el problema 1 de la Opción A
a) Continuación

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&2&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\2&2\end{vmatrix}=2+2=4\Rightarrow\begin{cases}|A^t|=|A|=4\\|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\left|2\cdot A^t\cdot A^{-1}\right|=2^3\cdot|A^t|\cdot|A^{-1}|\Rightarrow$$

$$\left|2\cdot A^t\cdot A^{-1}\right|=8\cdot 4\cdot\frac{1}{4}=8$$

$b)$

$$|B|=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}&x&0\\y&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-xy=-\left(\frac{1}{4}+xy\right)\Rightarrow Si\ |B|=0\Rightarrow-\frac{1}{4}-xy=0\Rightarrow xy=-\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$Existe\ B^{-1}\Rightarrow\forall xy\in\Re-\left\{-\frac{1}{4}\right\}B^{-1}=\frac{1}{|B|}\Rightarrow\left(adj\ B^t\right)\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&y&0\\x&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\ B^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-x&0\\-y&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-\frac{1}{4}-xy\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{-\left(\frac{1}{4}+xy\right)}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-x&0\\-y&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-\left(\frac{1}{4}+xy\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&y&0\\x&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{4}+xy\right)}&\dfrac{x}{\frac{1}{4}+xy}&0\\\dfrac{y}{\frac{1}{4}+xy}&\dfrac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{4}+xy\right)}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&y&0\\x&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{4}+xy\right)}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{4}+xy=1\\\dfrac{x}{\frac{1}{4}+xy}=y\Rightarrow\dfrac{y}{4}+xy^2=x\Rightarrow\dfrac{y}{4}=x-xy^2\\\dfrac{y}{\frac{1}{4}+xy}=x\Rightarrow\dfrac{x}{4}+x^2y=y\Rightarrow\dfrac{x}{4}=y-x^2y\end{cases}$$

Continuación del Problema 1 de la Opción A

$$\begin{cases} xy = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow xy = \frac{3}{4} \\ \frac{y}{4} = x\left(1-y^2\right) \Rightarrow x = \frac{y}{4\left(1-y^2\right)} \Rightarrow x\frac{x}{4\left(1-x^2\right)} = \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 = 3\cdot\left(1-x^2\right) \Rightarrow x^2 = 3 - 3x^2 \Rightarrow 4x^2 = 3 \\ \frac{x}{4} = y - x^2 y \Rightarrow y = \frac{x}{4\left(1-x^2\right)} \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{6}{4\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2.- Dado el plano $\pi : x - 2y + 3z + 6 = 0$

a) Calcula el área del triángulo de vértices de los puntos de corte de π con los ejes de coordenados.

b) Calcula la ecuación general del plano que es perpendicular al plano π, paralelo a la recta que pasa por los puntos **B(0 , 3 , 0)** y **C(0 , 0 , -2)** y pasa por el origen de coordenadas.

c) Calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano $\pi : x - 2y + 3z + 6 = 0$

a) Sean **X**, **Y**, **Z** los puntos de corte del plano con los ejes **OX**, **OY** y OZ respectivamente, el área del triángulo que forman es igual a la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **XY** y **XZ** (Nota: Estos vectores, al calcular valores numéricos, no pueden ser sustituidos por sus canónicos)

$$\overline{OX} \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \Rightarrow \lambda - 2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 6 = 0 \Rightarrow \lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -6 \Rightarrow X \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \Rightarrow X(-6\ ,0\ ,0) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\overline{OY} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \Rightarrow 0 - 2\mu + 3\cdot 0 + 6 = 0 \Rightarrow -2\mu + 6 = 0 \Rightarrow -2\mu = -6 \Rightarrow \mu = 3 \Rightarrow Y \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \Rightarrow Y(0\ ,3\ ,0) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\overline{OZ} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow 0 - 2\cdot 0 + 3\alpha + 6 = 0 \Rightarrow 3\alpha + 6 = 0 \Rightarrow 3\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow Z \\ z = \alpha \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow Z(0\ ,0\ ,-2) \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{XY} = (0\ ,3\ ,0) - (-6\ ,0\ ,0) = (6\ ,3\ ,0) \\ \overrightarrow{XZ} = (0\ ,0\ ,-2) - (-6\ ,0\ ,0) = (6\ ,0\ ,-2) \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{XY} \wedge \overrightarrow{XZ}\right|$$

Continuación del Problema 2 de la Opción A

$a)$*Continuación*

$$\overrightarrow{XY}\wedge\overrightarrow{XZ}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 3 & 0\\ 6 & 0 & -2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-18\vec{k}+12\vec{j}\Rightarrow\left|\overrightarrow{XY}\wedge\overrightarrow{XZ}\right|=\sqrt{(-6)^2+12^2+(-18)^2}=\sqrt{36+144+324}\Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{XY}\wedge\overrightarrow{XZ}\right|=\sqrt{504}=2\sqrt{126}=6\sqrt{14}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{XY}\wedge\overrightarrow{XZ}\right|=\frac{6\sqrt{14}}{2}=3\sqrt{14}\ u^2$$

b) El plano β queda determinado por el vector del plano π , ya que es perpendicular a este plano, el vector **BC**, ya que es paralelo a la recta que determina, y el vector **OG**, siendo **O** el origen de coordenadas y **G** el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **OG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(1\,,-2\,,3)\\ \overrightarrow{BC}=(0\,,3\,,0)-(0\,,0\,,-2)=(0\,,3\,,2)\\ \overrightarrow{OG}=(x\,,y\,,z)-(0\,,0\,,0)=(x\,,y\,,z)\end{cases}\Rightarrow\beta\equiv\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow-4x+3z-9x-2y=0\Rightarrow$$

$$-13x-2y+3z=0\Rightarrow\beta\equiv13x+2y-3z=0$$

c) El punto **O** pertenece a una recta **r** perpendicular al plano π cuyo vector director es el del plano. Hallaremos el punto de intersección P entre la recta hallada y el plano π , punto medio entre **O** y su simétrico **O'**

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(1\,,-2\,,3)\\ O(0\,,0\,,0)\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=-2\lambda\\ z=3\lambda\end{cases}\Rightarrow Punto\ de\ intersección\ P\Rightarrow\lambda-2\cdot(-2\lambda)+3\cdot3\lambda+6=0\Rightarrow14\lambda+6=0\Rightarrow$$

$$14\lambda=-6\Rightarrow\lambda=-\frac{6}{14}=-\frac{3}{7}\Rightarrow P\begin{cases}x=-\frac{3}{7}\\ y=-2\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)\\ z=3\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)\end{cases}\Rightarrow P\left(-\frac{3}{7},\frac{6}{7},-\frac{9}{7}\right)\Rightarrow\begin{cases}-\frac{3}{7}=\frac{0+x_{O'}}{2}\Rightarrow7x_{O'}=-6\Rightarrow x_{O'}=-\frac{6}{7}\\ \frac{6}{7}=\frac{0+y_{O'}}{2}\Rightarrow7x_{O'}=12\Rightarrow x_{O'}=\frac{12}{7}\\ -\frac{9}{7}=\frac{0+z_{O'}}{2}\Rightarrow7x_{O'}=-18\Rightarrow x_{O'}=-\frac{18}{7}\end{cases}$$

$$O'\left(-\frac{6}{7},\frac{12}{7},-\frac{18}{7}\right)$$

3.- a) Calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

b) Calcula $\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\,dx$

$a)$

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow \textit{Sin solución en el campo de los números reales} \Rightarrow$

$Dom(f)=\forall x\in\Re$

No hay asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-2\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{1-0+0}{1+0}=1$$

Existe asíntota horizontal, $y=1$, *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{2x}=\frac{-\infty}{-\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2}=1$$

Existe asíntota horizontal, $y=1$, *cuando* $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^3+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-2\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{0-0+0}{1+0}=0\Rightarrow \textit{No existe asíntota oblicua cuando } x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^3+x}=\frac{\infty}{-\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-2\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{-\infty}-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{-\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{0-0+0}{1+0}=0\Rightarrow \textit{No existe asíntota oblicua cuando } x\to-\infty$$

Continuación del Problema 3 de la Opción A

a)

$$f'(x)=\frac{2\,(x-1)\left(x^2+1\right)-2x\,(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\,(x-1)\left[x^2+1-x\,(x-1)\right]}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\,(x-1)\left(x^2+1-x^2+x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\,(x-1)\,(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{2\,(x-1)\,(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x-1>0\Rightarrow x>1\\ x+1>0\Rightarrow x>-1\\ \left(x^2+1\right)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

2 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**
$(x^2+1)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x\in\Re/(x<-1)\cup(x>1)$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/-1<x<1$

$b)$

$$\begin{array}{l|l} x^2-2x+1 & x^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2-1} & 1 \\ \quad -2x & \end{array}$$

$$\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=1-\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\int_1^e\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\,dx=\int_1^e\left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\int_1^e dx-\int_1^e\frac{2x}{x^2+1}\,dx=[x]_1^e-\int_2^{e^2+1}\frac{dt}{t}=(e-1)-[\ln t]_2^{e^2+1}$$

$$x^2+1=t\Rightarrow 2x\,dx=dt\Rightarrow\begin{cases}x=e\Rightarrow t=e^2+1\\ x=1\Rightarrow t=1^2+1=2\end{cases}$$

$$\int_1^e\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\,dx=e-1-\left[\ln\left(e^2+1\right)-\ln 2\right]=e-1-\ln\left(e^2+1\right)+\ln 2=e-1+\ln\frac{2}{e^2+1}$$

4.- a) De una función derivable **f(x)** sabemos que pasa por el punto (0 , 1) y que a su derivada es **f'(x) = xe^{2x}** . Calcula **f(x)** y la recta tangente a la gráfica de **f(x)** en el punto correspondiente a **x = 0**
b) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral.

$a)$

$$f(x)=\int xe^{2x}dx = x\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\int\frac{e^{2x}}{2}dx=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{t}\,\frac{dt}{2}=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2}=\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{2x}}{2}\cdot\frac{2x-1}{2}+K$$

$$Por\ \ partes \Rightarrow \begin{cases} x=u\Rightarrow dx=du \\ e^{2x}dx=dv\Rightarrow v=\int e^{2x}dx=\int e^{t}\,\dfrac{dt}{2}=\dfrac{e^{t}}{2}=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$2x=t\Rightarrow 2\,dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$$

$$f(x)=\frac{e^{2x}(2x-1)}{4}+K$$

$$f(0)=1\Rightarrow \frac{e^{2\cdot 0}(2\cdot 0-1)}{4}+K=1\Rightarrow\frac{-e^{0}}{4}+K=1\Rightarrow-\frac{1}{4}+K=1\Rightarrow K=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{e^{2x}(2x-1)}{4}+\frac{5}{4}=\frac{e^{2x}(2x-1)+5}{4}$$

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ m=f'(0)=0\cdot e^{2\cdot 0}=0\cdot e^{0}=0.1=0 \end{cases}\Rightarrow y-1=0\cdot(x-0)\Rightarrow y-1=0\Rightarrow y=1$$

b) Si **f(x)** es continua en **[a , b]**, la función $F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$, con $t\in[a\,,b]$, recibe el nombre de función integral de **f(x)** en **[a , b]**, de ello se determina el

Teorema fundamental del cálculo integral

Si f(x) es continua en **[a , b]**, entonces la función integral es derivable y cumple que:

$$F'(t)=f(x)\,,\ \forall t\in[a\,,b]$$

OPCIÓN B

1.- a) Discute, según los valores de **m**, el sistema:

$$\begin{cases} x+y=m \\ x-my=-13 \\ 3x+5y=16 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para **m = 2**

a) En este caso para que sea compatible el determinante de la matriz de los coeficientes tiene que ser nulo después veremos si Determinado o Indeterminado, si no es, el determinante, nulo el sistema es Incompatible

$a)$

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -m & -13 \\ 3 & 5 & 16 \end{vmatrix} = -16m - 39 + 5m + 3m^2 + 65 - 16 = 3m^2 - 11m + 10 \Rightarrow Si\ |A/B| = 0 \Rightarrow$$

$$3m^2 - 11m + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = (-11)^2 - 4\cdot 3\cdot 10 = 121 - 120 = 1 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{1}}{2\cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11+1}{6} = 2 \\ x = \dfrac{11-1}{6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \left\{\frac{5}{3}, 2\right\} \Rightarrow |A/B| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A/B) = 3 > Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Si\ m = \frac{5}{3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{5}{3} & -13 \\ 3 & 5 & 16 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & -39 \\ 3 & 5 & 16 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 5 \\ 0 & -8 & -44 \\ 0 & 2 & 11 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow rang(A) = 2 = Número\ de\ incognitas$$

$$Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ m = 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -13 \\ 3 & 5 & 16 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -15 \\ 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(A) = 2 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$b)$

$$Si\ m = 2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x + 5 = 2 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y) = (-3\ ,\ 5)$$

2.- a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$

Si se cortan en una recta, escribe sus ecuaciones paramétricas.
b) Calcula la ecuación del plano π_3 , que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a π_1 y π_2 .
Calcula la intersección de π_1 , π_2 y π_3 .

a) Dos planos pueden ser paralelos o coincidentes siempre que sus respectivos vectores directores sean iguales o proporcionales, de ser así tendremos que ver si un punto cualquiera de uno de ellos es solución del otro ya que serán coincidentes sino son paralelos.
Si no hay proporcionalidad ni igualdad en la comparación de sus vectores directores los planos se cortan según una recta.
Para hallar el vector director del plano π_2 calcularemos el producto vectorial de los vectores que se nos dan en la ecuación paramétrica que lo determina

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = (1 , -1 , 0) \\ \overrightarrow{v_2} = (2 , -1 , 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{k} + 2\vec{k} - j = -i - j + k \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1 , 1 , 1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (-1 , -1 , 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow No\ son\ planos\ paralelos,\ ni\ coincidentes$$

Son dos planos que se cortan según una recta

Para determinar la ecuación general del plano π_2 y conocido su vector director**,** este es perpendicular al vector **PG**, en donde **P** es un punto cualquiera del plano (tomaremos el indicado en su ecuación paramétrica) y **G** el punto genérico del plano, y su producto escalar es nulo y la ecuación del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (-1 , -1 , 1) \equiv (1 , 1 , -1) \\ \overrightarrow{PG} = (x , y , z) - (3 , 1 , 1) = (x - 3 , y - 1 , z - 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1 , 1 , -1) \cdot (x - 3 , y - 1 , z - 1) = 0 \Rightarrow x - 3 + y - 1 - z + 1 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x + y - z - 3 = 0$$

$$r : \begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 2y + 2 = 0 \Rightarrow x + y + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 - y \Rightarrow -1 - y + y + z + 5 = 0 \Rightarrow z = -4$$

$$r : \begin{cases} x = -1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = -4 \end{cases}$$

Continuación del Problema 2 de la Opción B

c) El vector director de π_3 es el producto vectorial de los vectores directores de π_1 y π_2 y es perpendicular al vector **OG**, siendo **O** el origen de coordenadas y G el punto genérico del plano, por lo tanto su producto escalar es nulo y la ecuación de π_3.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_3}} = \overrightarrow{v_{\pi_1}} \wedge \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} - \vec{k} - \vec{i} + \vec{j} = -2\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_3}} = (-2,2,0) \equiv (1,-1,0) \\ \overrightarrow{OG} = (x,y,z) - (0,0,0) = (x,y,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_3}} \perp \overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_3}} \cdot \overrightarrow{OG} = 0 \Rightarrow (1,-1,0)\cdot(x,y,z) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_3 : x - y = 0$$

$$\begin{cases} x+y+z=-5 \\ x+y-z=3 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = \textit{Número de incognitas}$$

$$\textit{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \textit{Se cortan en un punto} \Rightarrow$$

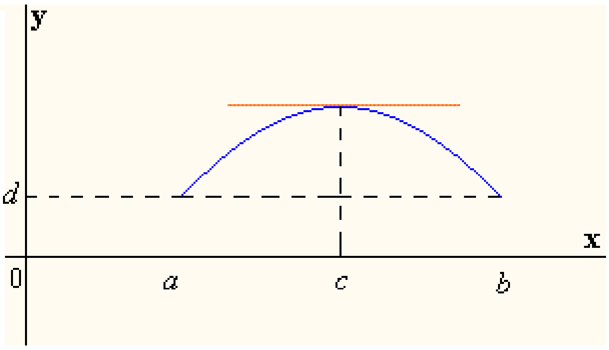
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow -2z = 8 \Rightarrow z = -4 \Rightarrow -2y + 4 = 5 \Rightarrow -2y = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$x - \frac{1}{2} - 4 = -5 \Rightarrow x = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \textit{Se cortan en el punto } (x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -4\right)$$

3.- a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.

b) Si **c > 2**, calcula los valores de **a**, **b**, **c** para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si \quad x < 2 \\ x + 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo
[0 , c] .

a)
<u>Teorema de Rolle</u>
Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que **f'(c) = 0**



Continuación del Problema 3 de la Opción B

b)
La función tiene que ser continua en el intervalo **[0 , c]** y derivable en el intervalo **(0 , c)** para cumplir las condiciones del teorema de Rolle. Estudiémoslas en **x = 2** que es el único punto en donde puede haber no cumplimiento de lo necesitado

Para que sea continua en **x = 2**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2^2 + a\cdot 2 + b = 2a + b + 4 \\ f(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) \Rightarrow 2a + b + 4 = 3 \Rightarrow 2a + b = -1$$

Para que sea derivable en **x = 2**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & si \quad x < 2 \\ 1 & si \quad x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = 2\cdot 2 + a = 4 + a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) \Rightarrow 4 + a = 1 \Rightarrow$$

$$a = -3 \Rightarrow 2\cdot(-3) + b = -1 \Rightarrow -6 + b = -1 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & si \quad x < 2 \\ x + 1 & si \quad x \ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0^2 - 3\cdot 0 + 5 = 5 \\ f(c) = c + 1 \end{cases} \Rightarrow f(0) = f(c) \Rightarrow c + 1 = 5 \Rightarrow c = 4$$

4.- Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola **f(x) = - x² + 2x + 3** la recta tangente en el punto donde la parábola tiene un extremo y la tangente a la parábola en el punto en que la tangente es paralela a la recta **y = 4x** (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad o convexidad).

$a)$

$$\text{Recta tangente por el extremo } (\text{máximo o mínimo absoluto})$$

$$f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = -1^2 + 2\cdot 1 + 3 = 4 \Rightarrow y = 4$$

$$\text{Recta tangente paralela a } y = 4x$$

$$f'(x) = 4 \Rightarrow -2x + 2 = 4 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = -(-1)^2 + 2\cdot(-1) + 3 = 0 \Rightarrow y = 4\,[x - (-1)] \Rightarrow$$
$$y = 4x + 4$$

$$\text{Puntos de corte de la parabola con} \Rightarrow \begin{cases} OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -0^2 + 2\cdot 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

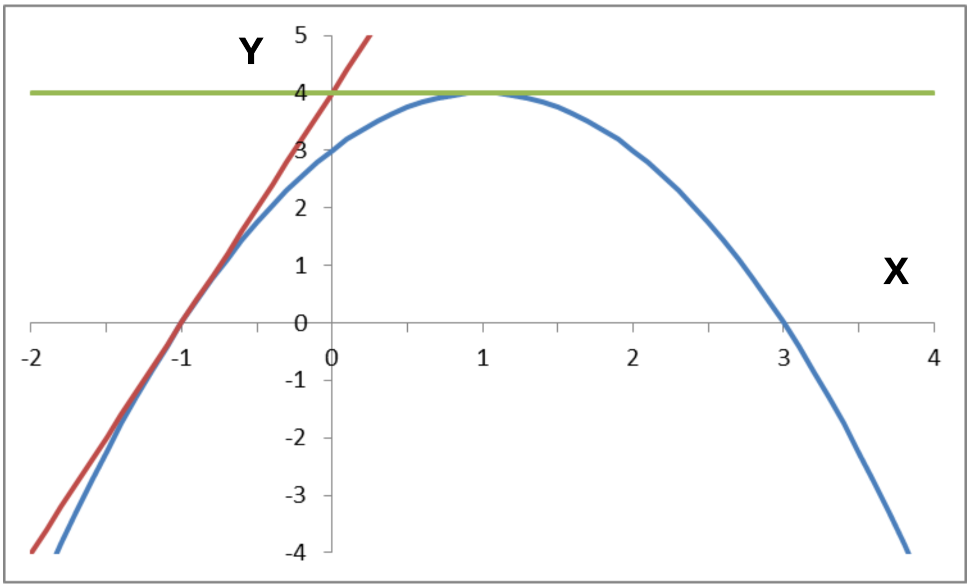
$$f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$\text{Máximo absoluto y vértice en } x = 1 \Rightarrow f(1) = -1^2 + 2\cdot 1 + 3 = 4$$

$$\text{Concavidad} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow -2 < 0 \Rightarrow \text{Convexa en} \forall x \in \Re$$

Continuación del Problema 4 de la Opción B

b) Continuación



$$Punto\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow \begin{cases} -x^2+2x+3=4 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2 \Rightarrow x=1 \\ -x^2+2x+3=4x+4 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2 \Rightarrow x=-1 \\ 4x+4=4 \Rightarrow 4x=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$A=\int_{-1}^{0}(4x+4)\,dx-\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx+\int_{0}^{1}4\,dx-\int_{0}^{1}\left(-x^2+2x+3\right)dx=$$

$$A=\int_{-1}^{0}(4x+4)\,dx+\int_{0}^{1}4\,dx-\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2x+3\right)dx=$$

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{0}+4\cdot[x]_{-1}^{0}+4\cdot[x]_{0}^{1}+\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{1}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{1}-3\cdot[x]_{-1}^{1}$$

$$A=2\cdot\left[0^2-(-1)^2\right]+4\cdot[0-(-1)]+4(1-0)+\frac{1}{3}\cdot\left[1^3-(-1)^3\right]-\left[1^2-(-1)^2\right]-3\cdot[1-(-1)]$$

$$A=2\cdot(-1)+4\cdot1+4\cdot1+\frac{1}{3}\cdot(1+1)-(1-1)-3\cdot(1+1)=-2+4+4+\frac{2}{3}-0-6=\frac{2}{3}\,u^2$$