(1) Escribe los siguientes números como números complejos en su forma binómica:

a) $\sqrt{-3} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{3} = i\sqrt{3} \Rightarrow z = 0 + i\sqrt{3}$

b) $3 \Rightarrow z = 3 + 0i$

c) $2 + \sqrt{-8} = 2 + \sqrt{-1}\cdot\sqrt{8} = 2 + i\sqrt{8} \Rightarrow z = 2 + 2i\sqrt{2}$

(2) Calcula los valores de a y b:

a) $2 + 3bi = a - 1$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Parte real} \rightarrow 2 = a - 1\\ \text{Parte imaginaria} \rightarrow 3b = 0\end{array}\right\} a = 3\ ;\ b = 0$$

b) $4a - 2b = 2 - ai$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Parte real} \rightarrow 4a - 2b = 2\\ \text{Parte imaginaria} \rightarrow 0 = -a\end{array}\right\} a = 0\ ;\ b = -1$$

(3) Calcular x e y para que el número complejo dado por $z = -2x + \frac{1}{2}yi$ sea:

a) Un número real:

$Im(z) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

b) Un número imaginario puro:

$$Re(z)=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0 \quad \forall y \in \mathbb{R}-\{0\}$$

c) Un número complejo que no sea real ni imaginario puro:

$$Re(z)\neq 0 \Rightarrow -2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$Im(z)\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$$

(4) Calcula el opuesto y el conjugado de los siguientes números complejos:

a) $z = \sqrt{2} - 3i$

Conjugado $\Rightarrow \bar{z} = \sqrt{2} + 3i$

Opuesto $\Rightarrow -z = -(\sqrt{2}-3i) = -\sqrt{2}+3i$

b) $z = 3-2i$

$\bar{z} = 3+2i$; $-z = -3+2i$

c) $z = 6i$

$\bar{z} = -6i$; $-z = -6i$

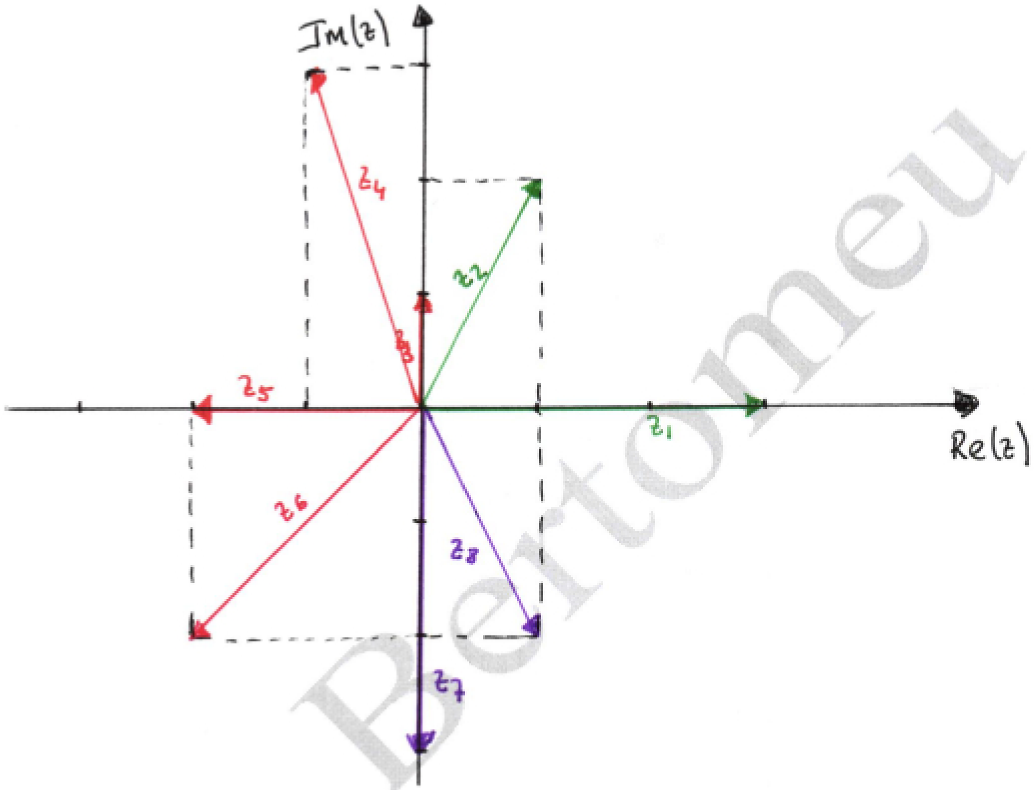
d) $z = 7$

$\bar{z} = 7$; $-z = -7$

⑤ Representa los siguientes números complejos:

$z_1 = 3$; $z_2 = 1 + 2i$; $z_3 = i$; $z_4 = -1 + 3i$; $z_5 = -2$

$z_6 = -2 - 2i$; $z_7 = -3i$; $z_8 = 1 - 2i$



⑥ Efectua las siguientes operaciones:

a) $(-1-i) + (-4+5i) = -5 + 4i$

b) $\dfrac{-1-i}{-4+5i} = \dfrac{(-1-i)\cdot(-4-5i)}{(-4+5i)\cdot(-4-5i)} = \dfrac{4+5i+4i+5i^2}{(-4)^2-(5i)^2} = \dfrac{4+9i-5}{16-25i^2} =$

$= \dfrac{-1+9i}{16+25} = \dfrac{-1+9i}{41}$

c) $(-1-i)\cdot(-4+5i) = 4 - 5i + 4i - 5i^2 = 9 - i$

d) $\frac{(-2+i)(1+3i)}{-1+2i}-2i=\frac{-2-6i+i+3i^2}{-1+2i}-2i=\frac{-5-5i}{-1+2i}-2i=$

$=\frac{-5-5i-2i(-1+2i)}{-1+2i}=\frac{-5-5i+2i-4i^2}{-1+2i}=\frac{-1-3i}{-1+2i}=$

$=\frac{(-1-3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\frac{1+2i+3i+6i^2}{(-1)^2-(2i)^2}=\frac{-5+5i}{1-4i^2}=\frac{-5+5i}{5}=-1+i$

⑦ Determina el inverso de los siguientes números complejos:

a) $z=i$; b) $z=3+4i$; c) $z=-1-i$; d) $4-3i=z$

a) $z=i$

$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}=\frac{-i}{-i^2}=-i$

b) $z=3+4i$

$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{3-4i}{(3)^2-(4i)^2}=\frac{3-4i}{9-16i^2}=\frac{3-4i}{25}$

c) $z=-1-i$

$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{-1-i}\cdot\frac{-1+i}{-1+i}=\frac{-1+i}{(-1)^2-(i)^2}=\frac{-1+i}{1-i^2}=\frac{-1+i}{2}$

d) $z=4-3i$

$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i}=\frac{4+3i}{4^2-(3i)^2}=\frac{4+3i}{16-9i^2}=\frac{4+3i}{25}$

(8) Expresar en forma polar:

a) $z = 2+i$; b) $z = 2-\sqrt{3}i$; c) $z = -3+3i$; d) $z = -2-i$; e) $z=12$

a) $z = 2+i$

$r = |z| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = 26'565°$

$\Longrightarrow z = \sqrt{5}_{26'565°}$

b) $z = 2-\sqrt{3}i$

$r = |z| = \sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$

$\alpha = \text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -40'8934°$

$\Longrightarrow z = \sqrt{7}_{319'1066°}$

c) $z = -3+3i$

$r = |z| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{3}{-3}\right) = 135°$

$\Longrightarrow z = 3\sqrt{2}_{135°}$

Ojo con el cuadrante!!

d) $z = -2-i$

$r = |z| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{-1}{-2}\right) = 206'565°$

$\Longrightarrow z = \sqrt{5}_{206'565°}$

e) $z = 12$

$r = |z| = \sqrt{12^2} = 12$

$\alpha = \text{arctg}(0) = 0$

$\Longrightarrow z = 12_{0°}$

(9) Expresar en forma binómica y trigonométrica

a) $z = 1_{120°}$; b) $z = 3_{240°}$; c) $z = 2_{\pi/3}$

a) $z = 1_{120°} = 1 \cdot \left(\cos(120) + i \cdot \text{sen}(120)\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $z = 3_{240°} = 3 \cdot \left(\cos(240) + i\,\text{sen}(240)\right) = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $z = 2_{\pi/3} = 2 \cdot \left(\underbrace{\cos(\pi/3) + i\,\text{sen}(\pi/3)}_{\text{La calculadora en radianes!!}}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

(10) Expresar en forma polar y trigonométrica:

a) $z = 3-4i$; b) $z = 2+2i$; c) $z = -\sqrt{3}+i$

a) $z = 3-4i$

$r = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{-4}{3}\right) = -53'13°$

$\Rightarrow z = 5_{306'87°} = 5\left(\cos(306'87) + i\,\text{sen}(306'87)\right)$

b) $z = 2+2i$

$r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{2}{2}\right) = 45°$

$\Rightarrow z = 2\sqrt{2}_{45°} = 2\sqrt{2}\left(\cos 45 + i\,\text{sen}\,45\right)$

c) $z = -\sqrt{3}+i$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$

$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = 150°$

$\Rightarrow z = 2_{150°} = 2\left(\cos 150 + i\,\text{sen}\,150\right)$

(11) Efectua las siguientes operaciones en forma polar:

a) $4_{120°} \cdot 3_{60°}$; b) $2_{230°} \cdot 3_{130°}$; c) $\frac{3_{100°}}{3_{40°}}$; d) $(2_{150°})^2$

a) $4_{120} \cdot 3_{60} = (4 \cdot 3)_{120+60} = 12_{180°}$

b) $2_{230} \cdot 3_{130} = (2 \cdot 3)_{230+130} = 6_{360°} = 6_{0°}$

c) $\frac{3_{100}}{3_{40°}} = \left(\frac{3}{3}\right)_{100°-40°} = 1_{60°}$

d) $(2_{150°})^2 = (2^2)_{2 \cdot 150°} = 4_{300°}$

(12) Se dan los números complejos $z_1 = 1_{210°}$ y $z_2 = 3\left(\cos(-30) + i \operatorname{sen}(-30)\right)$ y se pide calcular:

a) $z_1 + z_2$

$z_1 = 1_{210°} = 1 \cdot \left(\cos(210) + i \operatorname{sen}(210)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}$

$z_2 = 3_{-30°} = 3_{330°} = 3 \cdot \left(\cos(330) + i \operatorname{sen}(330)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$

$z_1 + z_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = \sqrt{3} - 2i$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1_{210}}{3_{330}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{210-330} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-120} = \left(\frac{1}{3}\right)_{240°}$

c) $\dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2}$

$$z_2 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overline{z_2} = 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{z_2} = \begin{cases} r = 3 \\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \overline{z_2} = 3_{30^\circ}$$

$$\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2} = \frac{1_{210^\circ}\cdot 3_{30^\circ}}{3_{330^\circ}} = \frac{3_{240}}{3_{330}} = 1_{-90^\circ} = 1_{270^\circ} = -i$$

d) $z_1^3 \cdot \overline{z_2}$

$$z_1^3 \cdot \overline{z_2} = \left(1_{210}\right)^3 \cdot 3_{30^\circ} = 1_{630^\circ}\cdot 3_{30^\circ} = 1_{270^\circ}\cdot 3_{30^\circ} = 3_{300^\circ}$$

13) Efectua las operaciones:

a) $(3-3i)^5$

$$z = 3-3i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{-3}{3}\right) = -45^\circ \end{cases} \Rightarrow z = 3\sqrt{2}_{315^\circ}$$

$$\Rightarrow (3-3i)^5 = \left(3\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^5 = \left(3\sqrt{2}\right)^5_{5\cdot 315^\circ} = 972\sqrt{2}_{1575^\circ} = 972\sqrt{2}_{135^\circ}$$

b) $(\sqrt{5}+2i)^8$

$$z = \sqrt{5}+2i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2} = 3 \\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 41'81^\circ \end{cases} \Rightarrow z = 3_{41'81^\circ}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{5}+2i)^8 = \left(3_{41'81^\circ}\right)^8 = \left(3^8\right)_{8\cdot 41'81} = 6561_{334'48^\circ}$$

(14) Utilizando la fórmula de De Moivre, expresar $\cos(3\alpha)$ y $\operatorname{sen}(3\alpha)$ en función de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$.

Consideremos un número complejo z de módulo la unidad

$$z = 1_\alpha = 1(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

Vamos a elevar a 3:

$$z^3 = (1_\alpha)^3 = 1_{3\alpha} = \underbrace{\cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha) = (\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))^3}$$

$$\Rightarrow \cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha) = (\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))^3 \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ \boxed{1} & & 3 & & 3 & & 1 \end{array} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\Rightarrow \cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha) = \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha \cdot i \cdot \operatorname{sen}\alpha + 3\cos\alpha \cdot (i\operatorname{sen}\alpha)^2 + (i\operatorname{sen}\alpha)^3$$

$$\Rightarrow \cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha) = \cos^3\alpha + i \cdot 3\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha + i^2 \cdot 3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + i^3\operatorname{sen}^3\alpha$$

$$\Rightarrow \cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + i(3\cos^2\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha)$$

Igualando parte real con parte real e imaginaria con imaginaria:

$$\begin{cases} \text{Real} \Rightarrow \cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha \\ \text{Imaginaria} \Rightarrow \operatorname{sen}(3\alpha) = 3\cos^2\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha \end{cases}$$

(15) Calcula las raices de:

a) $\sqrt{3_{150^\circ}} = \sqrt{3}_{\frac{150+k\cdot 360}{2}}$ con $k=0,1$

Si $k=0 \Rightarrow \alpha = \frac{150}{2} = 75^\circ \Rightarrow \sqrt{3}_{75^\circ}$

Si $k=1 \Rightarrow \alpha = \frac{150+360}{2} = 255^\circ \Rightarrow \sqrt{3}_{255}$

b) $\sqrt[4]{-i} = \sqrt[4]{1_{270^\circ}} = 1_{\frac{270+k\cdot 360}{4}}$ con $k=0,1,2,3$

Si $k=0 \Rightarrow \alpha = \frac{270}{4} = 67'5^\circ \Rightarrow 1_{67'5^\circ}$

Si $k=1 \Rightarrow \alpha = \frac{270+360}{4} = 157'5^\circ \Rightarrow 1_{157'5^\circ}$

Si $k=2 \Rightarrow \alpha = \frac{270+2\cdot 360}{4} = 247'5^\circ \Rightarrow 1_{247'5^\circ}$

Si $k=3 \Rightarrow \alpha = \frac{270+3\cdot 360}{4} = 337'5^\circ \Rightarrow 1_{337'5^\circ}$

c) $\sqrt[4]{-8+i 8\sqrt{3}} \Rightarrow z = -8+i\cdot 8\sqrt{3} = \begin{cases} r = \sqrt{8^2+(8\sqrt{3})^2} = 16 \\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right) = 120^\circ \end{cases} \Rightarrow z = 16_{120^\circ}$

Ojo con el cuadrante!!

$\Rightarrow \sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16_{120^\circ}} = 2_{\frac{120+k\cdot 360}{4}} = 2_{30^\circ+90k}$ con $k=0,1,2,3$

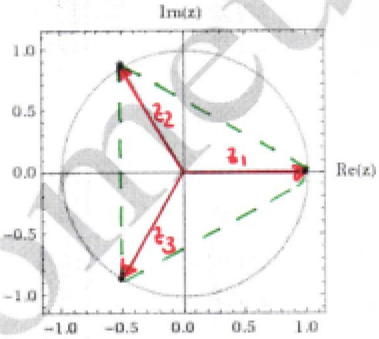
$\Rightarrow$ Las raices son $\Rightarrow \begin{cases} k=0 \to 2_{30^\circ} \\ k=1 \to 2_{120^\circ} \\ k=2 \to 2_{210^\circ} \\ k=3 \to 2_{300^\circ} \end{cases}$

16) Resuelve las ecuaciones, y representa gráficamente las soluciones:

a) $z^3 - 1 = 0$

$$z^3 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1_{0^\circ}} = 1_{\frac{0+k\cdot 360}{3}} = 1_{0+120^\circ\cdot k} \quad \text{con } k = 0, 1, 2$$

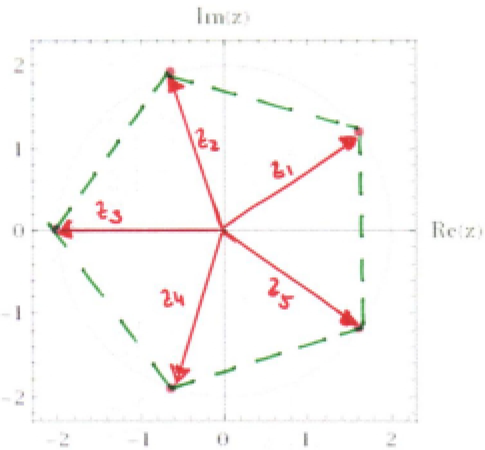
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } k=0 \rightarrow 1_{0^\circ} = 1 \\ \text{Si } k=1 \rightarrow 1_{120^\circ} = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{Si } k=2 \rightarrow 1_{240^\circ} = -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



b) $z^5 + 32 = 0$

$$z^5 = -32 \Rightarrow z = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180^\circ}} = 2_{\frac{180+k\cdot 360}{5}} = 2_{36+72k} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } k=0 \rightarrow 2_{36^\circ} = 1'618 + 1'176\,i \\ \text{Si } k=1 \rightarrow 2_{108^\circ} = -0'618 + 1'902\,i \\ \text{Si } k=2 \rightarrow 2_{180^\circ} = -2 \\ \text{Si } k=3 \rightarrow 2_{252^\circ} = -0'618 - 1'902\,i \\ \text{Si } k=4 \rightarrow 2_{324} = 1'618 - 1'176\,i \end{cases}$$



(17) Comprueba que si z y w son dos raíces sextas de 1, entonces también son raíces sextas de 1 los números $z \cdot w$, $\frac{z}{w}$, z^2, z^3.

Si z es raíz sexta de 1 $\Rightarrow z^6 = 1$

Si w es raíz sexta de 1 $\Rightarrow w^6 = 1$

$(z \cdot w)^6 = z^6 \cdot w^6 = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow (z \cdot w)$ es raíz sexta de 1

$\left(\frac{z}{w}\right)^6 = \frac{z^6}{w^6} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \left(\frac{z}{w}\right)$ es raíz sexta de 1

$(z^2)^6 = (z^6)^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow (z^2)$ es raíz sexta de 1

$(z^3)^6 = (z^6)^3 = 1^3 = 1 \Rightarrow (z^3)$ es raíz sexta de 1

(18) El número complejo $4+3i$ es una raíz cuarta de cierto número complejo z. Averigua las otras tres raíces cuartas de z

$$4+3i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right) = 36'87^\circ \end{cases} \Rightarrow 5_{36'87^\circ}$$

Y por tanto, las raíces que buscamos son:

$5_{36'87^\circ} = 4+3i$

$5_{36'87^\circ+90} = 5_{126'87} = -3+4i$

$5_{126'87+90} = 5_{216'87} = -4-3i$

$5_{216'87+90} = 5_{306'87} = 3-4i$

(19) El producto de un número complejo z con su conjugado da como resultado $48_{0°}$, y el cociente de dicho número z con su conjugado da como resultado un número complejo con argumento $60°$. Averigua z.

Sea $z = r_\alpha \Rightarrow \bar{z} = r_{-\alpha}$

$$z \cdot \bar{z} = 48_{0°} \Rightarrow r_\alpha \cdot r_{-\alpha} = (r \cdot r)_{\alpha-\alpha} = r^2_{0°} = 48_{0°} \Rightarrow r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{r_\alpha}{r_{-\alpha}} = \left(\frac{r}{r}\right)_{\alpha+\alpha} = 1_{2\alpha} \Rightarrow 2\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 30°$$

$$\Rightarrow z = 4\sqrt{3}_{30°}$$

(20) Averigua sen $15°$ y cos $15°$ a partir del cociente $\frac{1_{45°}}{1_{30°}}$

$$1_{45} = 1(\cos 45 + i \operatorname{sen} 45) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

$$1_{30} = 1(\cos 30 + i \operatorname{sen} 30) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

$$\frac{1_{45}}{1_{30}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}+i}{\cancel{2}}} = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} - i^2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (i)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$

$$\frac{1_{45}}{1_{30}} = \left(\frac{1}{1}\right)_{45-30} = 1_{15°} = 1(\cos 15 + i \operatorname{sen} 15)$$

$$\Rightarrow \cos 15 + i \cdot \operatorname{sen} 15 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2} + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$$

Igualando parte real con parte real e imaginaria con imaginaria

$$\begin{cases} \text{Real} \Rightarrow \cos 15 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \text{Imaginaria} \Rightarrow \operatorname{sen} 15 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

(21) Resuelve la ecuación $iz^3 + 3i - 2 = 1 + i$ y representa las soluciones.

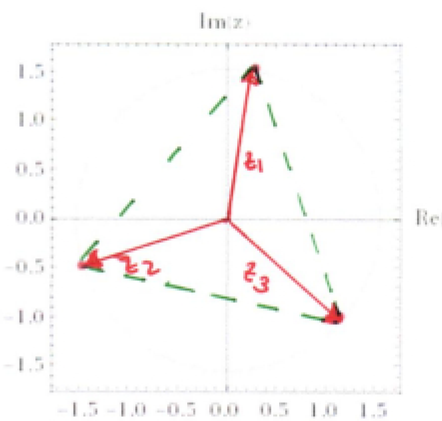
$$iz^3 + 3i - 2 = 1 + i \Rightarrow iz^3 = 3 - 2i \Rightarrow z^3 = \frac{3-2i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = -3i + 2i^2$$

$$\Rightarrow z^3 = -2 - 3i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{-3}{-2}\right) = 236'31^\circ \end{cases} \Rightarrow z^3 = \sqrt{13}_{236'31^\circ}$$

Ojo con el cuadrante!!

$$\Rightarrow z = \sqrt[3]{\sqrt{13}_{236'31^\circ}} = \sqrt[6]{13}_{\frac{236'31 + k\cdot 360}{3}} = \sqrt[6]{13}_{78'77 + k\cdot 120} \quad k = 0, 1, 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{13}_{78'77} \\ k = 1 \Rightarrow z_2 = \sqrt[6]{13}_{198'77} \\ k = 2 \Rightarrow z_3 = \sqrt[6]{13}_{318'77} \end{cases}$$



(22) Resuelve las siguientes ecuaciones y sistemas en $\mathbb{C}$

a) $z^2+3z+7=0$

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{9-28}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-19}}{2}=\frac{-3\pm i\sqrt{19}}{2}\begin{cases} z_1=-\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{19}}{2}\\ z_2=-\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{19}}{2}\end{cases}$$

b) $iz^3-27=0$

$$iz^3=27 \Rightarrow z^3=\frac{27}{i}\cdot\frac{-i}{-i}=\frac{-27i}{-i^2}=-27i$$

$$\Rightarrow z=\sqrt[3]{-27i}=\sqrt[3]{27_{270^\circ}}=3_{\frac{270+k\cdot 360}{3}}=3_{90^\circ+k\cdot 120^\circ} \quad k=0,1,2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } k=0 \Rightarrow z_1=3_{90^\circ}=3i\\ \text{Si } k=1 \Rightarrow z_2=3_{210^\circ}=3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3i}{2}\\ \text{Si } k=2 \Rightarrow z_3=3_{330^\circ}=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3i}{2}\end{cases}$$

c) $z^4+13z^2+36=0$; $z^2=t$

$$t^2+13t+36=0 \to t=\frac{-13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{-13\pm 5}{2}\begin{cases} t_1=-4\\ t_2=-9\end{cases}$$

$$z^2=-4 \Rightarrow z=\pm\sqrt{-4}\begin{cases} z_1=+2i\\ z_2=-2i\end{cases}$$

$$z^2=-9 \Rightarrow z=\pm\sqrt{-9}\begin{cases} z_3=+3i\\ z_4=-3i\end{cases}$$

d) $z^4 - 8z = 0$, $z(z^3-8)=0 \nearrow \boxed{z_1=0}$; $\searrow z^3 - 8 = 0$

$z^3 - 8 = 0 \Rightarrow z^3 = 8 \Rightarrow z = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0^\circ}} = 2_{\frac{0+k\cdot 360}{3}} = 2_{0+k\cdot 120^\circ}$

Si $k=0 \Rightarrow z_2 = 2_{0^\circ} = 2$

Si $k=1 \Rightarrow z_3 = 2_{120^\circ} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

Si $k=2 \Rightarrow z_4 = 2_{240^\circ} = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$

e) $\left.\begin{array}{l} z + 3w = 8-3i \\ 2z + w = 6-i \end{array}\right\}$ $-2E_1 \rightarrow$ $-2z - 6w = -16+6i$

$2z + w = 6 - i$

$-5w = -10 + 5i$

$\boxed{w = 2 - i}$

$z = 8 - 3i - 3w$

$\boxed{z = 8 - 3i - 3(2-i) = 8 - 3i - 6 + 3i = 2}$

f) $\left.\begin{array}{l} 2z - 5w = -5+2i \\ 4z - 3w = -3-10i \end{array}\right\}$ $-2E_1 \rightarrow$ $-4z + 10w = +10 - 4i$

$4z - 3w = -3 - 10i$

$7w = 7 - 14i$

$\boxed{w = 1 - 2i}$

$2z = -5 + 2i + 5w$

$2z = -5 + 2i + 5 - 10i$

$2z = -8i \Rightarrow \boxed{z = -4i}$

23) Calcula el valor de K para que las siguientes expresiones sean números imaginarios puros:

a) $$\frac{3+Ki}{K+2i} = \frac{(3+Ki)(K-2i)}{(K+2i)\cdot(K-2i)} = \frac{3K-6i+K^2i-2Ki^2}{(K)^2-(2i)^2} =$$

$$= \frac{3K+(K^2-6)i+2K}{K^2-4i^2} = \frac{5K+(K^2-6)i}{K^2+4} = \frac{5K}{K^2+4} + \frac{K^2-6}{K^2+4}i$$

Si tiene que ser imaginario puro $\Rightarrow Re(z)=0$

$$\frac{5K}{K^2+4} = 0 \Rightarrow 5K=0 \Rightarrow \boxed{K=0}$$

b) $$3Ki\cdot\frac{1-Ki}{1-i} = \frac{3Ki-3K^2i^2}{1-i} = \frac{3K^2+3Ki}{1-i} = \frac{(3K^2+3Ki)(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} =$$

$$= \frac{3K^2+3K^2i+3Ki+3Ki^2}{(1)^2-(i)^2} = \frac{3K^2-3K+(3K^2+3K)i}{1-i^2} =$$

$$= \frac{3K^2-3K}{2} + \frac{3K^2+3K}{2}i$$

Si tiene que ser imaginario puro $\Rightarrow Re(z)=0$

$$\frac{3K^2-3K}{2} = 0 \Rightarrow 3K(K-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{K=0} \\ \boxed{K=1} \end{cases}$$

No sirve en este caso!!

(24) Calcular p y q para que se cumpla la igualdad:

$$(p+3i)(4+qi) = 15+9i$$

$$(p+3i)(4+qi) = 4p + pqi + 12i + 3qi^2 = (4p-3q) + (12+pq)i$$

$$\Rightarrow (4p-3q) + (12+pq)i = 15+9i \quad \begin{cases} \xrightarrow{Re(z)} 4p-3q = 15 \\ \xrightarrow{Im(z)} 12+pq = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4p-3q = 15 \\ pq = -3 \end{array}\right\} q = \frac{-3}{p} \longrightarrow 4p - 3\cdot\left(\frac{-3}{p}\right) = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4p^2 + 9 = 15p \Rightarrow 4p^2 - 15p + 9 = 0 \quad \begin{cases} \rightarrow p_1 = 3 \Rightarrow q_1 = -1 \\ \rightarrow p_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow q_2 = -4 \end{cases}$$

(25) Comprueba que el número complejo $z = 1-3i$ cumple que

$$\frac{z^2}{\bar{z}} = z-5$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{z^2}{\bar{z}} = \frac{(1-3i)^2}{\bar{z}} = \frac{1-6i+9i^2}{\bar{z}} = \frac{-8-6i}{\bar{z}} = -4-3i \\ z-5 = 1-3i-5 = -4-3i \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{z^2}{\bar{z}} = z-5$$

(26) La suma de dos números complejos z_1 y z_2 es $3+2i$, siendo la parte real de z_2, $Re(z_2)=2$. Además la división $\frac{z_1}{z_2}$ es un número imaginario puro. Calcula z_1 y z_2.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a+bi \\ z_2 = 2+ci \end{array}\right\} z_1+z_2 = (a+2)+(b+c)i = 3+2i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2=3 \longrightarrow a=1 \\ b+c=2 \longrightarrow c=2-b \end{cases}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+bi}{2+ci} = \frac{1+bi}{2+(2-b)i} = \frac{(1+bi)\left(2-(2-b)i\right)}{\left(2+(2-b)i\right)\cdot\left(2-(2-b)i\right)} =$$

$$= \frac{2-(2-b)i+2bi-2bi^2+b^2i^2}{(2)^2-\left((2-b)i\right)^2} = \frac{2+2b-b^2+(3b-2)i}{4-(4-4b+b^2)i^2} =$$

$$= \frac{2+2b-b^2}{b^2-4b+8} + \frac{3b-2}{b^2-4b+8}i$$

Como $\frac{z_1}{z_2}$ es imaginario puro $\Rightarrow Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=0$

$$\frac{2+2b-b^2}{b^2-4b+8} = 0 \Rightarrow -b^2+2b+2=0 \begin{cases} \rightarrow b=1+\sqrt{3} \Rightarrow c=1-\sqrt{3} \\ \rightarrow b=1-\sqrt{3} \Rightarrow c=1+\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z_1 = 1+(1+\sqrt{3})i \ ; \ z_2 = 2+(1-\sqrt{3})i \\ z_1 = 1+(1-\sqrt{3})i \ ; \ z_2 = 2+(1+\sqrt{3})i \end{cases}$$

(27) Determina dos números complejos sabiendo que su suma es 3 y su cociente es $1i$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a+bi \\ z_2 = c+di \end{array}\right\} \quad z_1+z_2 = 3 \quad y \quad \frac{z_1}{z_2} = 1i$$

$$a+bi+c+di = 3$$

$$(a+c)+(b+d)i = 3 \begin{array}{l} \nearrow a+c=3 \\ \searrow b+d=0 \end{array}$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+cbi-bdi^2}{c^2-d^2i^2} =$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}\cdot i = 1i$$

$$\nearrow \frac{ac+bd}{c^2+d^2} = 0 \Rightarrow ac+bd=0$$

$$\searrow \frac{cb-ad}{c^2+d^2} = 1 \Rightarrow cb-ad = c^2+d^2$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a+c=3 \longrightarrow a=3-c \\ b+d=0 \longrightarrow b=-d \\ ac+bd=0 \longrightarrow (3-c)c-d^2=0 \rightarrow d^2=(3-c)c \\ cb-ad=c^2+d^2 \longrightarrow -cd-(3-c)d = c^2+(3-c)c \end{array}\right.$$

$$-cd-(3-c)d = c^2+3c-c^2$$

$$-cd-(3-c)d = 3c$$

$$d(-c-3+c) = 3c \Rightarrow -3d = 3c \Rightarrow \boxed{c=-d}$$

$$d^2 = (3-c)c$$

$$d^2 = (3+d)(-d) \Rightarrow d^2 = -3d-d^2 \Rightarrow 2d^2+3d=0$$

$$d(2d+3)=0 \rightarrow d=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=3$$ No sirve

$$d(2d+3)=0 \rightarrow \boxed{d=-\frac{3}{2} \Rightarrow c=\frac{3}{2} \Rightarrow b=\frac{3}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{2}}$$

Los números pedidos son:

$$z_1 = \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i \quad y \quad z_2 = \frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$$

(28) Escribe una ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ (con b y c números reales) que tenga por solución al número complejo:

a) $1-i$

Si $z_1 = 1-i$ es solución de la ecuación, también será solución su conjugado $\bar{z}_1 = 1+i$.

$$x^2+bx+c = (x-z_1)(x-\bar{z}_1) = x^2-(z_1+\bar{z}_1)x + z_1\cdot\bar{z}_1$$

$z_1 + \overline{z}_1 = (1-i) + (1+i) = 2$

$z_1 \cdot \overline{z}_1 = (1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 2$ $\Rightarrow$ $\boxed{x^2 - 2x + 2 = 0}$

b) $3-2i$

Si $z_1 = 3-2i$ es solución de la ecuación, también será solución su conjugado $\overline{z}_1 = 3+2i$

$$x^2 + bx + c = (x - z_1)(x - \overline{z}_1) = x^2 - (z_1 + \overline{z}_1)x + z_1 \cdot \overline{z}_1$$

$z_1 + \overline{z}_1 = (3-2i) + (3+2i) = 6$

$z_1 \cdot \overline{z}_1 = (3-2i)\cdot(3+2i) = 9 - 4i^2 = 13$ $\Rightarrow$ $\boxed{x^2 - 6x + 13 = 0}$

29 Calcula los números complejos p y q para que la ecuación $x^3 + px^2 + qx - 2 = 0$ tenga como solución a los números complejos $z_1 = i$ y $z_2 = 2i$. ¿Cuál es la tercera solución de la ecuación?

$$x^3 + px^2 + qx - 2 = (x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$$

$$(x - z_1)(x - z_2) = (x - i)(x - 2i) = x^2 - 2xi - xi + 2i^2 = x^2 - 3xi - 2$$

$$x^3 + px^2 + qx - 2 = (x^2 - 3xi - 2)(x - z_3)$$

$$x^3 + px^2 + qx - 2 = x^3 - x^2 z_3 - 3x^2 i + 3x z_3 i - 2x + 2z_3$$

$$x^3 + px^2 + qx - 2 = x^3 + (-3i - z_3)\cdot x^2 + (+3z_3 i - 2)x + 2z_3$$

$$\rightarrow p = -3i - z_3 \longrightarrow p = 1 - 3i$$

$$\rightarrow q = +3z_3 i - 2 \longrightarrow q = -2 - 3i$$

$$\rightarrow -2 = 2z_3 \Rightarrow z_3 = -1$$

(30) Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$

a) $x^2 + ix + 1 = 0$

$$x = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-5}}{2} = \frac{-i \pm i\sqrt{5}}{2} \begin{cases} x_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot i \\ x_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot i \end{cases}$$

b) $ix^2 + 7x - 12i = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 48i^2}}{2i} = \frac{-7 \pm 1}{2i} \begin{cases} x_1 = \frac{-6}{2i} = \frac{-3}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = 3i \\ x_2 = \frac{-8}{2i} = \frac{-4}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = 4i \end{cases}$$

c) $ix^3 + 27 = 0$

$$x^3 = -\frac{27}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = 27i \Rightarrow x = \sqrt[3]{27i} = \sqrt[3]{27_{90^\circ}} = 3_{\frac{90+k\cdot 360}{3}} = 3_{30+k\cdot 120}$$

$$\Rightarrow 3_{30+k\cdot 120} \begin{cases} k=0 \rightarrow x_1 = 3_{30^\circ} \\ k=1 \rightarrow x_2 = 3_{150^\circ} \\ k=2 \rightarrow x_3 = 3_{270^\circ} \end{cases}$$

(31) Calcula el valor de "b" para que se verifique la igualdad

$$4_{72^\circ} \cdot (1+bi) = 8_{132^\circ}$$

$$4_{72^\circ} \cdot (1+bi) = 8_{132^\circ} \Rightarrow 1+bi = \frac{8_{132^\circ}}{4_{72^\circ}} = 2_{60^\circ}$$

$$\nearrow r = \sqrt{1^2+b^2} = 2 \Rightarrow b^2 = 3 \begin{cases} b = -\sqrt{3} \longrightarrow \text{No sirve} \\ \boxed{b = +\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\longrightarrow tg\, 60 = \frac{b}{1} \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{3}}$$

(32) Comprueba que las soluciones de la ecuación $z^6 - 64 = 0$ dan cero cuando las sumamos todas.

$$z^6 - 64 = 0 \Rightarrow z^6 = 64 \Rightarrow z = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0^\circ}} = 2_{\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{6}} = 2_{0^\circ + k\cdot 60^\circ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=0 \longrightarrow z_1 = 2_{0^\circ} = 2 \\ k=1 \longrightarrow z_2 = 2_{60^\circ} = 2(\cos 60 + i \operatorname{sen} 60) = 1 + i\sqrt{3} \\ k=2 \longrightarrow z_3 = 2_{120^\circ} = 2(\cos 120 + i \operatorname{sen} 120) = -1 + i\sqrt{3} \\ k=3 \longrightarrow z_4 = 2_{180^\circ} = -2 \\ k=4 \longrightarrow z_5 = 2_{240^\circ} = 2(\cos 240 + i \operatorname{sen} 240) = -1 - i\sqrt{3} \\ k=5 \longrightarrow z_6 = 2_{300^\circ} = 2(\cos 300 + i \operatorname{sen} 300) = 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 2 + 1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} - 2 - 1 - i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} = 0$$

33) Determina el valor de k para que $\frac{2+i}{k-i}$ sea un número real. ¿Cuál es ese número real?

$$\frac{2+i}{k-i} = \frac{(2+i)(k+i)}{(k-i)(k+i)} = \frac{2k+2i+ik+i^2}{k^2-i^2} = \frac{2k-1+(2+k)i}{k^2+1} =$$

$$= \frac{2k-1}{k^2+1} + \frac{2+k}{k^2+1}\cdot i$$

Si es un número real $\Rightarrow Im(z)=0$

$$\frac{2+k}{k^2+1} = 0 \Rightarrow 2+k=0 \Rightarrow \boxed{k=-2}$$

siendo el número real $z = \frac{2\cdot(-2)-1}{2^2+1} = \frac{-5}{5} = -1$

34) Calcula el valor de "a" para que el número $z = \frac{6-2i}{1+ai}$ sea

a) Un número imaginario puro:

$$z = \frac{6-2i}{1+ai}\cdot\frac{1-ai}{1-ai} = \frac{6-6ai-2i+2ai^2}{1-a^2i^2} = \frac{6-2a+(-2-6a)i}{1+a^2} =$$

$$= \frac{6-2a}{1+a^2} + \frac{-2-6a}{1+a^2}\cdot i$$

$\Rightarrow$ Si es imaginario puro $\Rightarrow Re(z)=0$

$$\frac{6-2a}{1+a^2} = 0 \Rightarrow 6-2a=0 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

b) Un número real:

Si es un número real $\Rightarrow Im(z) = 0$

$$\frac{-2-6a}{1+a^2} = 0 \Rightarrow -2-6a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

c) El número complejo 2-4i:

$$\frac{6-2a}{1+a^2} + \frac{-2-6a}{1+a^2} i = 2-4i$$

$$Re(z) \Rightarrow \frac{6-2a}{1+a^2} = 2 \Rightarrow 6-2a = 2+2a^2 \Rightarrow 2a^2+2a-4=0 \Rightarrow a=1,\ a=-2$$

$$Im(z) \Rightarrow -\frac{2-6a}{1+a^2} = -4 \Rightarrow 2+6a = 4+4a^2 \Rightarrow 4a^2-6a+2=0 \Rightarrow a=1,\ a=1/2$$

El valor de "a" que satisface ambas ecuaciones es $\boxed{a=1}$

d) Un número complejo con módulo 1:

$$r = \sqrt{(Re(z))^2+(Im(z))^2} \Rightarrow 1 = \sqrt{\left(\frac{6-2a}{1+a^2}\right)^2+\left(\frac{-2-6a}{1+a^2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \sqrt{\frac{(6-2a)^2+(-2-6a)^2}{(1+a^2)^2}} \Rightarrow 1 = \frac{1}{1+a^2}\cdot\sqrt{(6-2a)^2+(-2-6a)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+a^2 = \sqrt{(6-2a)^2+(-2-6a)^2} \Rightarrow (1+a^2)^2 = (6-2a)^2+(-2-6a)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 + 2a^2 + a^4 = 36 \cancel{-24a} + 4a^2 + 4 \cancel{+24a} + 36a^2$

$\Rightarrow a^4 - 38a^2 - 39 = 0 \quad ; \quad a^2 = t$

$\Rightarrow t^2 - 38t - 39 = 0 \quad \begin{cases} \to t = 39 \\ \to t = -1 \end{cases}$

$a^2 = 39 \Rightarrow \boxed{a = \pm\sqrt{39}}$

$a^2 = -1 \Rightarrow a = \pm i$ (donde $a = \pm i$ no es válida)

e) Un número complejo con argumento $\frac{7\pi}{4}$

$tg\,\alpha = \frac{Im(z)}{Re(z)} \Rightarrow tg\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\frac{-2-6a}{\cancel{1+a^2}}}{\frac{6-2a}{\cancel{1+a^2}}} \Rightarrow -1 = \frac{-2-6a}{6-2a}$

$\Rightarrow -6 + 2a = -2 - 6a \Rightarrow 8a = 4 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

(35) Calcula el valor de "a" para que $z = a + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ verifique que $z^2 = \overline{z}$

$z^2 = \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = a^2 + ia\sqrt{3} + \frac{3}{4}i^2 = \left(a^2 - \frac{3}{4}\right) + ia\sqrt{3}$

$\overline{z} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow z^2 = \overline{z} \quad \begin{cases} \xrightarrow{Real} a^2 - \frac{3}{4} = a \to a^2 - a - \frac{3}{4} = 0 \begin{cases} \to a = 3/2 \\ \to a = -1/2 \end{cases} \\ \xrightarrow{Im} a \cdot \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \to a = -1/2 \end{cases} \Bigg\} \boxed{a = -1/2}$

(36) Averigua "x" sabiendo que $\frac{xi}{1+3i}-\frac{2x}{4-i}=1$

$$x\left(\frac{i}{1+3i}-\frac{2}{4-i}\right)=1$$

$$x\cdot\frac{i(4-i)-2(1+3i)}{(1+3i)(4-i)}=1 \Rightarrow x\cdot\frac{4i-i^2-2-6i}{4-i+12i-3i^2}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\frac{-1-2i}{7+11i}=1 \Rightarrow x=\frac{7+11i}{-1-2i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{(7+11i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)}=\frac{-7+14i-11i+22i^2}{(-1)^2-(2i)^2}=\frac{-29+3i}{5}}$$

(37) Calcula "c" sabiendo que la representación gráfica de $z=\frac{12+ci}{-5+2i}$ está sobre la bisectriz del primer cuadrante

$$z=\frac{(12+ci)(-5-2i)}{(-5+2i)(-5-2i)}=\frac{-60-24i-5ci-2ci^2}{25-4i^2}=\frac{-60+2c+(-24-5c)i}{29}$$

Si está sobre la bisectriz, su argumento será $\alpha=45^\circ$

$$tg\,\alpha=\frac{Im(z)}{Re(z)} \Rightarrow tg\,45^\circ=\frac{-24-5c}{-60+2c} \Rightarrow 1=\frac{-24-5c}{-60+2c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -60+2c=-24-5c \Rightarrow 7c=36 \Rightarrow \boxed{c=\frac{36}{7}}$$

38) Calcula "K" sabiendo que la representación gráfica de $z = \frac{2+i}{K+i}$ está sobre la bisectriz del primer cuadrante:

$$z = \frac{2+i}{K+i} \cdot \frac{K-i}{K-i} = \frac{2K-2i+Ki-i^2}{K^2-i^2} = \frac{2K+1+(K-2)i}{K^2+1} =$$

$$= \frac{2K+1}{K^2+1} + \frac{K-2}{K^2+1} i$$

Si está sobre la bisectriz, su argumento será $\alpha = 45°$

$$tg\,\alpha = \frac{Im(z)}{Re(z)} \Rightarrow tg\,45 = \frac{\frac{K-2}{\cancel{K^2+1}}}{\frac{2K+1}{\cancel{K^2+1}}} \Rightarrow 1 = \frac{K-2}{2K+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2K+1 = K-2 \Rightarrow \boxed{K=-3}$$

39) Halla el valor de "K" para que $z = \frac{2-Ki}{K-i}$ sea:

a) Un número imaginario puro

b) Un número real

$$z = \frac{2-Ki}{K-i} \cdot \frac{K+i}{K+i} = \frac{2K+2i-K^2i-Ki^2}{K^2-i^2} = \frac{3K+(2-K^2)i}{K^2+1} =$$

$$= \frac{3K}{K^2+1} + \frac{2-K^2}{K^2+1} \cdot i$$

a) Si tiene que ser imaginario puro $\Rightarrow Re(z) = 0$

$$\frac{3k}{k^2+1} = 0 \Rightarrow 3k = 0 \Rightarrow \boxed{k=0}$$

b) Si tiene que ser un número real $\Rightarrow Im(z) = 0$

$$\frac{2-k^2}{k^2+1} = 0 \Rightarrow 2-k^2 = 0 \begin{cases} \boxed{k=\sqrt{2}} \\ \boxed{k=-\sqrt{2}} \end{cases}$$

(40) Calcula las raíces indicadas, expresando los resultados en forma binómica:

A) $\sqrt[4]{\dfrac{(2+i)(-1+3i)^2}{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^3}}$

$$z_1 = 2+i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \\ \alpha = \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = 26'565° \end{cases} \Rightarrow z_1 = \sqrt{5}_{26'565°}$$

$$z_2 = -1+3i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \\ \alpha = \text{arctg}\left(\frac{3}{-1}\right) = 108'435° \end{cases} \Rightarrow z_2 = \sqrt{10}_{108'435°}$$

Ojo con el cuadrante!!

$$z_3 = \sqrt{2}-i\sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = 2 \\ \alpha = \text{arctg}\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = 315° \end{cases} \Rightarrow z_3 = 2_{315°}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{\frac{(2+i)(-1+3i)^2}{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^3}} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}_{26'565}\cdot\left(\sqrt{10}_{108'435^\circ}\right)^2}{\left(2_{315}\right)^3}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}_{26'565}\cdot 10_{216'87}}{8_{225}}} = \sqrt[4]{\frac{10\sqrt{5}_{243'435}}{8_{225}}} = \sqrt[4]{\left(\frac{5\sqrt{5}}{4}\right)_{18'435^\circ}} =$$

$$= \left(\sqrt[4]{\frac{5\sqrt{5}}{4}}\right)_{\frac{18'435^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}} = \left(\sqrt[4]{\frac{5\sqrt{5}}{4}}\right)_{4'61^\circ+k\cdot 90^\circ} \text{ con } k=0,1,2,3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=0 \longrightarrow z_1 = \left(\sqrt[4]{\frac{5\sqrt{5}}{4}}\right)_{4'61^\circ} = 1'293\,(\cos 4'61 + i \operatorname{sen} 4'61) = \\ \qquad = 1'2888 + 0'1039\,i \\ k=1 \longrightarrow z_2 = \left(\sqrt[4]{\frac{5\sqrt{5}}{4}}\right)_{94'61^\circ} = 1'293\,(\cos 94'61 + i \operatorname{sen} 94'61) = \\ \qquad = -0'1039 + 1'2888\,i \\ k=2 \longrightarrow z_3 = \left(\sqrt[4]{\frac{5\sqrt{5}}{4}}\right)_{184'61^\circ} = 1'293\,(\cos 184'61 + i \operatorname{sen} 184'61) = \\ \qquad = -1'2888 - 0'1039\,i \\ k=3 \longrightarrow z_4 = \left(\sqrt[4]{\frac{5\sqrt{5}}{4}}\right)_{274'61^\circ} = 1'293\,(\cos 274'61^\circ + i \operatorname{sen} 274'61^\circ) = \\ \qquad = 0'1039 - 1'2888\,i \end{cases}$$

B) $\sqrt[4]{\dfrac{(2-3i)-(-1+3i)}{(-\sqrt{3}-i)^4}} = \sqrt[4]{\dfrac{3-6i}{(-\sqrt{3}-i)^4}} = (*)$

$z_1 = 3-6i \longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \\ \alpha = \text{arctg}\left(-\frac{6}{3}\right) = 296'565^\circ \end{cases} \Rightarrow z_1 = 3\sqrt{5}_{296'565^\circ}$

$z_2 = -\sqrt{3}-i \longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2 \\ \alpha = \text{arctg}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) = 210^\circ \end{cases} \Rightarrow z_2 = 2_{210^\circ}$

Ojo con el cuadrante!!

$(*) = \sqrt[4]{\dfrac{3\sqrt{5}_{296'565}}{(2_{210^\circ})^4}} = \sqrt[4]{\dfrac{3\sqrt{5}_{296'565}}{16_{120}}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{16}\right)_{176'565}} = \left(\sqrt[4]{\dfrac{3\sqrt{5}}{16}}\right)_{\frac{176'565+k\cdot 360}{4}}$

$= \left(\sqrt[4]{\dfrac{3\sqrt{5}}{16}}\right)_{44'14^\circ + k\cdot 90^\circ}$ con $k = 0, 1, 2, 3$

$k=0 \rightarrow z_1 = \left(\sqrt[4]{\dfrac{3\sqrt{5}}{16}}\right)_{44'14^\circ} = 0'805(\cos 44'14 + i \,\text{sen}\, 44'14) =$

$= 0'578 + 0'561\, i$

$\Longrightarrow k=1 \rightarrow z_2 = \left(\sqrt[4]{\dfrac{3\sqrt{5}}{16}}\right)_{134'14^\circ} = -0'561 + 0'578\, i$

$k=2 \rightarrow z_3 = \left(\sqrt[4]{\dfrac{3\sqrt{5}}{16}}\right)_{224'14^\circ} = -0'578 - 0'561\, i$

$k=3 \rightarrow z_4 = \left(\sqrt[4]{\dfrac{3\sqrt{5}}{16}}\right)_{314'14^\circ} = 0'561 - 0'578\, i$