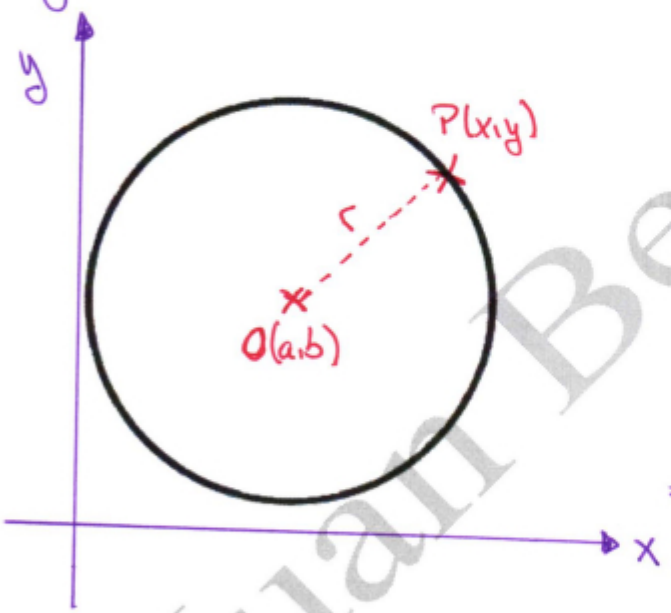
① Calcula la ecuación de la circunferencia de centro O(-3,4) y radio 5. Comprueba que pasa por el origen de coordenadas.

¡Recuerda!! LA CIRCUNFERENCIA

Una CIRCUNFERENCIA es el lugar de los puntos P(x,y) del plano que equidistan de un punto fijo O(a,b) al que llamamos CENTRO. La distancia entre cualquier punto P y el centro O es el RADIO r de la circunferencia.



$\overrightarrow{OP} = (x,y) - (a,b) = (x-a, y-b)$

$d(O,P) = |\overrightarrow{OP}| = r$

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2}$

ECUACIÓN CIRCUNFERENCIA CON CENTRO (a,b) y radio r

$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

$\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$ Ecuación anterior desarrollada

$(x+3)^2+(y-4)^2 = 25 \Rightarrow x^2+6x+9+y^2-8y+16 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2+6x-8y=0}$

El origen (0,0) efectivamente cumple la ecuación anterior con la que la circunferencia pasa por el origen

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

② Calcular la ecuación de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y que pasa por el punto P(1,1)

El radio r será $|\overrightarrow{OP}|$. Así:

$\overrightarrow{OP} = (1,1) - (0,0) = (1,1) \Rightarrow r = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=2}$

③ Calcula el centro y el radio de la circunferencia que tiene por ecuación $x^2+y^2-4x-6y=12$

Agrupamos:

$(x^2-4x) + (y^2-6y) = 12$

Expresamos como binómicas compensando términos independientes:

$x^2-4x = \underbrace{(x-2)^2}_{x^2-4x+4} - 4$ → hay que compensarlo pues ese término no está!!

$y^2-6y = \underbrace{(y-3)^2}_{y^2-6y+9} - 9$

$\Rightarrow (x-2)^2-4 + (y-3)^2-9 = 12$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \Rightarrow \boxed{(x-2)^2+(y-3)^2 = 5^2}$

⇒ Circunferencia con centro en C(2,3) y radio r=5

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(4) Razona si la ecuación $x^2+y^2-2x-8y+20=0$ se corresponde con la ecuación de una circunferencia.

$$x^2+y^2-2x-8y+20=0 \Rightarrow (x^2-2x)+(y^2-8y)+20=0$$

$$\left.\begin{aligned}(x^2-2x) &= (x-1)^2-1\\ (y^2-8y) &= (y-4)^2-16\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2-1+(y-4)^2-16+20=0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-4)^2=-3 \Rightarrow$$ No se trata de una circunferencia porque no se corresponde con su ecuación.

(5) Dada la circunferencia $x^2+y^2-4x+10y+25=0$, calcula:

a) La circunferencia concéntrica con radio 8.

b) La circunferencia concéntrica que pasa por $P(2,2)$.

Primero veamos cuál es el centro de la circunferencia dada:

$$x^2+y^2-4x+10y+25=0 \Rightarrow (x^2-4x)+(y^2+10y)+25=0$$

$$\left.\begin{aligned}(x^2-4x) &= (x-2)^2-4\\ (y^2+10y) &= (y+5)^2-25\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2-4+(y+5)^2-25+25=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+5)^2=4$$

que tiene centro en $C(2,-5)$ y radio $r=2$. Por tanto:

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

a) Concéntrica y de radio 8:

$$(x-2)^2+(y+5)^2=8^2 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2+10y+25=64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-4x+10y-35=0}$$

b) Concéntrica y que pase por $P(2,2)$:

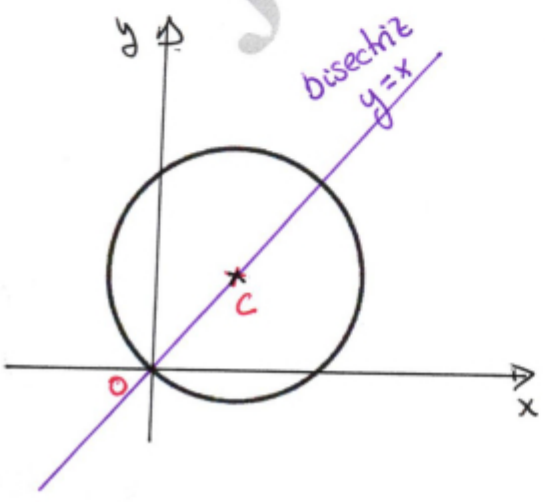
El radio de la circunferencia será $|\vec{CP}|$:

$$\vec{CP}=(2,2)-(2,-5)=(0,7) \Rightarrow r=|\vec{CP}|=\sqrt{7^2}=7$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+5)^2=7^2 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2+10y+25=49$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-4x+10y-20=0}$$

⑥ Hallar la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene radio 4 y su centro está sobre la bisectriz del primer cuadrante.



Por estar sobre la recta bisectriz $y=x$ el centro $C(x,y)$ es $C(x,x)$.

El radio es $|\vec{OC}|$. Así:

$$|\vec{OC}|=r \Rightarrow \sqrt{x^2+x^2}=4 \Rightarrow x\sqrt{2}=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$$

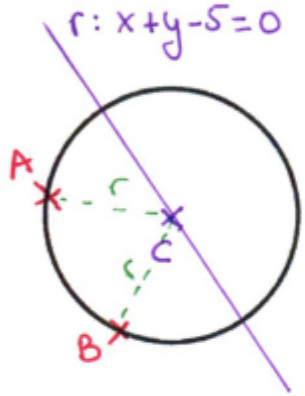
©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

$$\Rightarrow (x-2\sqrt{2})^2 + (y-2\sqrt{2})^2 = 4^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x\sqrt{2} + 8 + y^2 - 4y\sqrt{2} + 8 = 16 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 4\sqrt{2}(x+y) = 0}$$

⑦ Hallar la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,1)$, $B(3,-3)$ y tiene su centro en la recta $r: x+y-5=0$



Por estar sobre la recta $r: y = 5-x$ el centro $C(x, y)$ será $C(x, 5-x)$.

$$\vec{AC} = (x, 5-x) - (2,1) = (x-2, 4-x)$$

$$\vec{BC} = (x, 5-x) - (3,-3) = (x-3, 8-x)$$

$$r = |\vec{AC}| = \sqrt{(x-2)^2 + (4-x)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 16 - 8x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 20}$$

$$r = |\vec{BC}| = \sqrt{(x-3)^2 + (8-x)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 64 - 16x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 22x + 73}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 12x + 20} = \sqrt{2x^2 - 22x + 73} \Rightarrow -12x + 20 = -22x + 73 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x = 53 \Rightarrow x = \frac{53}{10} \Rightarrow y = 5 - \frac{53}{10} = -\frac{3}{10} \Rightarrow C\left(\frac{53}{10}, -\frac{3}{10}\right)$$

El radio será $r = \sqrt{2\cdot\left(\frac{53}{10}\right)^2 - 12\cdot\left(\frac{53}{10}\right) + 20} = \sqrt{\frac{629}{50}}$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

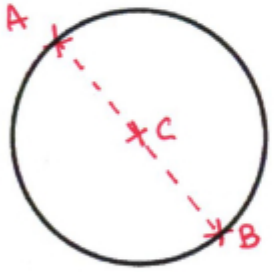
Por tanto:

$$\left(x-\frac{53}{10}\right)^2+\left(y+\frac{3}{10}\right)^2=\frac{629}{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{53}{5}x+\frac{2809}{100}+y^2+\frac{3}{5}y+\frac{9}{100}=\frac{629}{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{53}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{78}{5}=0 \Rightarrow \boxed{5x^2+5y^2-53x+3y+78=0}$$

(8) Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2,1)$ y $B(3,-3)$. Determina su ecuación:



Es fácil razonar que el centro C es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Así:

$$C=\left(\frac{2+3}{2},\frac{1-3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},-1\right)$$

$$\overrightarrow{CA}=(2,1)-\left(\frac{5}{2},-1\right)=\left(-\frac{1}{2},2\right)$$

$$r=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+1\right)^2=\frac{17}{4} \Rightarrow x^2-5x+\frac{25}{4}+y^2+2y+1=\frac{17}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-5x+2y+3=0}$$

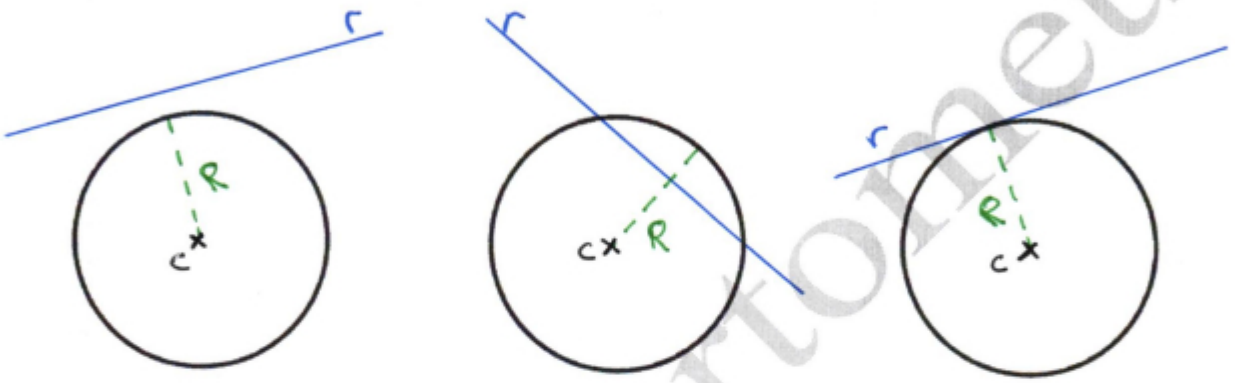
Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(9) Estudiar la posición relativa de la recta $r: x-1=0$ y de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-2x=0$.

¡Recuerda!! POSICIONES RELATIVAS RECTA / CIRCUNFERENCIA:

Con respecto a la circunferencia, una recta puede ser:



Para estudiarlo, resolveremos el sistema de segundo formado por las ecuaciones de la recta y circunferencia $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \end{cases}$

- Si no tiene solución, no hay puntos en común ⇒ EXTERIOR
- Si tiene dos soluciones, hay dos puntos comunes ⇒ SECANTE
- Si tiene una solución, hay un punto común ⇒ TANGENTE

También se puede estudiar la posición relativa de recta y circunferencia calculando la distancia del centro C a la recta r y comparándola con el radio R de

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

modo que:

- Si $d(C,r) > R \Rightarrow$ EXTERIOR
- Si $d(C,r) < R \Rightarrow$ SECANTE
- Si $d(C,r) = R \Rightarrow$ TANGENTE

Resolvemos el sistema de segundo grado:

$$\left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ 1+y^2-2=0 \Rightarrow y^2=1 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow y=-1 \\ \searrow y=+1 \end{array}$$

Como vemos tenemos dos soluciones $P(1,-1)$ y $Q(1,1)$ que son los dos puntos en común que tienen recta y circunferencia.

Por tanto, son SECANTES.

(10) Estudiar la posición relativa de la recta $r: x+y+5=0$ y la circunferencia de centro $C(-1,-3)$ y radio $R=3$

Veamos la distancia del centro C a la recta r:

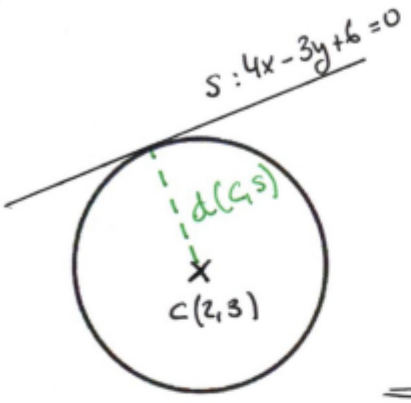
$$d(C,r) = \frac{|-1-3+5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Como $d(C,r) = \sqrt{2} < 3 = R \Rightarrow$ SECANTES.

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(11) Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2,3)$ y tangente a la recta $s: 4x-3y+6=0$



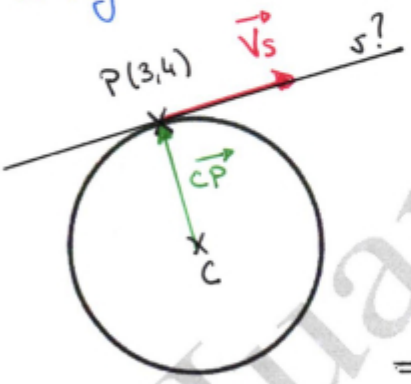
Como vemos, el radio de la circunferencia será la distancia $d(C,s)$. Así:

$$r = d(C,s) = \frac{|4\cdot 2 - 3\cdot 3 + 6|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9=1$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-4x-6y+12=0}$$

(12) Calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2=25$ trazada por el punto de la circunferencia $P(3,4)$



El centro de $x^2+y^2=25$ es $C(0,0)$.

$$\vec{CP} = (3,4)-(0,0) = (3,4)$$

$$\vec{v_s} \perp \vec{CP} \Rightarrow \vec{v_s} = (-4,3)$$

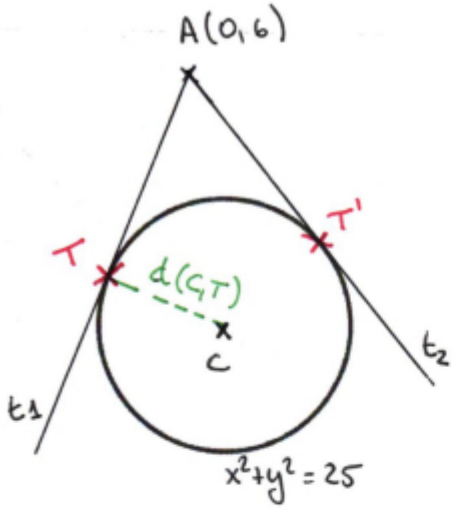
$$\Rightarrow s: \frac{x-3}{-4} = \frac{y-4}{3} \Rightarrow 3x-9 = -4y+16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s: 3x+4y-25=0}$$

(13) Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=25$ trazadas por el punto exterior a la circunferencia $A(0,6)$. Calcula los puntos de tangencia T y T'

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com



Las rectas que buscamos son:

$$t: y = mx + n$$

y como pasan por $A(0,6) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6 = 0 + n \Rightarrow n = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: y = mx + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: mx - y + 6 = 0$$

Por otro lado, la distancia del centro $C(0,0)$ a las rectas t es el radio de la circunferencia $r = 5$. Así:

$$d(C,t) = 5 \Rightarrow \frac{|m\cdot 0 - 0 + 6|}{\sqrt{m^2+1}} = 5 \Rightarrow \left(\frac{6}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 = (5)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{36}{m^2+1} = 25 \Rightarrow 25m^2 + 25 = 36 \Rightarrow m^2 = \frac{11}{25} \Rightarrow \begin{cases} m = +\frac{\sqrt{11}}{5} \\ m = -\frac{\sqrt{11}}{5} \end{cases}$$

$$t_1: \frac{\sqrt{11}}{5}\cdot x - y + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{t_1: x\sqrt{11} - 5y + 30 = 0}$$

$$t_2: -\frac{\sqrt{11}}{5}x - y + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{t_2: -x\sqrt{11} - 5y + 30 = 0}$$

Para determinar el punto de tangencia T resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sqrt{11}}{5}x - y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\} \longrightarrow y = \frac{\sqrt{11}}{5}x + 6$$

$$\hookleftarrow x^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{5}x + 6\right)^2 = 25 \Rightarrow$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\Rightarrow x^2 + \frac{11}{25}x^2 + \frac{12\sqrt{11}}{5}x + 36 - 25 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{36}{25}x^2 + \frac{12\sqrt{11}}{5}x + 11 = 0 \Rightarrow 36x^2 + 60\sqrt{11}\cdot x + 275 = 0$$

$$x = \frac{-60\sqrt{11} \pm \sqrt{39600 - 39600}}{72} = \frac{-60\sqrt{11}}{72} = -\frac{5\sqrt{11}}{6}$$

$$y = \frac{\sqrt{11}}{5}\cdot x + 6 = \frac{\sqrt{11}}{5}\cdot\left(\frac{-5\cdot\sqrt{11}}{6}\right) + 6 = \frac{25}{6} \Rightarrow \boxed{T\left(-\frac{5\sqrt{11}}{6}, \frac{25}{6}\right)}$$

Para determinar el punto de tangencia T' resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\sqrt{11}}{5}x - y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\} \rightarrow y = 6 - \frac{x\sqrt{11}}{5} \Rightarrow x^2 + \left(6 - \frac{x\sqrt{11}}{5}\right)^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 36 - \frac{12\sqrt{11}}{5}x + \frac{11}{25}x^2 - 25 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{36}{25}x^2 - \frac{12\sqrt{11}}{5}x + 11 = 0 \Rightarrow 36x^2 - 60\sqrt{11}x + 275 = 0$$

$$x = \frac{60\sqrt{11} \pm \sqrt{39600 - 39600}}{72} = \frac{60\sqrt{11}}{72} = \frac{5\sqrt{11}}{6}$$

$$y = 6 - \frac{x\sqrt{11}}{5} = 6 - \frac{5\sqrt{11}}{6}\cdot\frac{\sqrt{11}}{5} = \frac{25}{6} \Rightarrow \boxed{T'\left(\frac{5\sqrt{11}}{6}, \frac{25}{6}\right)}$$

Juan Bertomeu

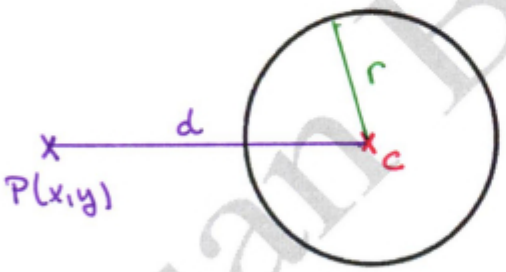
©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(14) Calcula la potencia del punto $P(3,4)$ con respecto a cada una de las circunferencias dadas por las ecuaciones

$\mathcal{C}_1: x^2+y^2=1$ y $\mathcal{C}_2: x^2+y^2-2x-4y-1=0$

¡Recuerda!! POTENCIA DE UN PUNTO

Dado un punto $P(x,y)$ y una circunferencia $\mathcal{C}: (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ se llama POTENCIA del punto P respecto a la circunferencia $\mathcal{C}$, $Pot_{\mathcal{C}}(P)$, a la diferencia d^2-r^2, siendo d la distancia de P al centro y siendo r el radio:



$$Pot_{\mathcal{C}}(P) = d^2 - r^2$$

También se puede calcular simplemente sustituyendo las coordenadas del punto P en la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+Ax+By+C$

- Si $Pot_{\mathcal{C}}(P)>0$ → El punto P está fuera de la circunferencia
- Si $Pot_{\mathcal{C}}(P)<0$ → El punto P está dentro de la circunferencia
- Si $Pot_{\mathcal{C}}(P)=0$ → El punto P pertenece a la circunferencia.

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$\mathcal{C}_1 : x^2+y^2-1=0$

↳ $Pot_{\mathcal{C}_1}(P) = 3^2+4^2-1 = 24 \Rightarrow$ P es exterior a $\mathcal{C}_1$

$\mathcal{C}_2 : x^2+y^2-2x-4y-1=0$

↳ $Pot_{\mathcal{C}_2}(P) = 3^2+4^2-2\cdot 3-4\cdot 4-1 = 2 \Rightarrow$ P es exterior a $\mathcal{C}_2$

(15) Halla el eje radical de las circunferencias de ecuaciones

$C_1 : x^2+y^2+6x+4y-13=0$ y $C_2 : x^2+y^2-4x+2y-7=0$

Recuerda!! EJE RADICAL

Dadas dos circunferencias $C_1 : x^2+y^2+Ax+By+C=0$ y $C_2 : x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$ el EJE RADICAL de las dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su potencia con respecto a las dos circunferencias es la misma.

Ojo!! → SI LAS CIRCUNFERENCIAS SON CONCÉNTRICAS, NO EXISTE EJE RADICAL.

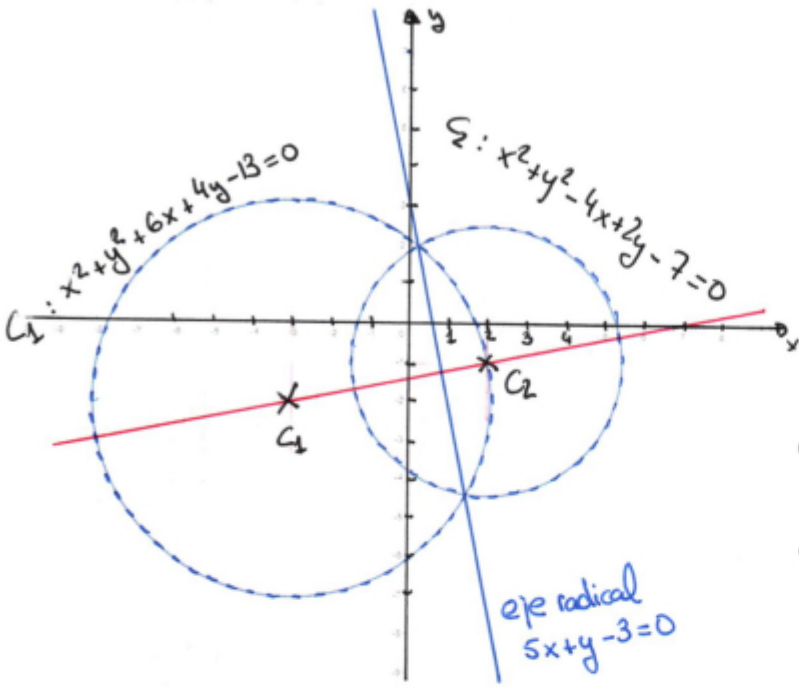
Buscamos los puntos $P(x,y)$ tales que $Pot_{C_1}(P) = Pot_{C_2}(P)$.

$x^2+y^2+6x+4y-13 = x^2+y^2-4x+2y-7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x+2y-6=0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Eje}_{\text{radical}} : 5x+y-3=0}$

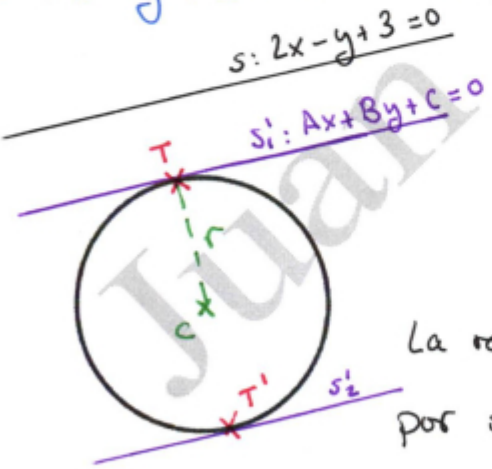
Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com



Además de lo explicado, el eje radical es una recta perpendicular a la recta que pasa por los centros de las circunferencias C_1 y C_2.

(16) Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2=16$ que es paralela a la recta $s: 2x-y+3=0$. Determina también el punto de tangencia T.



Nuestra circunferencia $x^2+y^2=16$ tiene su centro en $C(0,0)$ y su radio vale $r=4$.

La recta "s'" tangente que estamos buscando, por ser paralela a "s" será:

$$s': 2x-y+C=0$$

La distancia del centro $C(0,0)$ a esa recta "s'" es justamente el radio de la circunferencia. Así:

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

$d(C, s') = 4$

$$\frac{|2\cdot 0 - 0 + C|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|C|}{\sqrt{5}} = 4 \Rightarrow |C| = 4\sqrt{5} \Rightarrow C = \pm 4\sqrt{5}$$

$s'_1 : 2x - y + 4\sqrt{5} = 0$

$s'_2 : 2x - y - 4\sqrt{5} = 0$

Los puntos de tangencia los obtenemos como puntos de corte entre las rectas calculadas y la circunferencia dada.

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 4\sqrt{5} = 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{array}\right\} \longrightarrow y = 2x + 4\sqrt{5}$$

$$\hookrightarrow x^2 + (2x + 4\sqrt{5})^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 + 16x\sqrt{5} + 80 = 16 \Rightarrow 5x^2 + 16x\sqrt{5} + 64 = 0$$

$$x = \frac{-16\sqrt{5} \pm \sqrt{1280 - 1280}}{10} = -\frac{16\sqrt{5}}{10} = -\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$y = 2x + 4\sqrt{5} = -\frac{16\sqrt{5}}{5} + 4\sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$T\left(\frac{-8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y - 4\sqrt{5} = 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{array}\right\} \longrightarrow y = 2x - 4\sqrt{5}$$

$$\hookrightarrow x^2 + (2x - 4\sqrt{5})^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 16x\sqrt{5} + 80 = 16 \Rightarrow 5x^2 - 16x\sqrt{5} + 64 = 0$$

Juan Bertomeu

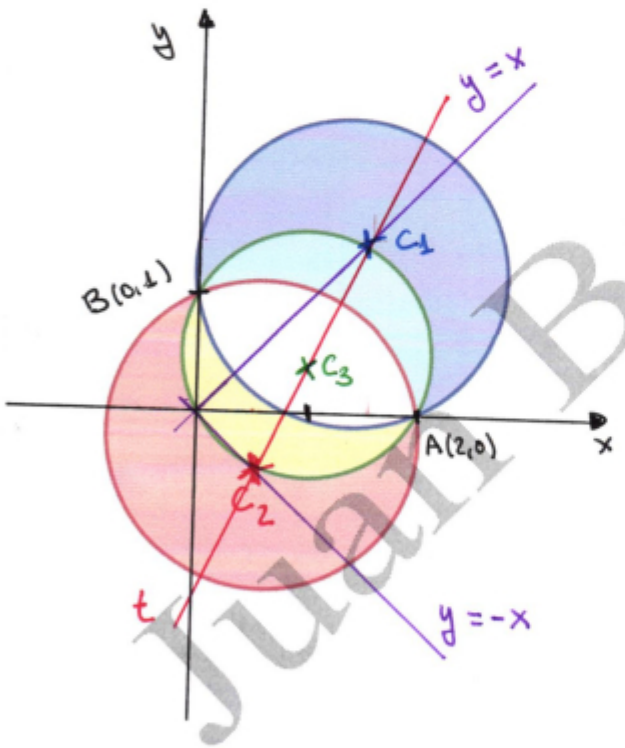
©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$x = \frac{16\sqrt{5} \pm \sqrt{1280 - 1280}}{10} = \frac{16\sqrt{5}}{10} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$y = 2x - 4\sqrt{5} = \frac{16\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{5} = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow T'\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

(17) De entre todas las circunferencias que pasan por los puntos $A(2,0)$ y $B(0,1)$, halla la ecuación de aquellas cuyos centros equidistan de los ejes coordenados.



Sea "t" el lugar geométrico de los centros $C(x,y)$ de las circunferencias que pasan por los puntos $A(2,0)$ y $B(0,1)$. Así:

$$C(x,y) \Rightarrow d(C,A) = d(C,B)$$

$$\vec{AC} = (x,y) - (2,0) = (x-2, y)$$

$$\vec{BC} = (x,y) - (0,1) = (x, y-1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: 4x - 2y - 3 = 0$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Los centros de todas las circunferencias que pasan por A y B están sobre la recta $t: 4x-2y-3=0$ calculada. Entre todos ellos, los que equidisten de los ejes serán los que estén sobre las bisectrices del primer y cuarto cuadrante. Así:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-2y-3=0 \\ y=x \end{array}\right\} \; 4x-2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{C_1\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x-2y-3=0 \\ y=-x \end{array}\right\} \; 4x+2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{C_2\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)}$$

Circunferencia $\mathcal{C}_1$:

$$r_1 = d(C_1, A) = \sqrt{\left(\tfrac{3}{2}-2\right)^2+\left(\tfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \Rightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}+y^2-3y+\frac{9}{4}=\frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{C}_1 : x^2+y^2-3x-3y+2=0}$$

Circunferencia $\mathcal{C}_2$:

$$r_2 = d(C_2, A) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}-2\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}=\frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{C}_2 : x^2+y^2-x+y-2=0}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(18) De las siguientes ecuaciones, dí cuáles se corresponden con circunferencias, dando su centro y su radio cuando sea posible.

a) $2x^2+2y^2-8x=0$

$$x^2+y^2-4x=0 \Rightarrow (x^2-4x)+y^2=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-4x=(x-2)^2-4 \\ y^2=(y-0)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2-4+(y-0)^2=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-0)^2=4$$

$\Rightarrow$ Circunferencia de centro $C(2,0)$ y radio $r=2$

b) $x^2-y^2+7x-2=0$

No es una circunferencia pues los coeficientes en x^2 e y^2 no son iguales!!

c) $x^2+y^2-3x+4xy-16=0$

No es una circunferencia al tener término en "xy"!!

d) $x^2+y^2+10x-2y+40=0$

$$(x^2+10x)+(y^2-2y)+40=0$$

$$(x+5)^2-25+(y-1)^2-1+40 \Rightarrow (x+5)^2+(y-1)^2=-14$$

No es una circunferencia al no corresponderse la ecuación.

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(19) Estudia la posición relativa de la circunferencia $\mathcal{C}: x^2+y^2-8x+2y+1=0$ y las rectas $r_1: y=x-1$, $r_2: y=x+1$ y $r_3: y=3$ averiguando los puntos de corte y de tangencia según sea el caso:

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2-8x+2y+1=0 \\ y=x-1 \end{matrix}\right\} \; x^2+(x-1)^2-8x+2(x-1)+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+x^2-2x+1-8x+2x-2+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-8x=0 \Rightarrow 2x(x-4)=0 \begin{cases} \Rightarrow x=0 \longrightarrow A(0,-1) \\ \Rightarrow x=4 \longrightarrow B(4,3) \end{cases}$$

$\mathcal{C}$ y r_1 son secantes y los puntos de corte son A y B.

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2-8x+2y+1=0 \\ y=x+1 \end{matrix}\right\} \; x^2+(x+1)^2-8x+2(x+1)+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+x^2+2x+1-8x+2x+2+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-32}}{4} \Rightarrow \nexists\, x\in\mathbb{R}$$

$\mathcal{C}$ y r_2 son exteriores

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2-8x+2y+1=0 \\ y=3 \end{matrix}\right\} \; x^2+9-8x+6+1=0 \Rightarrow x^2-8x+16=0$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=4 \longrightarrow T(4,3)$$

$\mathcal{C}$ y r_3 son tangentes en el punto T

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(20) Calcula la distancia de cada una de las rectas $r_1: x+y=10$, $r_2: 4x+3y+20=0$, $r_3: 3x-4y=0$ y $r_4: y=-2$ al centro de la circunferencia $\mathcal{C}: x^2+y^2-6x+8y=0$. Utiliza esas distancias para estudiar la posición relativa de cada una de las rectas respecto a $\mathcal{C}$.

$$x^2+y^2-6x+8y=0 \Rightarrow (x^2-6x)+(y^2+8y)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2-9+(y+4)^2-16=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=25 \begin{cases} \Rightarrow \text{Centro } C(3,-4) \\ \Rightarrow \text{Radio } r=5 \end{cases}$$

$$d(C,r_1)=\frac{|3-4-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{11}{\sqrt{2}}\approx 7'78>5 \Rightarrow r_1 \text{ es exterior a } \mathcal{C}.$$

$$d(C,r_2)=\frac{|4\cdot 3+3\cdot(-4)+20|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{20}{5}=4<5 \Rightarrow r_2 \text{ y } \mathcal{C} \text{ son secantes}$$

$$d(C,r_3)=\frac{|3\cdot 3-4\cdot(-4)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5 \Rightarrow r_3 \text{ y } \mathcal{C} \text{ son tangentes}$$

$$d(C,r_4)=\frac{|-4+2|}{\sqrt{1^2}}=\frac{2}{1}=2<5 \Rightarrow r_4 \text{ y } \mathcal{C} \text{ son secantes}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(21) Averigua los valores de b para los que $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

$x^2 + y^2 = 9$ → Centro $C(0,0)$

→ Radio $r = 3$

La recta será tangente cuando la distancia del centro C a la recta coincida con el radio. Así:

$$d(C,r) = 3 \Rightarrow \frac{|0 - 0 + b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow |b| = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \pm 3\sqrt{2}}$$

(22) Comprueba que el eje radical de las circunferencias

$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0$

$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 6y = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x) + (y^2 + 12y) - 11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+6)^2 - 36 - 11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+6)^2 = 51$ → Centro $C_1(2, -6)$

$x^2 + y^2 - 6y = 0 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-3)^2 = 9$ → Centro $C_2(0, 3)$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Sea "s" la recta que pasa por C_1 y C_2:

$$\overrightarrow{C_1C_2} = (0,3) - (2,-6) = (-2,9)$$

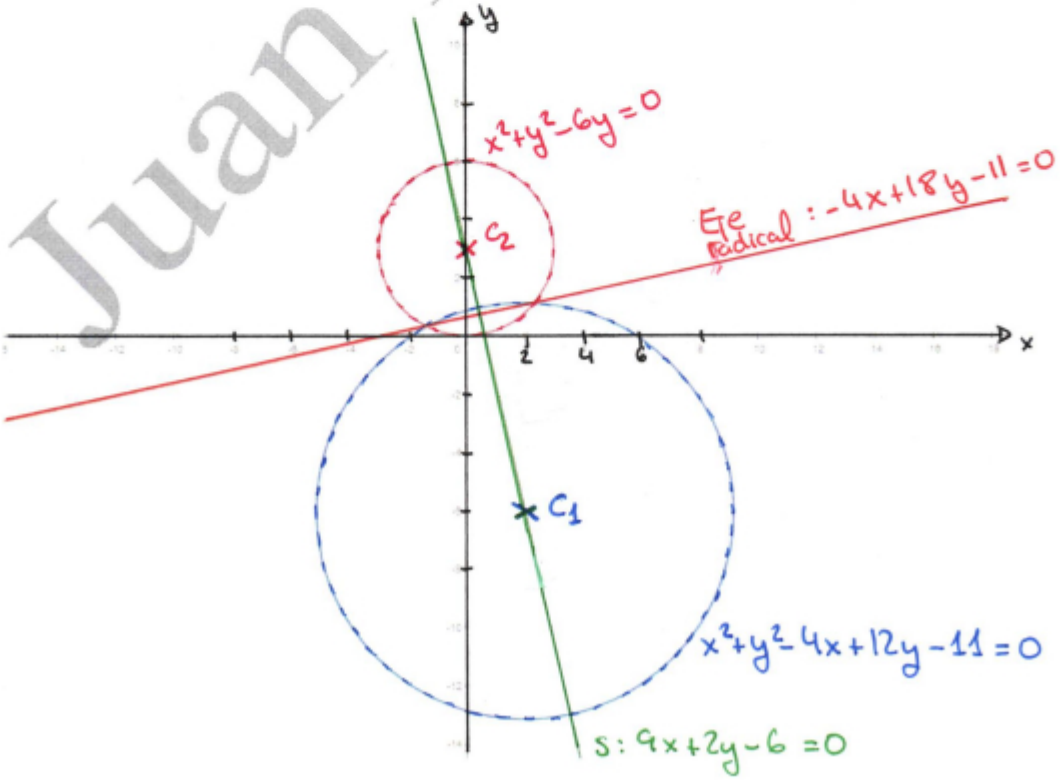
$$s: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{9} \Rightarrow 9x = -2y + 6 \Rightarrow y = -\frac{9}{2}x + 3 \Rightarrow m_s = -\frac{9}{2}$$

Para calcular el eje radical, buscamos los puntos $P(x,y)$ tales que $Pot_{C_1}(P) = Pot_{C_2}(P)$. Así:

$$x^2+y^2-4x+12y-11 = x^2+y^2-6y$$

$$-4x+18y-11=0 \Rightarrow Eje_r: y = \frac{2}{9}x + \frac{11}{18} \Rightarrow m_{eje} = \frac{2}{9}$$

Como vemos, $m_r \cdot m_{eje} = -\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{9} = -1$, con lo que efectivamente el eje radical y la recta "s" que une los centros son perpendiculares.



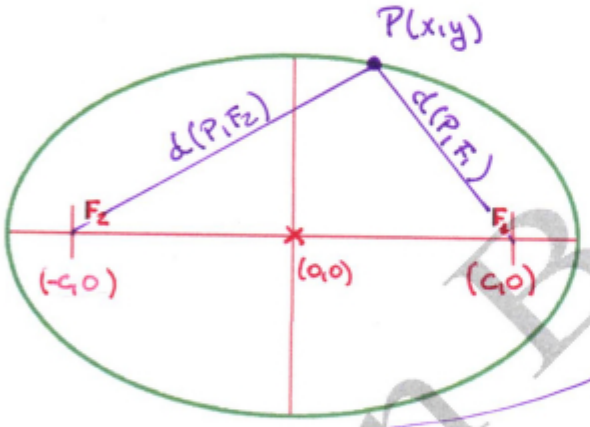
Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(23) Halla la ecuación de la elipse de focos $F_1(4,0)$ y $F_2(-4,0)$ y cuya constante es 10.

Recuerda!! LA ELIPSE

Una ELIPSE es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (a los que se llama FOCOS) es una constante K.



$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = K$$

$$\overrightarrow{F_1P} = (x,y) - (-c,0) = (x+c, y)$$

$$\overrightarrow{F_2P} = (x,y) - (c,0) = (x-c, y)$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = K$$

Ecuación de la elipse con centro en (0,0) y focos sobre el eje X

↳ La ecuación que acabamos de ver se puede operar hasta dejarla de la forma:

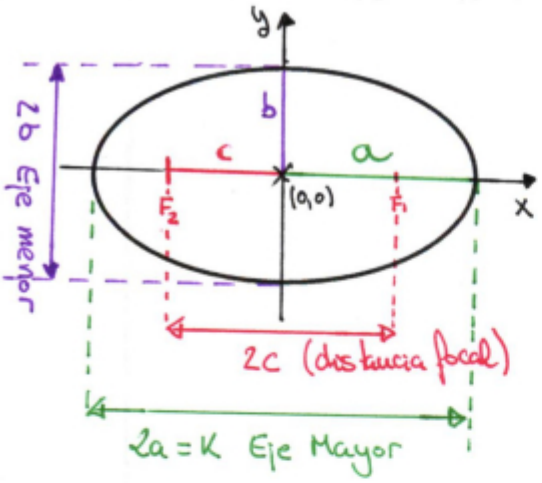
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ECUACIÓN REDUCIDA DE UNA ELIPSE con centro en el (0,0)

En la ecuación reducida aparecen unos valores a y b cuyo significado geométrico veremos a continuación.

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com



a ≡ Semieje Mayor

b ≡ Semieje Menor

2c ≡ distancia focal

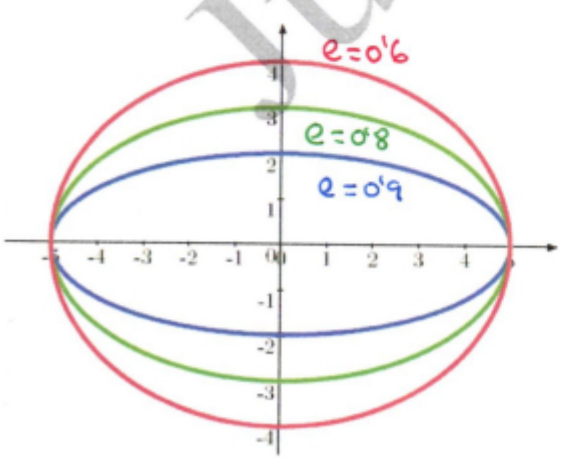
La relación entre estas tres magnitudes nos la da Pitágoras según:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Además de estos parámetros, solemos utilizar también para describir la forma de la elipse otro al que llamamos EXCENTRICIDAD (e), y que se define como:

$$e = \frac{c}{a}$$ EXCENTRICIDAD con $0 \leq e < 1$

Sirve para medir como de "achatada" está la elipse. Cuánto más se aproxime el valor de e a 1, más achatada está la elipse (más separados sus focos)



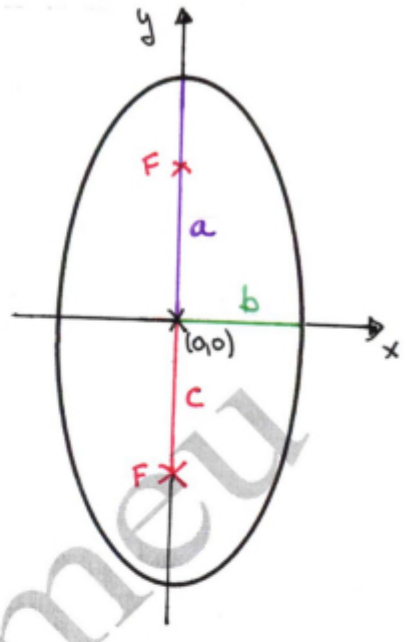
Si la excentricidad "e" fuese cero, significaría que la elipse es en realidad una circunferencia.

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Casos particulares:

- Cuando el semieje vertical sea mayor que el horizontal ($b>a$), los focos estarán situados en el eje Y y la ecuación reducida será de la forma:



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

- Cuando el centro de la elipse no esté en el origen $(0,0)$ y esté en cualquier otro punto $C(x_0,y_0)$, la ecuación reducida de la elipse será:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Tenemos que hallar una elipse sabiendo $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$ y $K=10$. Buscamos el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que la suma de las distancias a F_1 y a F_2 sea la constante $K=10$. Así:

$$\overrightarrow{F_1P}=(x,y)-(4,0)=(x-4,y)\Rightarrow d(P,F_1)=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

$$\overrightarrow{F_2P}=(x,y)-(-4,0)=(x+4,y)\Rightarrow d(P,F_2)=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$d(P_1F_1) + d(P_1F_2) = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-4)^2+y^2} + \sqrt{(x+4)^2+y^2}\right)^2 = (10)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 + 2\cdot\sqrt{(x-4)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+4)^2+y^2} + (x+4)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2\cdot\sqrt{x^2-8x+16+y^2}\cdot\sqrt{x^2+8x+16+y^2} + x^2 + 8x + 16 + y^2 = 100$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 32 + 2\sqrt{x^2-8x+16+y^2}\cdot\sqrt{x^2+8x+16+y^2} = 100$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 16 + \sqrt{x^2-8x+16+y^2}\cdot\sqrt{x^2+8x+16+y^2} = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x^2-8x+16+y^2)(x^2+8x+16+y^2)}\right)^2 = (34 - x^2 - y^2)^2$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^2y^2 - 32x^2 + y^4 + 32y^2 + 256 = x^4 + 2x^2y^2 - 68x^2 + y^4 - 68y^2 + 1156$$

$$\Rightarrow 36x^2 + 100y^2 - 900 = 0 \Rightarrow 36x^2 + 100y^2 = 900 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$$

Como acabamos de ver, llegar a la ecuación de la elipse partiendo de su definición es un proceso bastante largo. Por ello, lo que haremos siempre será

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

calcular las constantes "a" y "b" para rellenar la ecuación reducida. Veámoslo:

- Tenemos $F_1(4,0)$ y $F_2(-4,0)$. Con esto sabemos que la semidistancia focal "c" es $c=4$ y que el centro de la elipse está en $(0,0)$
- Tenemos $K=10$, y sabemos que $K=2a \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10=2a \Rightarrow a=5$$

Para determinar b, usamos Pitágoras:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 5^2=b^2+4^2 \Rightarrow b=3$$

La ecuación que buscamos es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$$

(24) Halla los semiejes mayor y menor, la distancia focal, los vértices, los focos, el centro y la excentricidad de las siguientes elipses. Represéntalas:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

- $(x_0,y_0)=(0,0)$ Centro
- $a^2=25 \Rightarrow a=5$ Semieje Mayor
- $b^2=16 \Rightarrow b=4$ Semieje Menor.

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + c^2 \Rightarrow c = 3$ Semidistancia focal

$\Rightarrow 2c = 6$ Distancia focal.

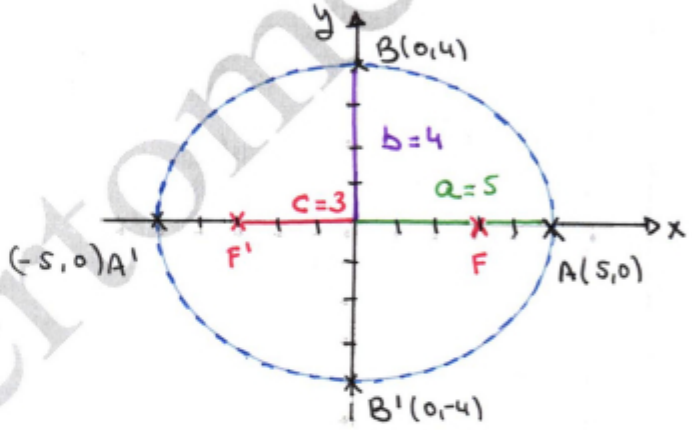
Como $a = 5 \longrightarrow A(5,0)$ y $A'(-5,0)$ Vértices Mayores

Como $b = 4 \longrightarrow B(0,4)$ y $B'(0,-4)$ Vértices Menores

Como $c = 3 \longrightarrow F_1(3,0)$ y $F_2(-3,0)$ Focos

Por último, la excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0'6$$



b) $3x^2 + 6y^2 = 12$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$(x_0, y_0) = (0,0)$ Centro

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ Semieje Mayor $\longrightarrow A(2,0)\ A'(-2,0)$

$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$ Semieje Menor $\longrightarrow B(0,\sqrt{2})\ B'(0,-\sqrt{2})$

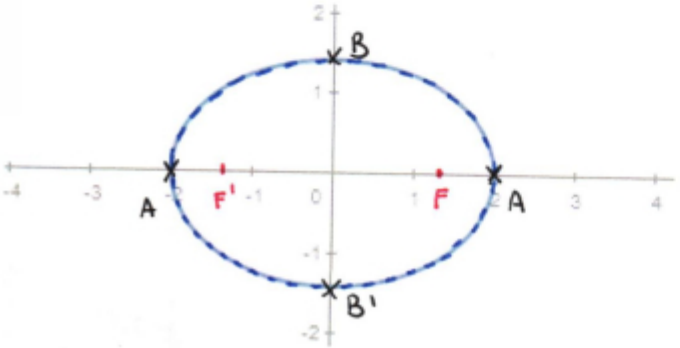
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \sqrt{4-2} = \sqrt{2} \longrightarrow F_1(\sqrt{2},0)$ y $F_2(-\sqrt{2},0)$

$2c = 2\sqrt{2}$ distancia focal

Por último, la excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0'71$$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

c) $x^2 + 4(y-3)^2 = 4$

$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$

$(x_0, y_0) = (0,3) \rightarrow$ Centro

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \rightarrow$ Semieje Mayor

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \rightarrow$ Semieje Menor

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \Rightarrow 2c = 2\sqrt{3} \rightarrow$ Distancia focal

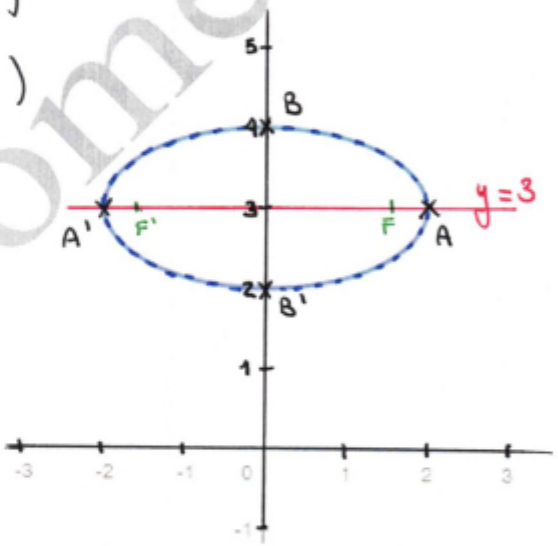
$\Rightarrow$ El eje mayor de esta elipse es la recta $y = 3$

Vértices Mayores $\rightarrow$ $A(2,3)$ y $A'(-2,3)$

Vértices Menores $\rightarrow$ $B(0,4)$ y $B'(0,2)$

Focos $\rightarrow$ $F(\sqrt{3},3)$ y $F'(-\sqrt{3},3)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0'86$



d) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$

$(x_0, y_0) = (3,7)$ Centro

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$

Como $b > a$ los focos los situaremos sobre el eje vertical

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

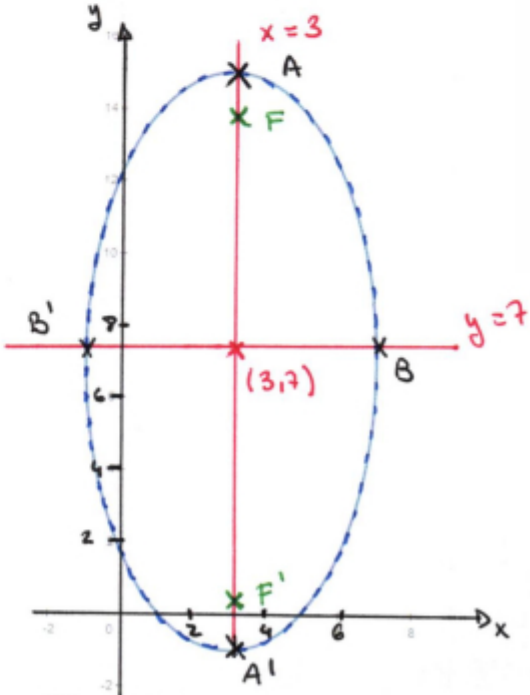
$2c = 8\sqrt{3} \rightarrow$ Distancia focal

$A(3,15)$ $A'(3,-1)$

$B(7,7)$ $B'(-1,7)$

$F(3,7+4\sqrt{3})$ $F'(3,7-4\sqrt{3})$

$e = \frac{c}{b} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0'86$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(25) Escribe las ecuaciones de la elipse que verifica las siguientes condiciones:

a) Centrada en el origen, semieje mayor 10 y distancia focal 12.

$2c = 12 \Rightarrow c = 6$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10^2 = b^2 + 6^2 \Rightarrow b = 8$

$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1}$

b) Centrada en el origen, excentricidad $e = 0'4$ y semidistancia focal 2.

$c = 2 \;;\; e = \frac{c}{a} \Rightarrow 0'4 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 5$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = b^2 + 2^2 \Rightarrow b = \sqrt{21}$

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{21})^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1}$

c) Con focos $F(0,2)$ y $F'(0,-2)$ y vértices $A(0,3)$ y $A'(0,-3)$

Los focos están sobre el eje Y!! $\Rightarrow$ El eje vertical será el mayor

$c = 2$ y $a = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = b^2 + 4 \Rightarrow b = \sqrt{5}$

$\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1}$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

d) Que pasa por los puntos $P(1,-1)$ y $Q(0,-4)$, y centro $(0,0)$

La ecuación reducida es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,-1) \longrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ Q(0,-4) \longrightarrow \frac{16}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \; b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{15}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{15/16} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{16x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \boxed{16x^2 + 15y^2 = 240}$$

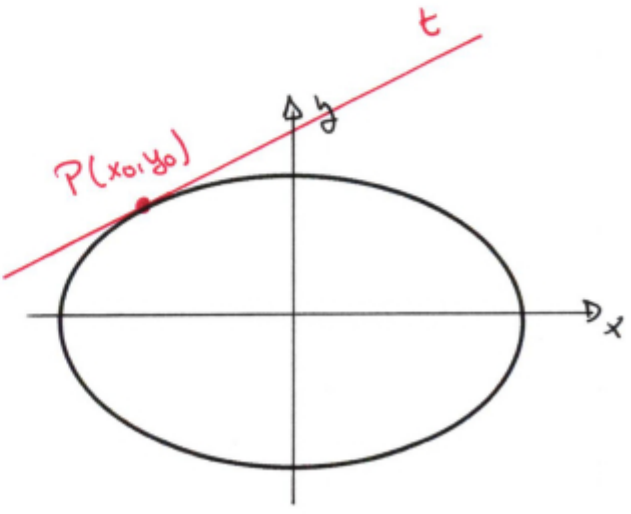
(26) Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ trazada por el punto $P(4,1)$ de la misma.

Recuerda!! RECTA TANGENTE A LA ELIPSE

La ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ trazada por un punto $P(x_0, y_0)$ de la misma viene dada por

$$t: \frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$$

Lo podremos justificar cuando expliquemos derivación implícita y aplicaciones de la derivada (2º de Bachillerato!!)



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad P(x_0, y_0) = (4, 1)$

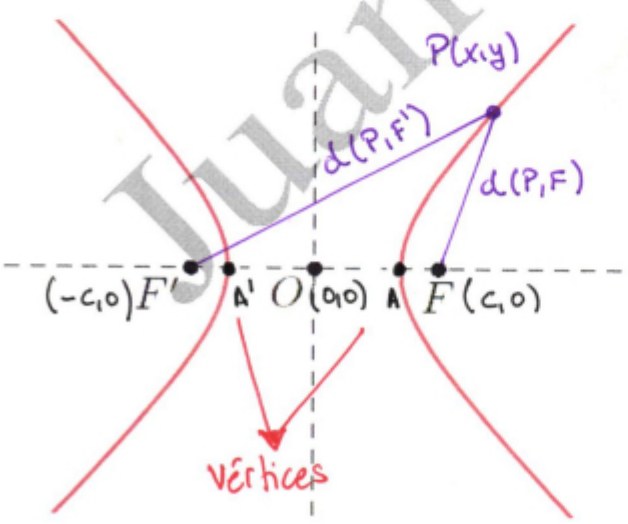
$\Rightarrow t: \frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4x}{18} + \frac{y}{9} = 1 \Rightarrow 4x + 2y = 18$

$\Rightarrow \boxed{t: 2x + y - 9 = 0}$

(27) Halla el eje mayor, el eje menor, los vértices y los focos de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

¡Recuerda! LA HIPÉRBOLA

Una HIPERBOLA es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano tales que la diferencia en valor absoluto de sus distancias a dos puntos fijos F y F' (a los que se llama FOCOS) es una constante K.



$|d(P,F) - d(P,F')| = K$

$\overrightarrow{FP} = (x,y) - (c,0) = (x-c, y)$

$\overrightarrow{F'P} = (x,y) - (-c,0) = (x+c, y)$

$$\boxed{\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = K}$$

Ecuación de la hipérbola con centro en (0,0) y focos sobre el eje X.

Juan Bertomeu

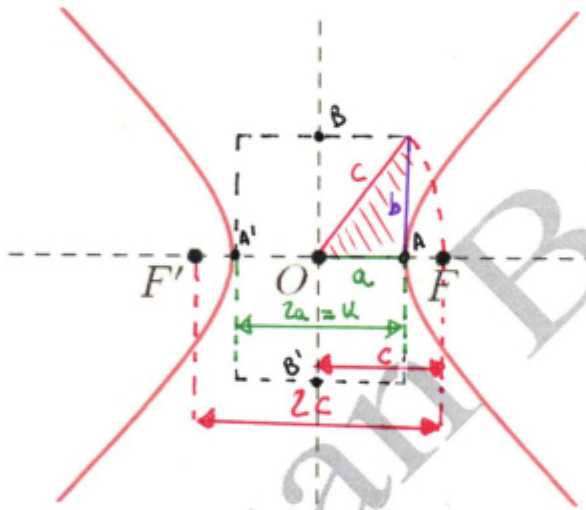
©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

La ecuación que acabamos de ver se puede operar hasta dejarla de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ECUACIÓN REDUCIDA DE UNA HIPÉRBOLA con centro en el (0,0)

De nuevo, al igual que en la elipse, al reducir la ecuación aparecen valores "a" y "b". Veamos su significado geométrico:



a ≡ Semieje Mayor (real) → 2a = K

b ≡ Semieje Menor (imaginario)

2c ≡ Distancia focal

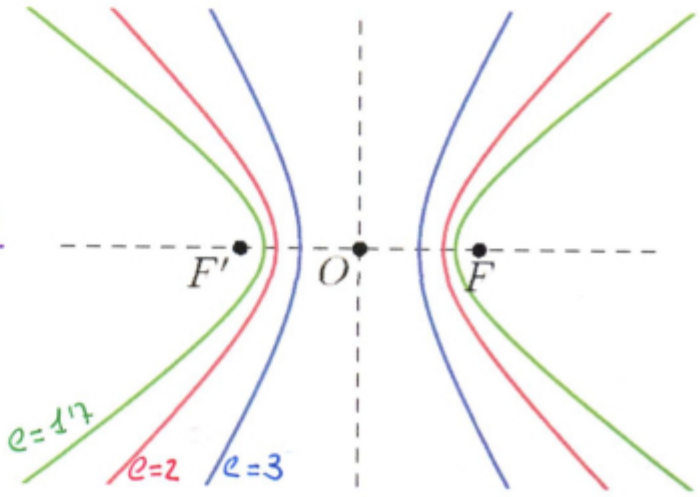
La relación entre estas tres magnitudes nos la da Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

La EXCENTRICIDAD (e) la seguimos calculando con:

$$e = \frac{c}{a}$$, y será siempre $e > 1$

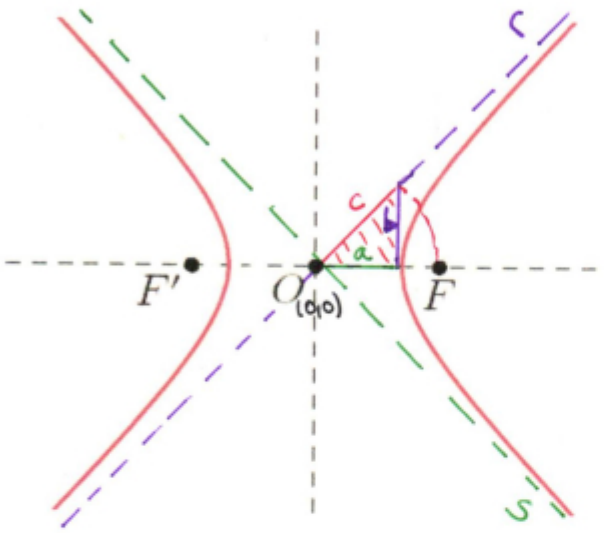
cuanto mayor sea la excentricidad más "planas" son las curvas de la hipérbola.



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

Otra característica importante de las hipérbolas son sus ASÍNTOTAS, que son dos rectas entre las que se encuentra la hipérbola:



Las ecuaciones de estas rectas son

$$r: y = \frac{b}{a} \cdot x$$

$$s: y = \frac{-b}{a} \cdot x$$

Asíntotas de la hipérbola con focos en el eje horizontal y centro (0,0)

Casos particulares:

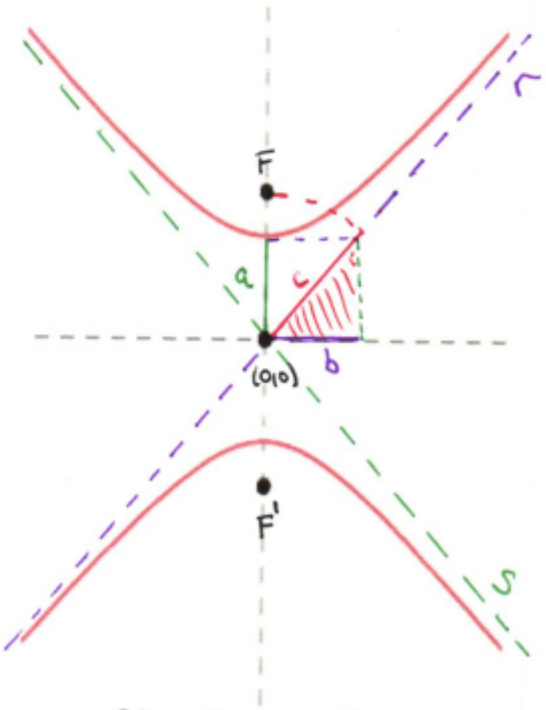
- Cuando tengamos los focos situados en el eje Y, la ecuación reducida queda de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

y por tanto, las asíntotas serán:

$$r: y = \frac{a}{b} x$$

$$s: y = \frac{-a}{b} x$$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

- Cuando el centro de la hipérbola no esté en el origen $(0,0)$ y esté en cualquier otro punto $C(x_0, y_0)$, la ecuación reducida de la hipérbola será:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

con asíntotas $\begin{cases} r: y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \\ s: y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) \end{cases}$

Tenemos la ecuación de una hipérbola dada por $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

Por tanto:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ → Eje Mayor $= 2a = 10$ (Eje real)
→ $A(5,0)$ $A'(-5,0)$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ → Eje Menor $= 2b = 8$ (Eje Imaginario)
→ $B(0,4)$ $B'(0,-4)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow c = \sqrt{41}$ → Distancia focal $= 2c = 2\sqrt{41}$
→ $F(\sqrt{41}, 0)$ $F'(-\sqrt{41}, 0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5} = 1'28$$

Asíntotas → $\begin{cases} r: y = \frac{4}{5}x \\ s: y = -\frac{4}{5}x \end{cases}$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(28) Halla los elementos característicos de la hipérbola de ecuación $3x^2 - 6y^2 = 12$

$$3x^2 - 6y^2 = 12 \Rightarrow \frac{3x^2}{12} - \frac{6y^2}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ → Eje Mayor (o real) $= 2a = 4$
→ Vértices $A(2,0)$ y $A'(-2,0)$

$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$ → Eje menor (o imaginario) $= 2b = 2\sqrt{2}$
→ $B(0,\sqrt{2})$ $B'(0,-\sqrt{2})$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$ → Distancia focal $= 2c = 2\sqrt{6}$
→ $F(\sqrt{6},0)$ $F'(-\sqrt{6},0)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} = 1'22$

Asíntotas → $r: y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$; $s: y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

(29) Halla los elementos característicos y representa las hipérbolas siguientes:

a) $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

Centro → $C(-5,2)$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ → Eje Mayor $= 2a = 8$
→ Vértices $A(-1,2)$ $A'(-9,2)$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \rightarrow$ Eje Menor $= 2b = 4$

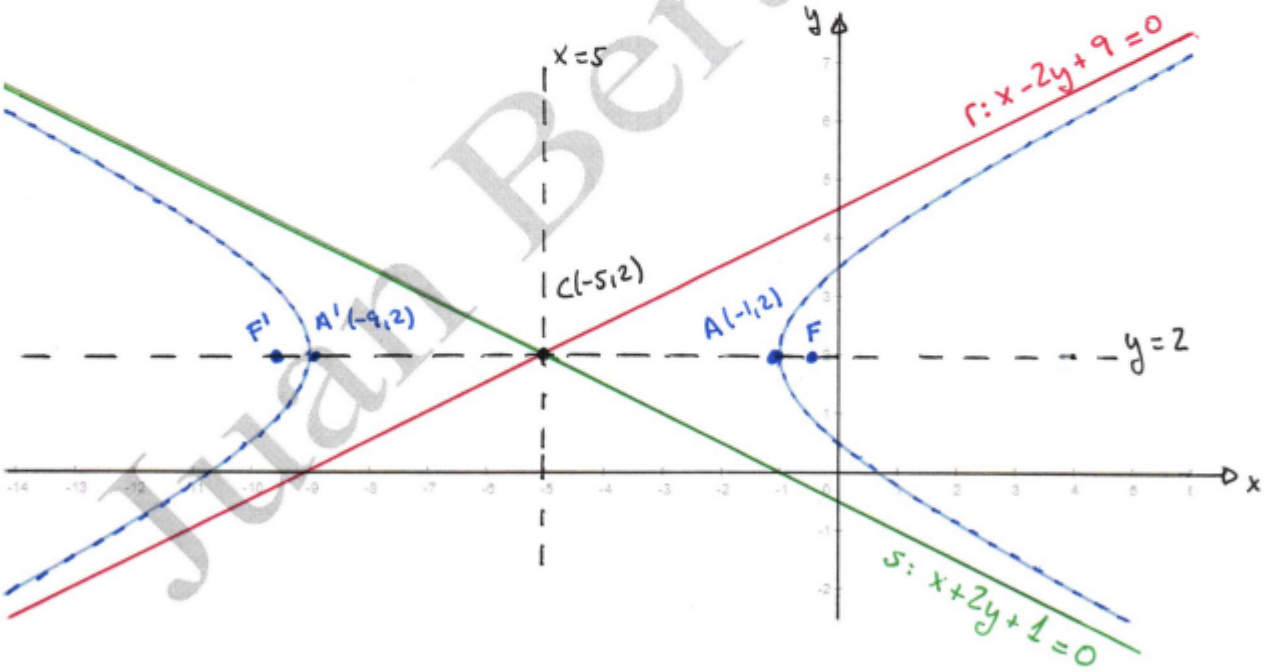
$\rightarrow B(-5,4)\quad B'(-5,0)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 20 \Rightarrow c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \rightarrow$ Distancia focal $= 2c = 4\sqrt{5}$

$\rightarrow F(-5+2\sqrt{5}, 2)\quad F'(-5-2\sqrt{5}, 2)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4} \approx 1'12$ Asíntotas $\rightarrow \begin{cases} r: y-2 = \frac{1}{2}(x+5) \\ s: y-2 = -\frac{1}{2}(x+5) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} r: 2y-4 = x+5 \\ s: 2y-4 = -x-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r: x-2y+9 = 0 \\ s: x+2y+1 = 0 \end{cases}$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

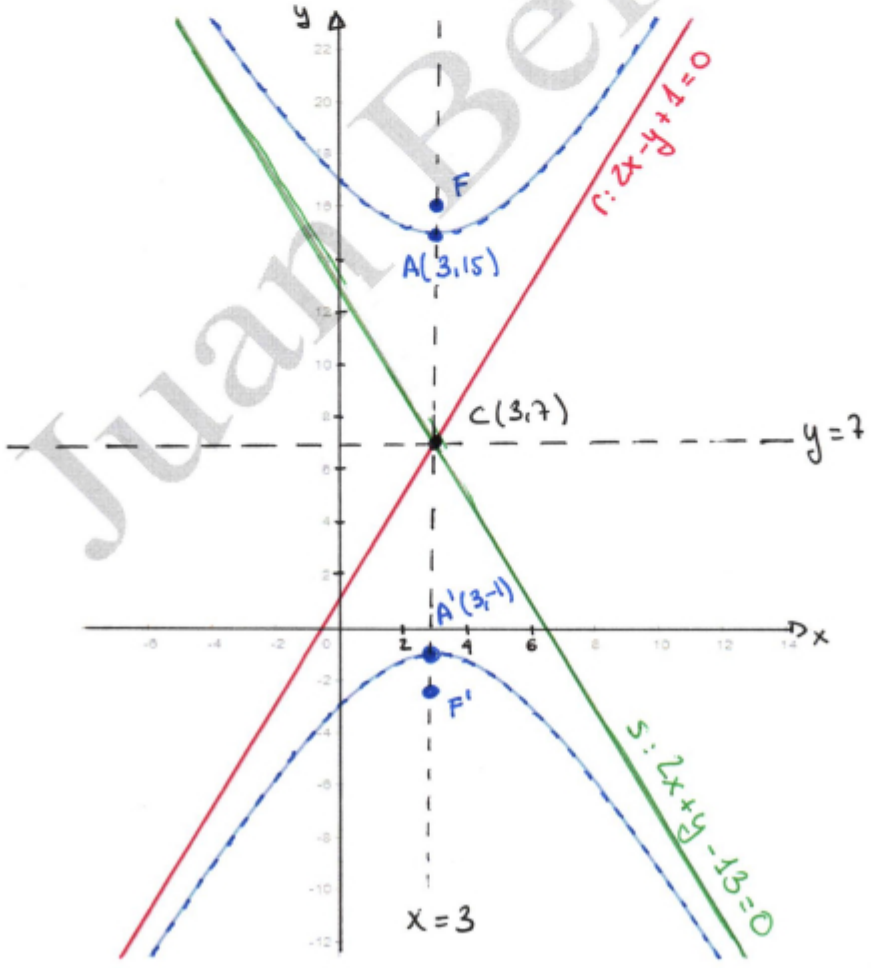
b) $\frac{(y-7)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$ → Ojo!! Tendremos el eje mayor en vertical !!

Centro $(3,7)$; $a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$ → Eje Mayor $= 2a = 16$
→ Vértices $A(3,15)$ $A'(3,-1)$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ → Eje Menor $= 2b = 8$ → $B(7,7)$ $B'(-1,7)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 80 \Rightarrow c = 4\sqrt{5}$ → Distancia focal $= 2c = 8\sqrt{5}$
→ $F(3, 7+4\sqrt{5})$ $F'(3, 7-4\sqrt{5})$

$e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{5}}{8} \approx 1'12$; Asíntotas →
$r: y-7 = 2(x-3) \rightarrow r: 2x - y + 1 = 0$
$s: y-7 = -2(x-3) \rightarrow s: 2x + y - 13 = 0$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(30) Escribe las ecuaciones de las hipérbolas que verifiquen las siguientes condiciones:

a) Centrada en el origen, de eje real 20 y distancia focal 32.

Centro $(x_0, y_0) \longrightarrow C(0,0)$

Eje real $= 2a \Rightarrow 20 = 2a \Rightarrow a = 10$

Distancia focal $= 2c \Rightarrow 32 = 2c \Rightarrow c = 16$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16^2 = 10^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{156}$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{156} = 1}$$

b) Centrada en el origen, excentricidad 1'4 y semidistancia focal 7.

Centro $(x_0, y_0) \longrightarrow C(0,0)$

$e = 1'4 \Rightarrow e = \frac{c}{a} \Rightarrow 1'4 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 1'4a \Rightarrow a = \frac{c}{1'4} = 5$

Semidistancia focal $= c \Rightarrow c = 7$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 7^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{24}$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) Centrada en el origen, de eje real 10 y que pasa por el punto $P(3\sqrt{5}, -2)$.

Centro $(x_0, y_0) \rightarrow C(0,0)$

Eje real $= 2a \Rightarrow 10 = 2a \Rightarrow a = 5$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

El punto $P(3\sqrt{5}, -2)$ debe verificar la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{(3\sqrt{5})^2}{25} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{45}{25} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{5} - \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9b^2 - 20}{5b^2} = 1 \Rightarrow 9b^2 - 20 = 5b^2 \Rightarrow 4b^2 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

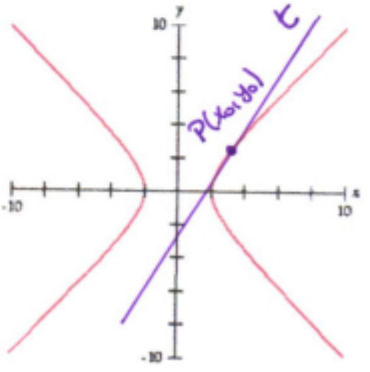
$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{5} = 1}$$

(31) Halla la ecuación de la recta tangente a la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9/4} = 1$ trazada por el punto $P(5,6)$ de la misma

¡¡Recuerda!! RECTA TANGENTE A LA HIPÉRBOLA:

La ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ trazada por un punto $P(x_0, y_0)$ de la misma es:

$$t: \frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

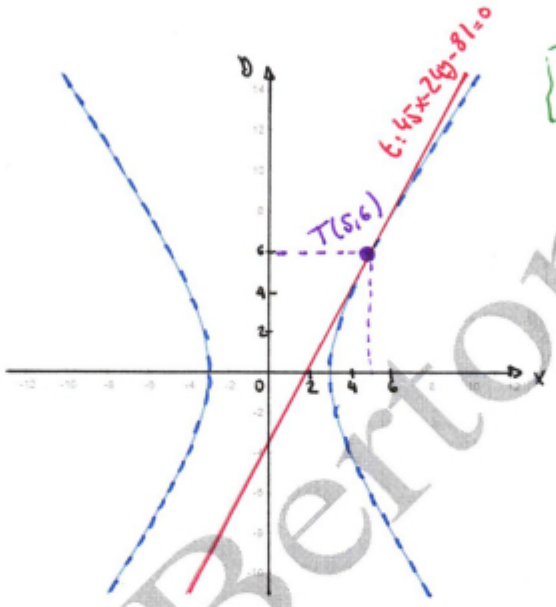
$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{81/4} = 1 \qquad P(5,6)$

$\Rightarrow t: \frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{5x}{9} - \frac{6y}{81/4} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5x}{9} - \frac{24y}{81} = 1 \Rightarrow \frac{45x - 24y}{81} = 1 \Rightarrow$ $t: 45x - 24y - 81 = 0$

⇓ Simplificando

$t: 15x - 8y - 27 = 0$



(32) Halla la ecuación de la recta tangente a la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ que pasa por el punto $P(0,6)$ que no pertenece a dicha hipérbola. Representa gráficamente el ejercicio y calcula además el punto de tangencia.

La ecuación de la recta tangente que estamos buscando es de la forma:

$t: \frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_0 \cdot x}{4} - \frac{y_0 \cdot y}{2} = 1$ siendo $T(x_0, y_0)$ el punto de tangencia.

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

El punto $P(0,6)$ pertenece a dicha recta "t". Por tanto:

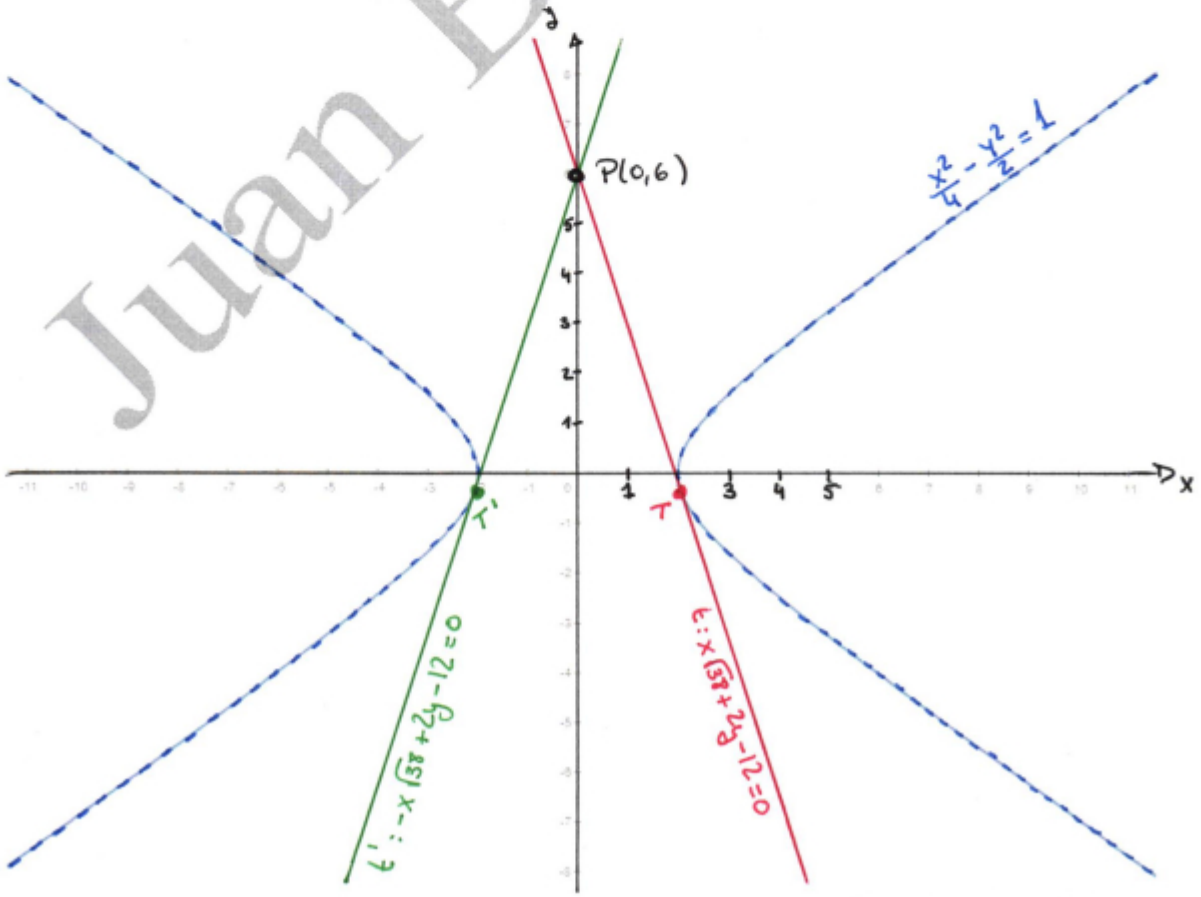
$$\frac{x_0 \cdot 0}{4} - \frac{y_0 \cdot 6}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = -1/3$$

El punto de tangencia $T(x_0, y_0) = (x_0, -1/3)$ pertenece a la hipérbola. Por tanto:

$$\frac{x_0^2}{4} - \frac{(-1/3)^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x_0^2}{4} - \frac{1}{18} = 1 \Rightarrow x_0^2 = \frac{38}{9} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = +\frac{\sqrt{38}}{3} \\ x_0 = -\frac{\sqrt{38}}{3} \end{cases}$$

$T\left(\frac{\sqrt{38}}{3}, -\frac{1}{3}\right) \rightarrow t: \frac{\sqrt{38}/3 \cdot x}{4} - \frac{(-1/3)\cdot y}{2} = 1 \Rightarrow t: \sqrt{38}\cdot x + 2y - 12 = 0$

$T'\left(-\frac{\sqrt{38}}{3}, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow t': -\frac{\sqrt{38}/3 \cdot x}{4} - \frac{(-1/3)\cdot y}{2} = 1 \Rightarrow t': -\sqrt{38}\,x + 2y - 12 = 0$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(33) Halla la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $4x^2 - y^2 = 20$ en el punto de ordenada 4 y abcisa positiva.

$T(x_0, y_0) = (x_0, 4) \Rightarrow 4 \cdot x_0^2 - 4^2 = 20 \Rightarrow x_0^2 = 9 \nearrow x_0 = +3$

$\searrow$ ~~$x_0 = -3$~~ Abcisa positiva!!

$\Rightarrow T(x_0, y_0) = (3, 4)$

$4x^2 - y^2 = 20 \Rightarrow \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$

$t: \frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{5} - \frac{4y}{20} = 1 \Rightarrow$ $t: 12x - 4y - 20 = 0$

$\Downarrow$ Simplificando

$t: 3x - y - 5 = 0$

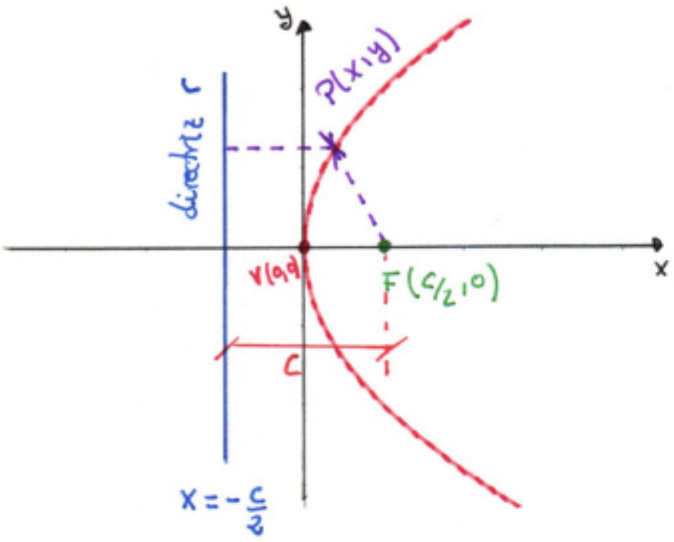
(34) Calcular la ecuación de la parábola con foco $F(2,0)$ y directriz $r: x = -2$

Recuerda!! LA PARÁBOLA

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano que equidistan de una recta "r" llamada directriz y un punto F, que es el Foco de la parábola.

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com



$$d(P,r) = d(F,P)$$

$$\vec{FP} = (x,y) - (c/2,0) = (x - c/2, y)$$

$$|\vec{FP}| = \sqrt{(x-c/2)^2 + y^2}$$

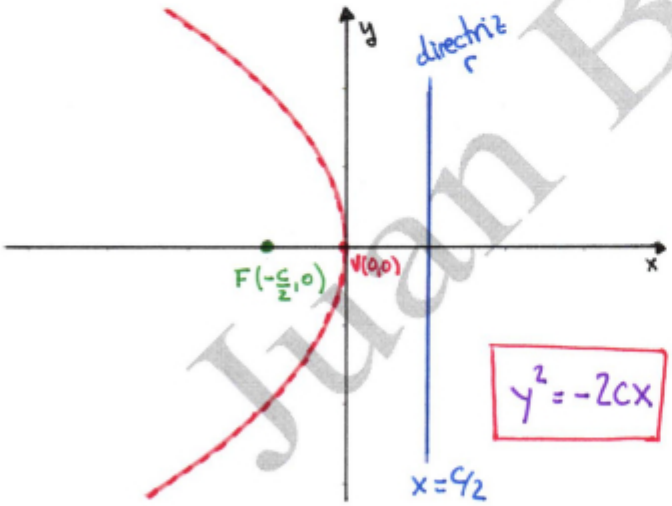
$$d(P,r) = x + \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-\tfrac{c}{2})^2 + y^2}\right)^2 = \left(x + \tfrac{c}{2}\right)^2$$

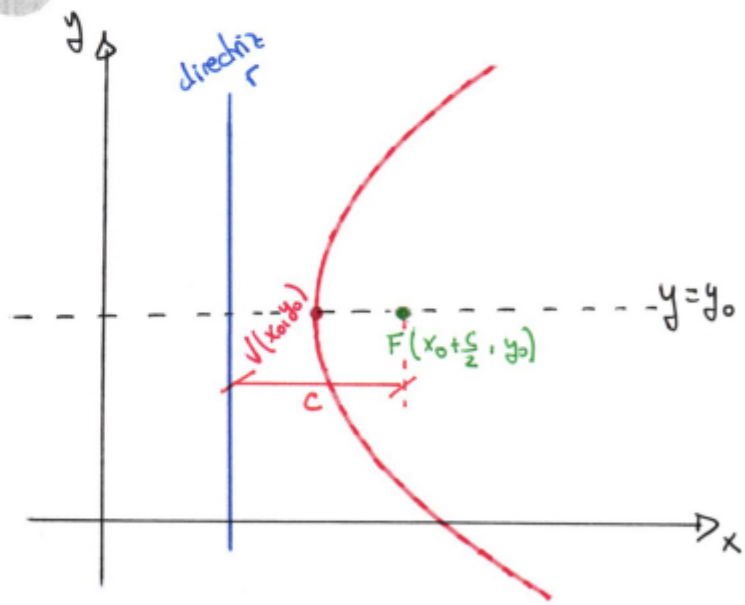
$$\Rightarrow \cancel{x^2} - xc + \cancel{\frac{c}{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + xc + \cancel{\frac{c}{4}} \Rightarrow \boxed{y^2 = 2cx}$$

Ecuación reducida de la parábola con vértice en (0,0) y foco sobre eje horizontal.

Casos particulares:



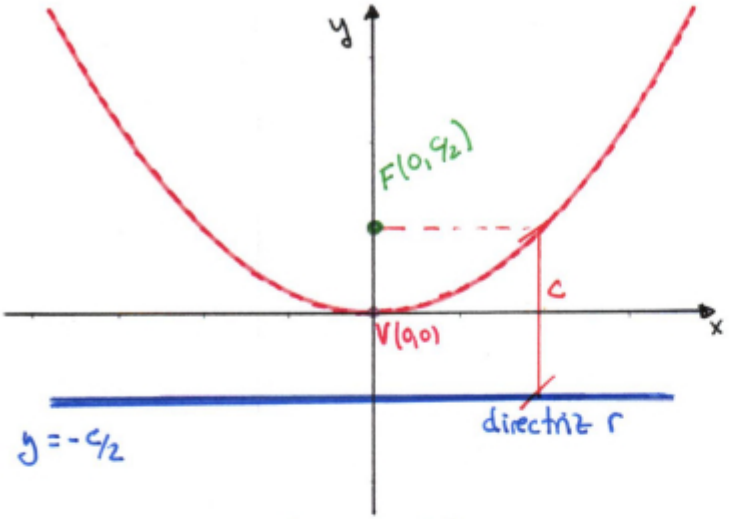
$$y^2 = -2cx$$



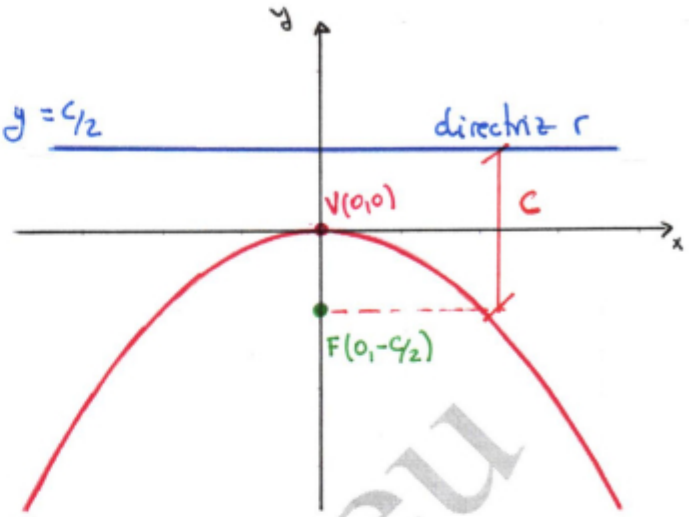
$$(y-y_0)^2 = 2c(x-x_0)$$

Juan Bertomeu

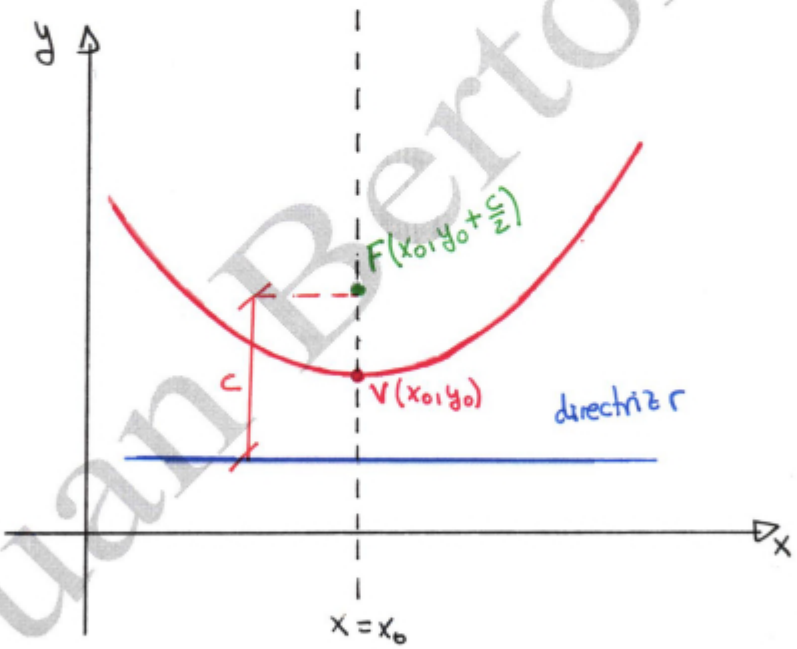
©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com



$$x^2 = 2cy$$



$$x^2 = -2cy$$



$$(x - x_0)^2 = 2c\,(y - y_0)$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Tenemos una parábola con foco en el eje X y directriz $x=-2$

La distancia "c" del foco a la directriz será $c=4$ y por tanto la parábola que buscamos será:

$$y^2 = 2cx \Rightarrow \boxed{y^2 = 8x}$$

(35) Calcula el foco y la directriz de las siguientes parábolas:

a) $x^2 = 4y$

$x^2 = 2cy \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$ → $F(0,1)$; $r: y = -1$

b) $y^2 + 10x = 0$

$y^2 = -10x$

$y^2 = -2cx \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5$ → $F(-5/2, 0)$; $r: x = 5/2$

c) $x = -\frac{1}{9}y^2$

$y^2 = -9x$

$y^2 = -2cx \Rightarrow 2c = 9 \Rightarrow c = 9/2$ → $F(-9/4, 0)$; $r: x = \frac{9}{4}$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(36) Halla la ecuación de la parábola de eje paralelo al eje de abcisas, que su vértice es $V(+1,-2)$ y que pasa por el punto $P(4,1)$

Parábola con eje horizontal y vértice $V(x_0,y_0) \Rightarrow (y-y_0)^2 = 2c(x-x_0)$

$(y+2)^2 = 2c(x-1)$

Como pasa por $P(4,1) \Rightarrow (1+2)^2 = 2c(4-1) \Rightarrow 2c = \frac{3^2}{3} = 3$

$$\Rightarrow \boxed{(y+2)^2 = 3(x-1)}$$

(37) Determina la ecuación de la parábola con vértice $(0,0)$, eje vertical y que pasa por $P(-3,3)$

Parábola con eje vertical y vértice $V(0,0) \Rightarrow x^2 = 2cy$

Como pasa por $P(-3,3) \Rightarrow 9 = 2c \cdot 3 \Rightarrow 2c = 3$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 = 3y}$$

(38) Encontrar las coordenadas del vértice, el foco, y la ecuación de la directriz de cada una de las siguientes parábolas:

a) $y^2 = 2x$

$y^2 = 2cx \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1$

$\rightarrow V(0,0)$

$\rightarrow F(1/2, 0)$

$\rightarrow r: x = -1/2$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

b) $y^2 = -9(x-4)$

$(y-y_0)^2 = -2c(x-x_0)$

$\rightarrow V(4,0)$

$\rightarrow 2c = 9 \Rightarrow c = \frac{9}{2}$

$\rightarrow F\left(4-\frac{9}{4},0\right) = \left(\frac{7}{4},0\right)$

$\rightarrow r: x = \frac{7}{4} + \frac{9}{2} = \frac{25}{4}$

c) $(y+5)^2 = \frac{4}{3}(x-6)$

$(y-y_0)^2 = 2c(x-x_0)$

$\rightarrow V(6,-5)$

$\rightarrow 2c = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{2}{3}$

$\rightarrow F\left(6+\frac{1}{3},-5\right) = \left(\frac{19}{3},-5\right)$

$\rightarrow r: x = \frac{19}{3} - \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$

d) $x^2 = -4y$

$x^2 = -2cy$

$\rightarrow V(0,0)$

$\rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$

$\rightarrow F(0,-1)$

$\rightarrow r: y = 1$

e) $x^2 = -4(y-2)$

$(x-x_0)^2 = -4(y-y_0)$

$\rightarrow V(0,2)$

$\rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$

$\rightarrow F(0,2-1) = (0,1)$

$\rightarrow r: y = 2+1 = 3$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

f) $(x+1)^2 = 12(y-4)$

$(x-x_0)^2 = 2c(y-y_0)$

↳ $V(-1,4)$

↳ $2c = 12 \Rightarrow c = 6$ → $F(-1, 4+3) = (-1,7)$

→ $r: y = 4-3 = 1$

(39) Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 10x$ trazada por el punto $P(10,10)$ de la misma.

Representa el ejercicio.

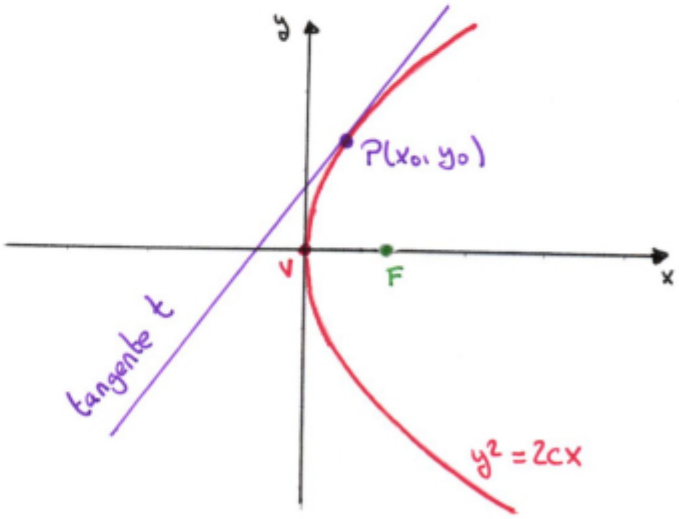
Recuerda!! RECTA TANGENTE A LA PARÁBOLA:

La ecuación de la recta tangente a la parábola de ecuación $y^2 = 2cx$ trazada por un punto $P(x_0, y_0)$ de la misma es:

$$t: y_0 \cdot y = cx + cx_0$$

Si la parábola es de eje vertical de ecuación $x^2 = 2cy$ usaremos

$$t: x_0 x = cy + c \cdot y_0$$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

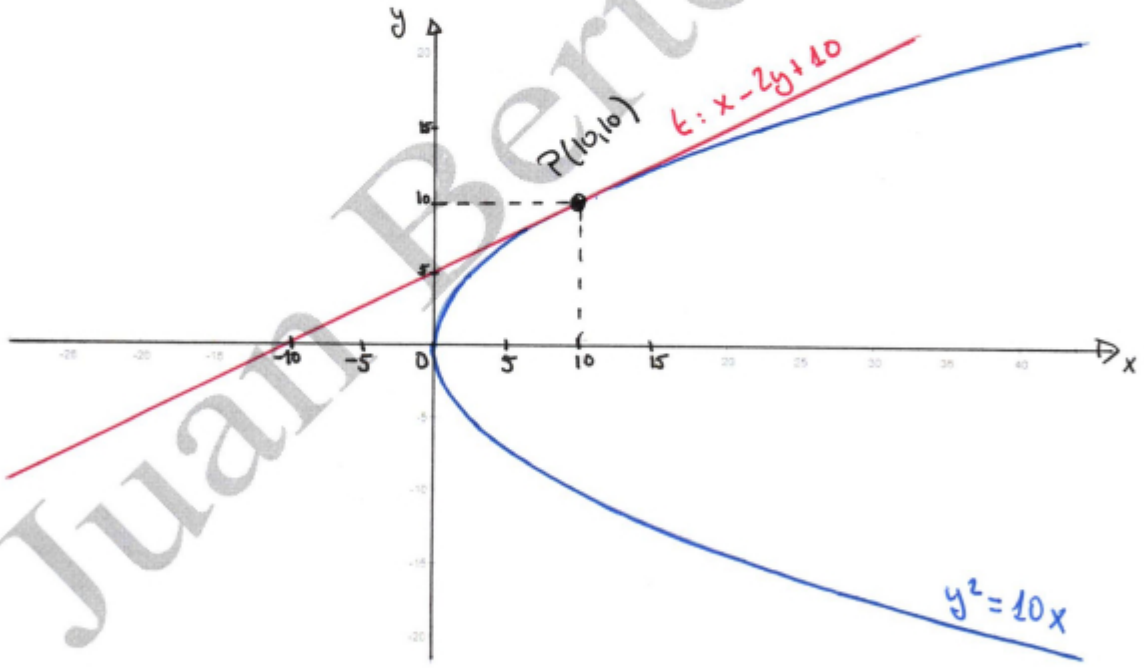
Tenemos una parábola de ecuación $y^2 = 10x$ que se corresponde con una parábola tipo $y^2 = 2cx$

$$2c = 10 \Rightarrow c = 5$$

La recta tangente viene dada por:

$t: y_0 \cdot y = cx + cx_0$ siendo $(x_0, y_0) = (10, 10)$ el punto P de tangencia. Por tanto:

$$t: 10y = 5x + 5 \cdot 10 \Rightarrow 5x - 10y + 50 = 0 \Rightarrow \boxed{t: x - 2y + 10 = 0}$$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(40) Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(-8,1)$ y son tangentes a la parábola de ecuación $y^2 = 14x$. Representa el ejercicio.

Tenemos una parábola de ecuación $y^2 = 14x$ que se corresponde con una parábola tipo $y^2 = 2cx$

$$2c = 14 \Rightarrow c = 7$$

La recta tangente viene dada por:

$t: y_0 \cdot y = cx + cx_0$ donde (x_0, y_0) representa el punto T de tangencia que es desconocido en este caso.

La ecuación del HAZ DE RECTAS que por $P(-8,1)$ será:

$$y - y_p = m(x - x_p) \Rightarrow y - 1 = m(x+8)$$

$$\text{Haz: } mx - y + 8m + 1 = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 14x \\ mx - y + 8m + 1 = 0 \rightarrow y = mx + 8m + 1 \end{array}\right\} \longrightarrow (mx + 8m + 1)^2 = 14x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2x^2 + 16m^2x + 64m^2 + 2mx + 16m + 1 = 14x \Rightarrow$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\Rightarrow \underbrace{m^2}_{a}x^2 + \underbrace{(16m^2+2m-14)}_{b}x + \underbrace{64m^2+16m+1}_{c} = 0$$

Tenemos una ecuación $ax^2+bx+c=0$ y como nos interesan solo las rectas del haz que sean tangentes a la parábola, dicha ecuación tiene que tener solo una solución (porque cuando la recta es tangente, solo tiene un punto en común con la parábola). Para que eso suceda:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

→ Esto nos tiene que dar 0 para que solo haya una solución!!

Por todo lo expuesto:

$$b^2-4ac=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (16m^2+2m-14)^2 - 4m^2(64m^2+16m+1) = 0$$

$$\Rightarrow 256m^4+64m^3-444m^2-56m+196-256m^4-64m^3-4m^2=0$$

$$\Rightarrow -448m^2-56m+196=0 \Rightarrow 8m^2+m-\frac{7}{2}=0$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+112}}{16} = \frac{-1 \pm \sqrt{113}}{16}$$

$$m_1 = \frac{-1+\sqrt{113}}{16}$$

$$m_2 = \frac{-1-\sqrt{113}}{16}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

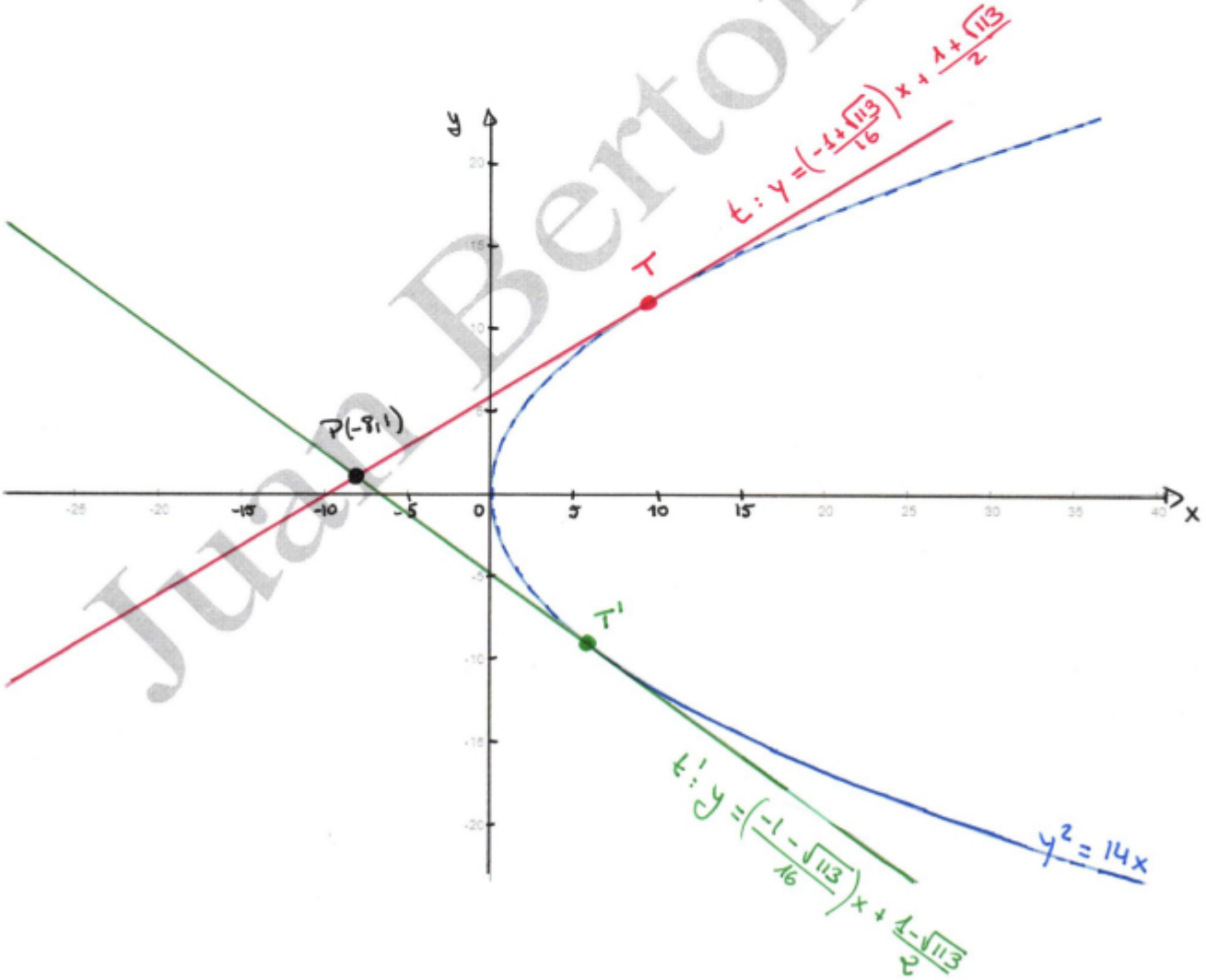
Con lo que, de todas las rectas del haz de ecuación

$$\text{Haz}: mx - y + 8m + 1 = 0 \Rightarrow \text{Haz}: y = mx + 8m + 1$$

son tangentes a la parábola:

$m_1 \rightarrow t: y = \left(-\frac{1+\sqrt{113}}{16}\right)x + -\frac{1+\sqrt{113}}{2} + 1 \Rightarrow \boxed{t: y = \left(-\frac{1+\sqrt{113}}{16}\right)x + \frac{1+\sqrt{113}}{2}}$

$m_2 \rightarrow t': y = \left(-\frac{1-\sqrt{113}}{16}\right)x + -\frac{1-\sqrt{113}}{2} + 1 \Rightarrow \boxed{t': y = \left(-\frac{1-\sqrt{113}}{16}\right)x + \frac{1-\sqrt{113}}{2}}$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(41) Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las cónicas de ecuación:

a) $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0$

b) $x^2-4y^2-2x-3=0$

c) $x^2+9y^2-36y+27=0$

d) $y^2-12y-8x+20=0$

¡¡Recuerda!! EXPRESIÓN GENERAL DE LAS CÓNICAS

La ecuación con coeficientes en x^2, y^2, x e y dada por:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

corresponde a una de las cónicas (circunferencia, elipse, hipérbola o parábola) estudiadas. Para llegar a su ecuación reducida, se agrupan cuadrados.

a) $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 9x^2-36x=(3x-6)^2-36 \\ 16y^2+96y=(4y+12)^2-144 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x-6)^2-\cancel{36}+(4y+12)^2-144+\cancel{36}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [3(x-2)]^2+[4(y+3)]^2=144 \Rightarrow$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

$\Rightarrow \quad 9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$

$\Rightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

Como vemos, se trata de la ecuación de una elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ con las siguientes características:

Centro $C(x_0, y_0) \Rightarrow C(2, -3)$

$a^2 = 16 \longrightarrow a = 4 \Rightarrow A(6, -3) \quad A'(-2, -3)$

$b^2 = 9 \longrightarrow b = 3 \Rightarrow B(2, 0) \quad B'(2, -6)$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = 9 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{7} \Rightarrow F(2+\sqrt{7}, -3) \quad F'(2-\sqrt{7}, -3)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0'66$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \\ -4y^2 = -4y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 - 4y^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 4y^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

Como vemos, se trata de la ecuación de una hipérbola $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ con las siguientes características:

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

Centro $C(x_0, y_0) \Longrightarrow C(1,0)$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \longrightarrow A(3,0)\ A'(-1,0)$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

$c^2 = a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5} \longrightarrow F(1+\sqrt{5},0)$ y $F'(1-\sqrt{5},0)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1'12$

c) $x^2 + 9y^2 - 36y + 27 = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = x^2 \\ 9y^2 - 36y = (3y-6)^2 - 36 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 + (3y-6)^2 - 36 + 27 = 0 \Rightarrow x^2 + [3(y-2)]^2 = 9$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$, que se trata de una elipse con las siguientes características:

Centro $C(x_0, y_0) \Rightarrow C(0,2)$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \longrightarrow A(3,2)\ A'(-3,2)$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \longrightarrow B(0,3)\ B'(0,1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 1 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \rightarrow F(2\sqrt{2},2)\ F'(-2\sqrt{2},2)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0'943$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

d) $y^2-12y-8x+20=0 \Rightarrow$

$y^2-12y=(y-6)^2-36 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-6)^2-36-8x+20 \Rightarrow (y-6)^2=8x+16 \Rightarrow (y-6)^2=8(x+2)$

Como vemos, se trata de la ecuación de una parábola $(y-y_0)^2=2c(x-x_0)$ con las siguientes características:

Vértice $V(x_0,y_0) \Rightarrow V(-2,6)$

$2c=8 \Rightarrow c=4$ → $F(-2+2,6)=(0,6)$

→ Directriz $r: x=0-4 \Rightarrow r: x=-4$

(42) Dadas las siguientes cónicas, obten su ecuación reducida y represéntalas indicando sus elementos característicos.

a) $x^2-2y+2=0$

$x^2=2y-2 \Rightarrow x^2=2(y-1)$

Como vemos, se trata de una parábola con eje vertical cuya ecuación general es $(x-x_0)^2=2c(y-y_0)$. Así:

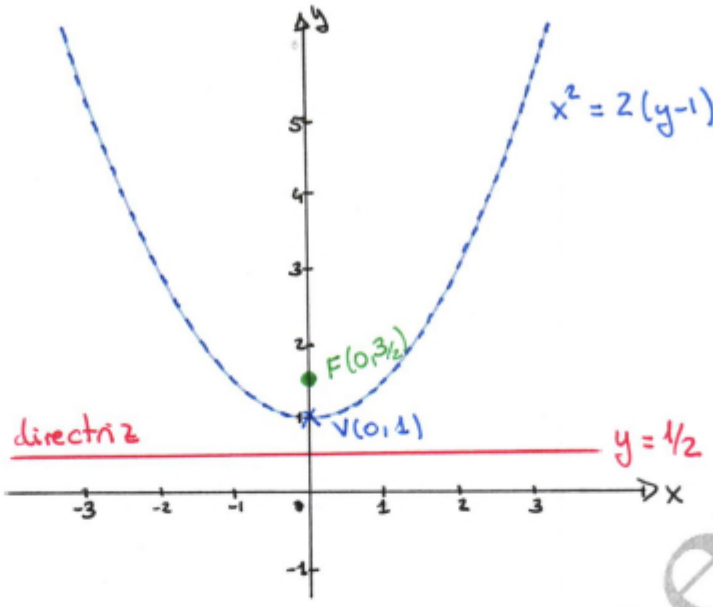
Vértice $V(x_0,y_0) \Rightarrow V(0,1)$

$2c=2 \Rightarrow c=1$ → $F(0,1+1/2) \Rightarrow F(0,3/2)$

→ Directriz $r: y=\frac{3}{2}-1 \Rightarrow r: y=1/2$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu



b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$

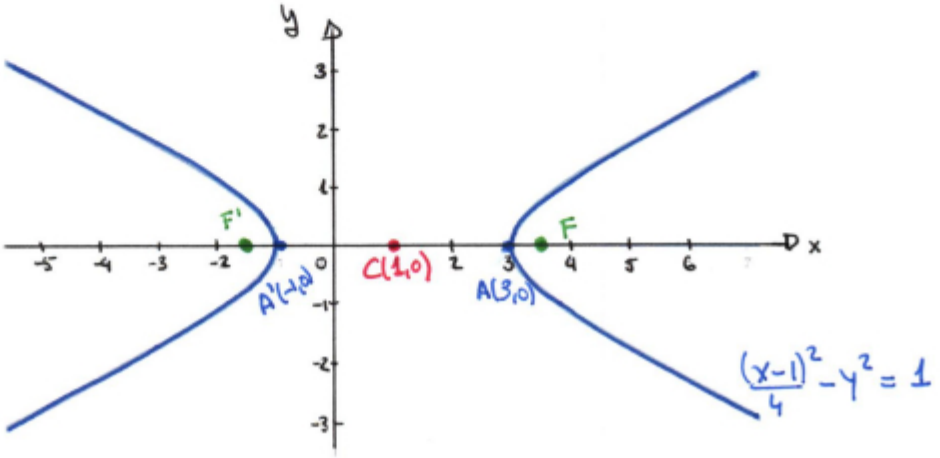
$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 - 4y^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 4y^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$, que se trata de una hipérbola de ecuación general $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Por tanto:

Centro $C(x_0, y_0) \Rightarrow C(1,0)$; $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow A(3,0)\ A'(-1,0)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow F(1+\sqrt{5}, 0)\ F'(1-\sqrt{5}, 0)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1'12$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) $x^2+9y^2-2x-8=0$

$x^2-2x=(x-1)^2-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2-1+9y^2-8=0 \Rightarrow (x-1)^2+9y^2=9 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$

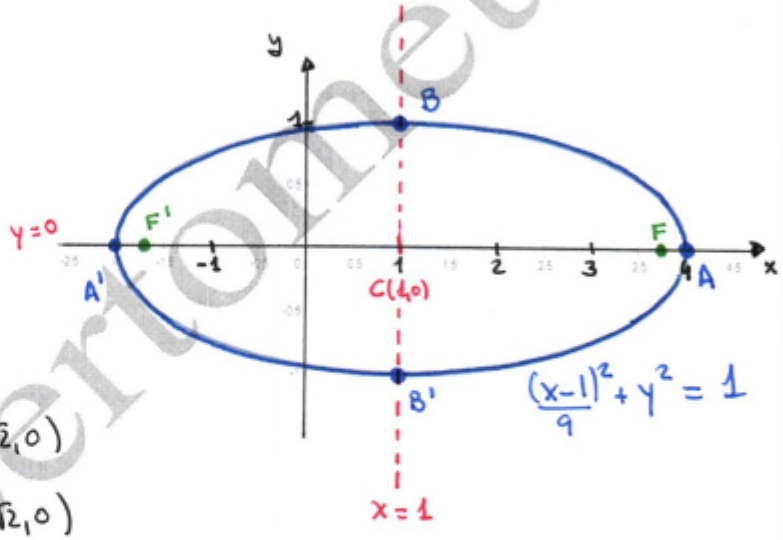
Se trata de la ecuación de una elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ con las siguientes características:

centro $C(x_0,y_0) \Rightarrow C(1,0)$

$a^2=9 \Rightarrow a=3 \rightarrow A(4,0)$, $A'(-2,0)$

$b^2=1 \Rightarrow b=1 \rightarrow B(1,1)$, $B'(1,-1)$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=2\sqrt{2} \rightarrow F(1+2\sqrt{2},0)$, $F'(1-2\sqrt{2},0)$



$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0'943$

d) $x^2+y^2+4x+6y+9=0$

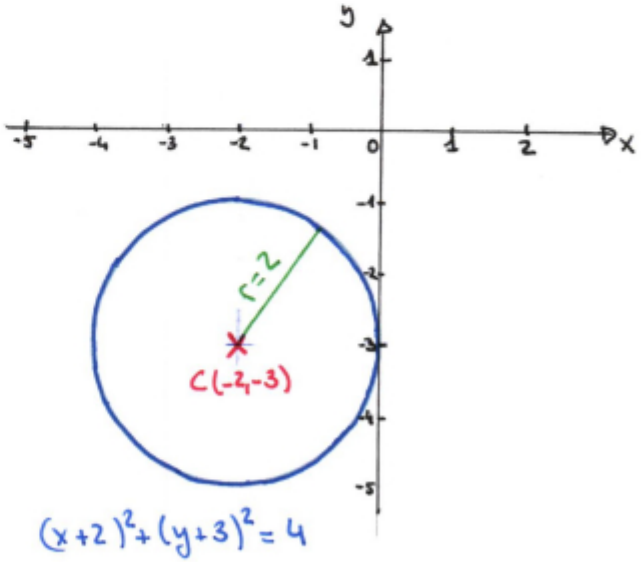
$(x^2+4x)=(x+2)^2-4$

$(y^2+6y)=(y+3)^2-9$

$\Rightarrow (x+2)^2-4+(y+3)^2-9+9=0$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=4$

Circunferencia con centro en $C(-2,-3)$ y radio $r=2$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(43) Obtén la ecuación de la elipse de focos $F'(3,-2)$ y $F(3,6)$ y cuya excentricidad es $e = \frac{4}{5}$

El centro de la elipse estará en el punto medio del segmento $\overline{FF'} \Rightarrow C = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{6-2}{2}\right) \Rightarrow C(3,2)$

La distancia focal "2c" es la distancia entre F y F'

$d(F,F') = 8 \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{4}{a} \Rightarrow a = 5$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b = 3$

Por último, dada la situación de los focos, se deduce que el eje mayor es el eje vertical ($x=3$), y la ecuación que buscamos es por tanto:

$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1}$$

(44) Halla la ecuación de una parábola de vértice $V(1,1)$ y foco $F(1,4)$

De la posición de vértice y foco, deducimos que se trata de una parábola con eje vertical. Por tanto:

$$(x-x_0)^2 = 2c(y-y_0) \xrightarrow[V(1,1)]{} (x-1)^2 = 2c(y-1)$$

La distancia de V a F es $\frac{c}{2} \Rightarrow d(V,F) = 3 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 6$

$$\Rightarrow \boxed{(x-1)^2 = 12(y-1)}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

(45) Halla las rectas que pasan por $P(0,5)$ y son tangentes a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Representa gráficamente el ejercicio.

La ecuación del HAZ DE RECTAS que pasa por $P(0,5)$ será:

$$y-y_p=m(x-x_p) \Rightarrow y-5=mx \Rightarrow \text{HAZ: } y=mx+5$$

La ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow 16x^2+25y^2=400$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y=mx+5 \\ 16x^2+25y^2=400 \end{array}\right\} \; 16x^2+25(mx+5)^2=400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2+25(m^2x^2+10mx+25)=400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(16+25m^2)}_{a}x^2+\underbrace{250m}_{b}x+\underbrace{225}_{c}=0$$

Tenemos una ecuación $ax^2+bx+c=0$ y como nos interesan solo las rectas del haz que sean tangentes a la elipse, dicha ecuación tiene que tener solo una solución. Para que eso suceda:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

→ Esto nos tiene que dar 0 para que solo haya una solución!!

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Por todo lo expuesto:

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (250m)^2 - 4\cdot(16+25m^2)\cdot 225 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 62500m^2 - 22500m^2 - 14400 = 0 \Rightarrow$$

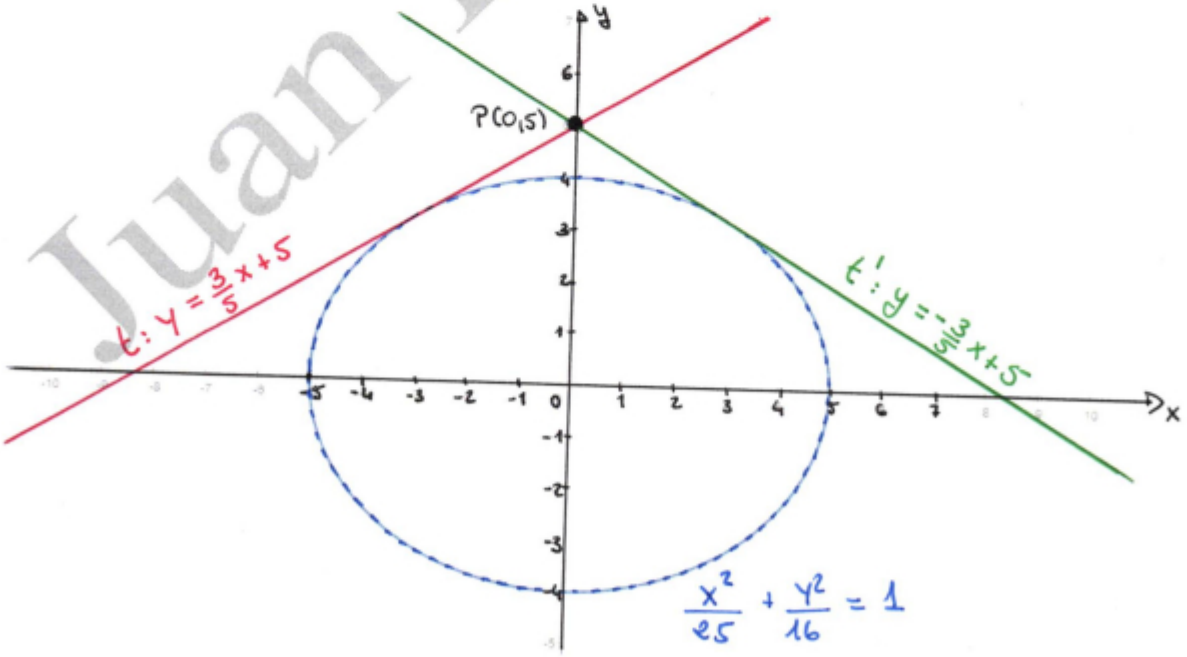
$$\Rightarrow 40000m^2 = 14400 \Rightarrow m^2 = \frac{9}{25} \begin{cases} \nearrow m = \frac{3}{5} \\ \searrow m = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

con lo que, de todas las rectas del Haz: $y = mx+5$ son tangentes a la elipse:

$y = mx+5$

$m = 3/5 \rightarrow t: y = \frac{3}{5}x + 5$

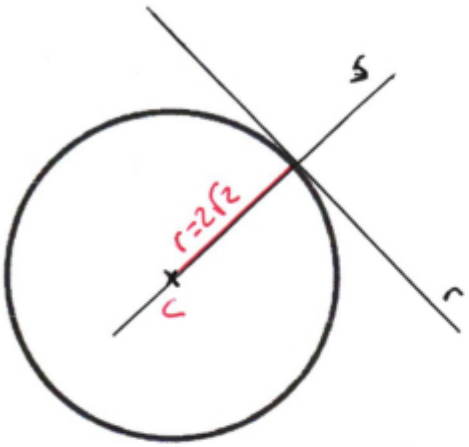
$m = -3/5 \rightarrow t': y = -\frac{3}{5}x + 5$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(46) Sean $r: x+y-7=0$ y $s: x-y-9=0$ las rectas tangente y normal a una circunferencia de radio $r=2\sqrt{2}$. Calcula la ecuación de la circunferencia.



Como vemos, el centro C está sobre la recta normal $s: y = x-9$

$$C(x,y) = C(x, x-9)$$

Además, la distancia del centro C a la recta tangente r es el radio de la circunferencia.

Por tanto:

$$d(C,r) = \frac{|x + x-9 -7|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |2x-16| = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-16 = \pm 4 \begin{cases} 2x-16 = 4 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow C(10,1) \\ 2x-16 = -4 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow C(6,-3) \end{cases}$$

Tenemos por tanto dos posibles soluciones:

$$C_1: (x-10)^2 + (y-1)^2 = 8$$

$$C_2: (x-6)^2 + (y+3)^2 = 8$$

(47) Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo que tiene sus lados sobre las rectas $r_1: y=0$ $r_2: 3x-4y=0$ y $r_3: 4x+3y-50=0$. Representa el ejercicio.

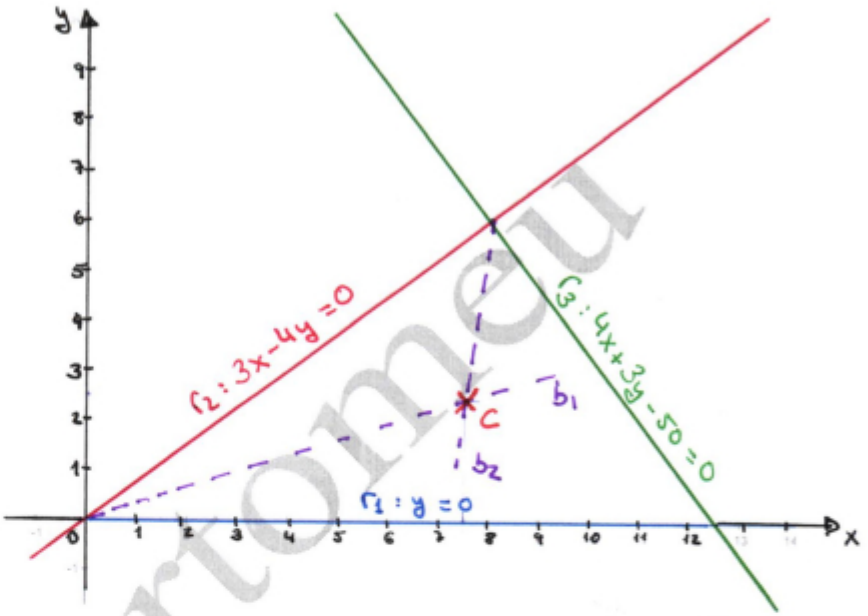
Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Empezamos por representar las rectas para tener claros los pasos que vamos a dar:

x	$r_2: 3x-4y=0$
0	0
8	6

x	$r_3: 4x+3y-50=0$
8	6
11	2



El INCENTRO de un triángulo es donde se cortan las bisectrices interiores de los ángulos que determinan las rectas que son lado del triángulo.

Bisectriz b_1:

$$\left.\begin{array}{l} r_1: y=0 \\ r_2: 3x-4y=0 \end{array}\right\} \; d(P,r_1)=d(P,r_2) \Rightarrow \frac{|y|}{\sqrt{1^2}} = \frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |3x-4y| = 5\cdot|y| \Rightarrow 3x-4y = \pm 5y$$

$3x-4y=5y \Rightarrow b_1: 3x-9y=0$ → ESTA ES LA BISECTRIZ INTERIOR

$3x-4y=-5y \Rightarrow b'_1: 3x+y=0$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Bisectriz b_2:

$$\left.\begin{array}{l} r_2: 3x-4y=0 \\ r_3: 4x+3y-50=0 \end{array}\right\} \; d(P,r_2)=d(P,r_3) \Rightarrow \frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|4x+3y-50|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$$\Rightarrow |3x-4y| = |4x+3y-50| \Rightarrow 3x-4y = \pm(4x+3y-50)$$

$$3x-4y = 4x+3y-50 \Rightarrow b_2: \; x+7y-50=0$$

$$3x-4y = -4x-3y+50 \Rightarrow b_2': \; 7x-y-50=0 \rightarrow \text{ESTA ES LA BISECTRIZ INTERIOR}$$

Calculamos el incentro C como punto de corte entre estas bisectrices:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-9y=0 \\ 7x-y-50=0 \end{array}\right\} \; y=7x-50$$

$$3x-9(7x-50)=0$$

$$-60x+450=0$$

$$x=\frac{450}{60}=\frac{15}{2}$$

$$y=7\cdot\frac{15}{2}-50=\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$ El incentro es $C\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

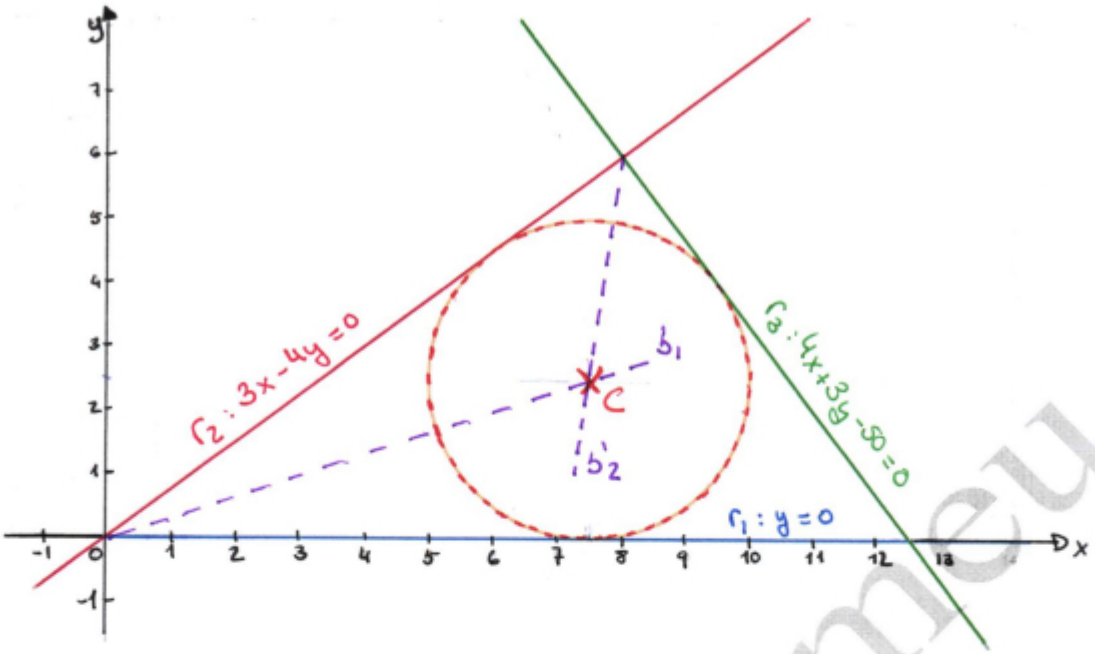
El radio de la circunferencia será la distancia de C a cualquiera de las rectas que son lado del triángulo. Así:

$$d(C,r_1) = \frac{|5/2|}{\sqrt{1}} = \frac{5}{2}$$

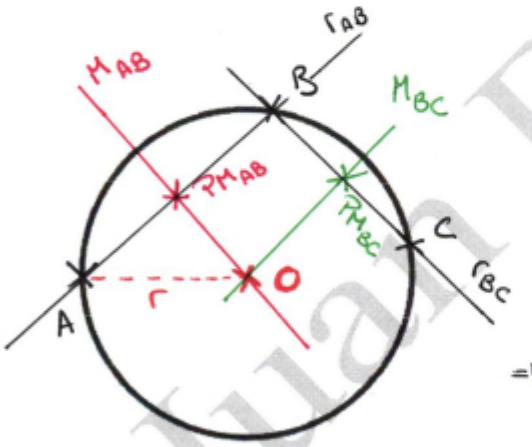
$$\Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \Rightarrow \boxed{\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu



(48) Obtén la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(-1,-3), B(2,-2) y C(3,0)



Mediatriz M_{AB}:

$\overrightarrow{AB} = (2,-2)-(-1,-3) = (3,1)$

$M_{AB} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{v}_{M_{AB}} = (-1,3)$

$P_{M_{AB}} = \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{-3-2}{2}\right) = \left(1/2, -5/2\right)$

$\Rightarrow M_{AB}: \frac{x-1/2}{-1} = \frac{y+5/2}{3} \Rightarrow 3x-\frac{3}{2} = -y-\frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_{AB}: 3x+y+1=0$

Mediatriz M_{BC}:

$\overrightarrow{BC} = (3,0)-(2,-2) = (1,2)$; $M_{BC} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{v}_{M_{BC}} = (-2,1)$

$P_{M_{BC}} = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = \left(5/2, -1\right)$

$\Rightarrow M_{BC}: \frac{x-5/2}{-2} = \frac{y+1}{1} \Rightarrow x-\frac{5}{2} = -2y-2 \Rightarrow M_{BC}: x+2y-\frac{1}{2}=0$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

El centro O de la circunferencia será el punto de corte de estas mediatrices. Así:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y+1=0 \\ x+2y-1/2=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+y+1=0 \\ \underline{x(-3) \to\ -3x-6y+\frac{3}{2}=0} \end{array}\right\}$$

$$-5y+\frac{5}{2}=0 \Rightarrow y=1/2$$

$$\to x=1/2-2y=\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow O(-1/2,\ 1/2)$$

El radio de la circunferencia es la distancia del punto O a cualquiera de los puntos A, B, o C

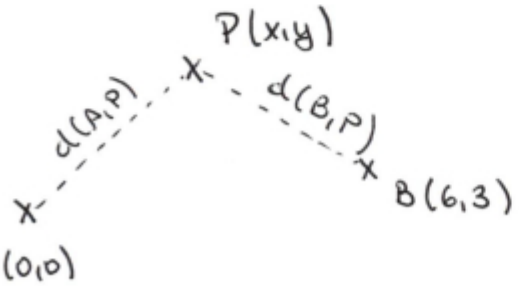
$$\overrightarrow{OA}=(-1,-3)-(-1/2,\ 1/2)=(-1/2,\ -7/2)$$

$$r=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{\sqrt{50}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

y por tanto, la circunferencia pedida:

$$\boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-1/2\right)^2=\frac{25}{2}}$$

(49) Halla el lugar geométrico de los puntos P(x,y) cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos A(0,0) y B(6,3) es 15.



$$\overrightarrow{AP}=(x,y)-(0,0)=(x,y)$$

$$d(A,P)=|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\overrightarrow{BP}=(x,y)-(6,3)=(x-6,\ y-3)$$

$$d(B,P)=|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(x-6)^2+(y-3)^2}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\left| (d(A,P))^2 - (d(B,P))^2 \right| = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| x^2+y^2 - \left((x-6)^2+(y-3)^2\right) \right| = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \cancel{x^2}+\cancel{y^2} - \left((\cancel{x^2}-12x+36)+(\cancel{y^2}-6y+9)\right) \right| = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |12x+6y-45| = 15 \Rightarrow 12x+6y-45 = \pm 15$$

$12x+6y-45=15 \longrightarrow r_1: 12x+6y-60=0 \rightarrow r_1: 2x+y-10=0$

$12x+6y-45=-15 \longrightarrow r_2: 12x+6y-30=0 \rightarrow r_2: 2x+y-5=0$

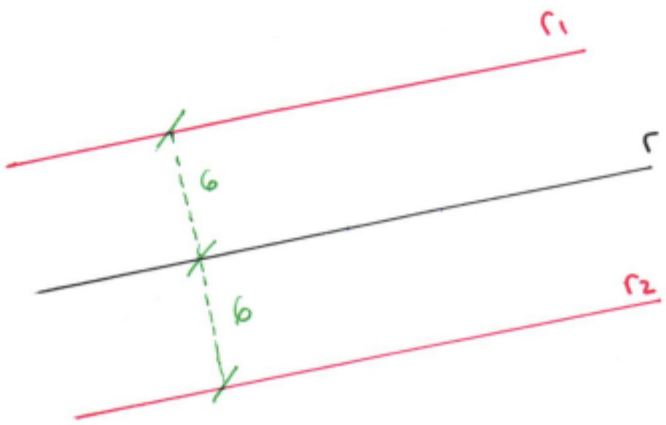
(50) Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ cuya distancia a la recta $r: 4x-3y+11=0$ es de 6 unidades.

$$d(P(x,y),r)=6 \Rightarrow \frac{|4x-3y+11|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Rightarrow |4x-3y+11| = 30$$

$\Rightarrow 4x-3y+11 = \pm 30$

$4x-3y+11=30 \longrightarrow r_1: 4x-3y-19=0$

$4x-3y+11=-30 \rightarrow r_2: 4x-3y+41=0$



Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

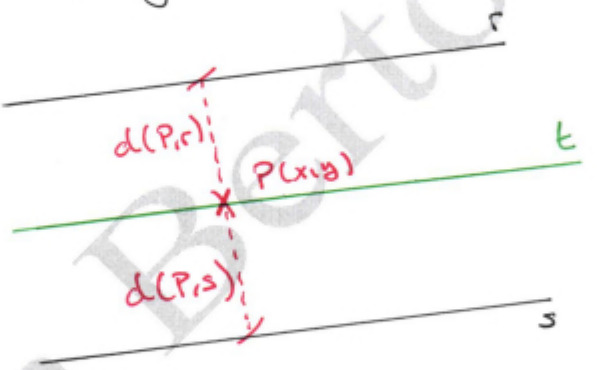
(51) Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ que equidistan de las rectas $r: 3x-5y+11=0$ y $s: 3x-5y+3=0$

$$\left.\begin{array}{l} r: 3x-5y+11=0 \\ s: 3x-5y+3=0 \end{array}\right\} \; d(P,r)=d(P,s) \Rightarrow \frac{|3x-5y+11|}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{|3x-5y+3|}{\sqrt{3^2+5^2}}$$

$$\Rightarrow |3x-5y+11| = |3x-5y+3| \Rightarrow 3x-5y+11 = \pm(3x-5y+3)$$

$$3x-5y+11 = 3x-5y+3 \Rightarrow 11 \neq 3 \rightarrow \text{ABSURDO!!}$$

$$3x-5y+11 = -3x+5y-3 \Rightarrow t: 6x-10y+14=0 \Rightarrow t: 3x-5y+7=0$$



(52) Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ cuya distancia al punto $A(2,3)$ es de 3 unidades.

$$\overrightarrow{AP} = (x,y)-(2,3) = (x-2, y-3)$$

$$d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 3$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = 9 \rightarrow \text{Circunferencia con centro en } A(2,3) \text{ y radio } r=3$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(53) Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que disten a $A(0,6)$ el doble de lo que distan a $B(0,3)$.

$$d(A,P) = 2 \cdot d(B,P)$$

$$\overrightarrow{AP} = (x,y) - (0,6) = (x, y-6) \Rightarrow d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{x^2+(y-6)^2}$$

$$\overrightarrow{BP} = (x,y) - (0,3) = (x, y-3) \Rightarrow d(B,P) = |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+(y-6)^2}\right)^2 = \left(2 \cdot \sqrt{x^2+(y-3)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+(y-6)^2 = 4\left(x^2+(y-3)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-12y+36 = 4x^2+4(y^2-6y+9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-12y+36 = 4x^2+4y^2-24y+36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2-12y = 0 \Rightarrow x^2+y^2-4y = 0 \Rightarrow$$

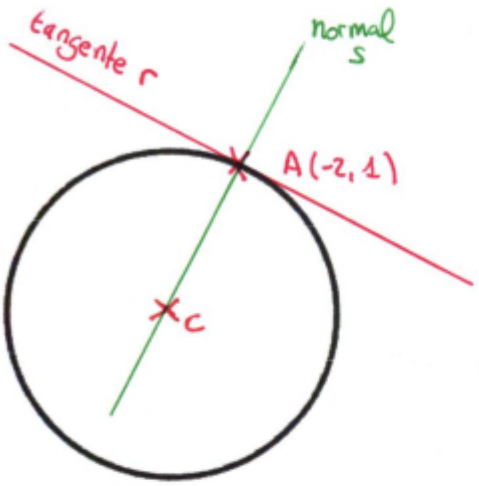
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = x^2 \\ y^2-4y = (y-2)^2-4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2+(y-2)^2-4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+(y-2)^2 = 4 \rightarrow \text{Circunferencia con centro en } C(0,2) \text{ y radio } r=2$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(54) Determina las rectas tangente y normal a la circunferencia de ecuación $(x+4)^2+(y+2)^2=13$ en el punto $A(-2,1)$



La circunferencia $(x+4)^2+(y+2)^2=13$ tiene su centro en $C(-4,-2)$. La recta normal s es la que pasa por A y C. Por tanto:

$$\overrightarrow{CA} = (-2,1)-(-4,-2) = (2,3) = \vec{v}_s$$

$$\Rightarrow s: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow 3x+6 = 2y-2 \Rightarrow \boxed{s: 3x-2y+8=0}$$

La recta tangente "r" es perpendicular a s:

$$r \perp s \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_r = (-3,2)$$

$$r: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x+4 = -3y+3 \Rightarrow \boxed{t: 2x+3y+1=0}$$

(55) Estudia la posición del punto $A(0,2)$ respecto de la circunferencia $x^2+(y-m)^2=16$ en función de los valores del parámetro "m".

La circunferencia que nos dan tiene centro en $C(0,m)$ y radio $r=4$.

$$\overrightarrow{AC} = (0,m)-(0,2) = (0,m-2)$$

$$d(A,C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(m-2)^2} = \sqrt{m^2-4m+4}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

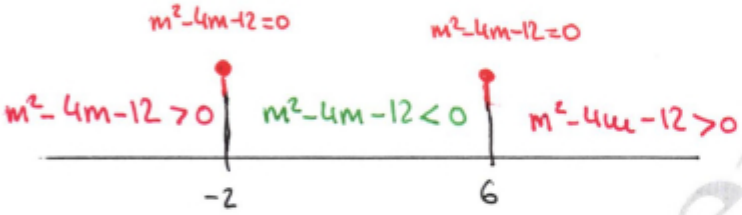
Ahora tenemos que razonar que:

- Si $d(A,C) = r \Rightarrow$ A pertenece a la circunferencia
- Si $d(A,C) > r \Rightarrow$ A es exterior a la circunferencia
- Si $d(A,C) < r \Rightarrow$ A es interior a la circunferencia.

Por tanto:

$$\left(\sqrt{m^2-4m+4}\right)^2 = (4)^2$$

$$m^2-4m+4 = 16 \Rightarrow m^2-4m-12=0 \quad \begin{cases} m=6 \\ m=-2 \end{cases}$$



A pertenece a la circunferencia si $m = -2$ o $m = 6$

A es exterior a la circunferencia si $m \in (-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$

A es interior a la circunferencia si $m \in (-2, 6)$

(56) Calcula y describe el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que su distancia al eje X es la misma que al punto $A(3,2)$.

$$\overrightarrow{AP} = (x,y) - (3,2) = (x-3, y-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} \\ d(P, \text{Eje X}) = |y| \end{array}\right\} d(A,P) = d(P, \text{Eje X}) \Rightarrow$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\right)^2 = (|y|)^2 \Rightarrow$

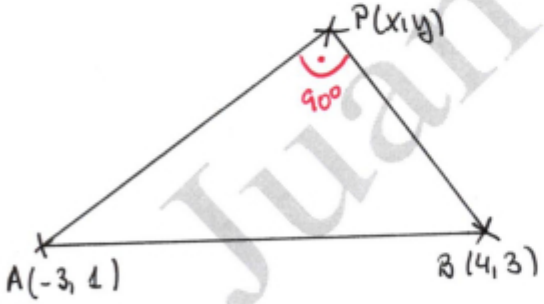
$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-3)^2 = 4y - 4 \Rightarrow \boxed{(x-3)^2 = 4(y-1)}$

Se trata de una parábola de eje vertical de ecuación general $(x-x_0)^2 = 2c(y-y_0)$

- Vértice $(x_0, y_0) \Rightarrow V(3,1)$
- $2c = 4 \Rightarrow c = 2$ → $F(3,2)$
  - Directriz $r: y = 0$

(57) Calcula y describe el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ que verifiquen que el triángulo APB sea rectángulo en P siendo $A(-3,1)$ y $B(4,3)$



$\overrightarrow{AP} = (x,y) - (-3,1) = (x+3, y-1)$

$\overrightarrow{BP} = (x,y) - (4,3) = (x-4, y-3)$

Si el triángulo es rectángulo en P los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ serán perpendiculares.

Si $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP} \Rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+3, y-1) \cdot (x-4, y-3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+3)\cdot(x-4) + (y-1)\cdot(y-3) = 0 \Rightarrow$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

$$\Rightarrow x^2 - x - 12 + y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 12 + (y-2)^2 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{53}{4}}$$

Que es una circunferencia con centro en $C(1/2, 2)$ y radio $r = \frac{\sqrt{53}}{2}$

(58) Determina y describe el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que el punto medio del segmento PQ es un punto de la recta $r: 2x + 4y - 5 = 0$ siendo $Q(2,6)$

El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ viene dado por:

$$M = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+6}{2}\right)$$

Si $M \in r$, M debe verificar la ecuación de "r". Así:

$$2\left(\frac{x+2}{2}\right) + 4\left(\frac{y+6}{2}\right) - 5 = 0 \Rightarrow x + 2 + 2y + 12 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{s: \; x + 2y + 9 = 0}$$, que es la ecuación de una recta

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(59) Calcula y describe el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que la suma de los cuadrados de las distancias a los puntos $A(3,1)$ y $B(5,1)$ es igual a 8.

$\overrightarrow{AP} = (x,y) - (3,1) = (x-3, y-1)$; $d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$

$\overrightarrow{BP} = (x,y) - (5,1) = (x-5, y-1)$; $d(B,P) = |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}$

$$(d(A,P))^2 + (d(B,P))^2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + (x-5)^2 + (y-1)^2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 - 10x + 25 + 2(y-1)^2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 16x + 34 + 2(y-1)^2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 8x + 17) + 2(y-1)^2 = 8 \Rightarrow$$

$\hookrightarrow x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$

$$\Rightarrow 2((x-4)^2 - 16 + 17) + 2(y-1)^2 = 8$$

$$2(x-4)^2 + 2(y-1)^2 = 6$$

$$\boxed{(x-4)^2 + (y-1)^2 = 3}$$

Que es la ecuación de una circunferencia con centro en $C(4,1)$ y radio $r = \sqrt{3}$.

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(60) Escribe la ecuación de la elipse centrada en el origen de coordenadas, focos sobre el eje X y que pasa por los puntos $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $Q\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

La ecuación de la elipse que buscamos será de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a > b \text{ (¡¡eje focal horizontal!!)}$$

$$P\left(1, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \longrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{3}{4b^2}$$

$$Q\left(\sqrt{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \longrightarrow \frac{(\sqrt{2})^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2}{a^2} + \frac{2}{4b^2} = 1$$

$$\Rightarrow 2\cdot\left(1 - \frac{3}{4b^2}\right) + \frac{2}{4b^2} = 1 \Rightarrow 2 - \frac{6}{4b^2} + \frac{2}{4b^2} = 1 \Rightarrow$$

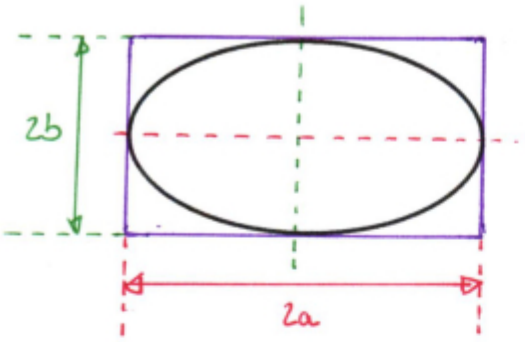
$$\Rightarrow \frac{-4}{4b^2} = -1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2 = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1}$$

(61) Calcula la ecuación de una elipse centrada en el origen de coordenadas, con focos sobre el eje X, con distancia focal 8 y tal que el área encerrada por el rectángulo construido por sus vértices con lados paralelos a sus ejes es de $48\sqrt{5}\ u^2$.

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com



Distancia focal $= 2c = 8 \Rightarrow c = 4$

Área $= 48\sqrt{5}$

$$\left.\begin{array}{l} 2a \cdot 2b = 48\sqrt{5} \Rightarrow a \cdot b = 12\sqrt{5} \\ a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 16 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow b = \frac{12\sqrt{5}}{a} \Rightarrow a^2 = \left(\frac{12\sqrt{5}}{a}\right)^2 + 16 \Rightarrow a^2 = \frac{720}{a^2} + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 = 720 + 16a^2 \Rightarrow a^4 - 16a^2 - 720 = 0 \; ; \; a^2 = z$$

$$\Rightarrow z^2 - 16z - 720 = 0 \; ; \; z = \frac{16 \pm \sqrt{3136}}{2}$$

$z = 36 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$

$z = -20 \Rightarrow \nexists \, a \in \mathbb{R}$

$$b = \frac{12\sqrt{5}}{a} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1}$$

(62) Calcula la ecuación de la parábola de eje vertical y que pasa por los puntos $A(2,-4)$, $B(-2,4)$, y $C(-3,2)$

La parábola de eje vertical tiene por ecuación:

$(x - x_0)^2 = 2c(y - y_0)$ siendo $V(x_0, y_0)$ el vértice.

$$\left.\begin{array}{l} A(2,-4) \rightarrow (2 - x_0)^2 = 2c(-4 - y_0) \rightarrow 4 - 4x_0 + x_0^2 = -8c - 2cy_0 \\ B(-2,4) \rightarrow (-2 - x_0)^2 = 2c(4 - y_0) \rightarrow 4 + 4x_0 + x_0^2 = 8c - 2cy_0 \\ C(-3,2) \rightarrow (-3 - x_0)^2 = 2c(2 - y_0) \rightarrow 9 + 6x_0 + x_0^2 = 4c - 2cy_0 \end{array}\right\}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Restamos ecuaciones:

$E_2 - E_1 \longrightarrow 8x_0 = 16c$

$E_3 - E_1 \longrightarrow 5 + 10x_0 = 12c$ $\Big\}$ $x_0 = 2c$ ↩ $5 + 10 \cdot 2c = 12c \Rightarrow 8c = -5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = -\frac{5}{8} \Rightarrow x_0 = 2\cdot\left(-\frac{5}{8}\right) = -\frac{5}{4}$$

Para averiguar "y_0" sustituimos en cualquiera de las tres ecuaciones.

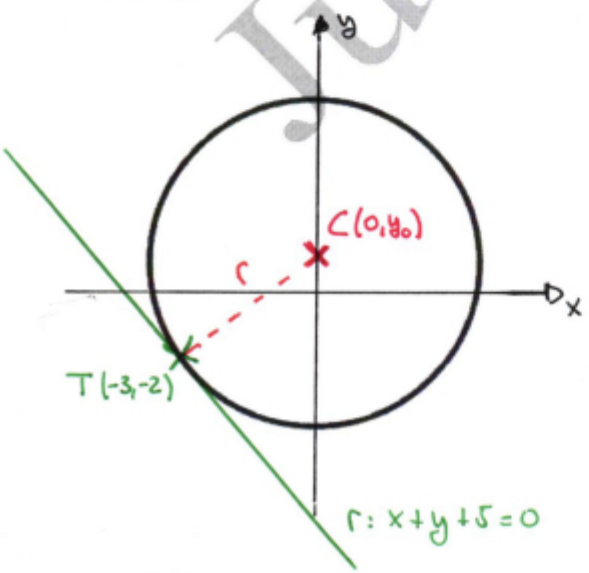
Por ejemplo en la primera:

$$4 - 4\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = -8\cdot\left(-\frac{5}{8}\right) - 2\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot y_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{169}{16} = 5 + \frac{5}{4}y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{89}{20}$$

La ecuación pedida es por tanto $\boxed{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{5}{4}\left(y-\frac{89}{20}\right)}$

(63) Encuentra la ecuación de la circunferencia que, siendo tangente a la recta $r: x+y+5=0$ en el punto $T(-3,-2)$, tiene su centro sobre el eje Y.



$$\overrightarrow{TC} = (0, y_0) - (-3, -2) = (3, y_0 + 2)$$

$$r = d(T,C) = |\overrightarrow{TC}| = \sqrt{9 + (y_0+2)^2} = \sqrt{y_0^2 + 4y_0 + 13}$$

$$d(C,r) = \frac{|y_0 + 5|}{\sqrt{2}} = r$$

$$\Rightarrow \sqrt{y_0^2 + 4y_0 + 13} = \frac{|y_0+5|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\Rightarrow \left(\sqrt{y_0^2+4y_0+13}\right)^2 = \left(\frac{|y_0+5|}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y_0^2+4y_0+13 = \frac{y_0^2+10y_0+25}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2y_0^2+8y_0+26 = y_0^2+10y_0+25 \Rightarrow$$

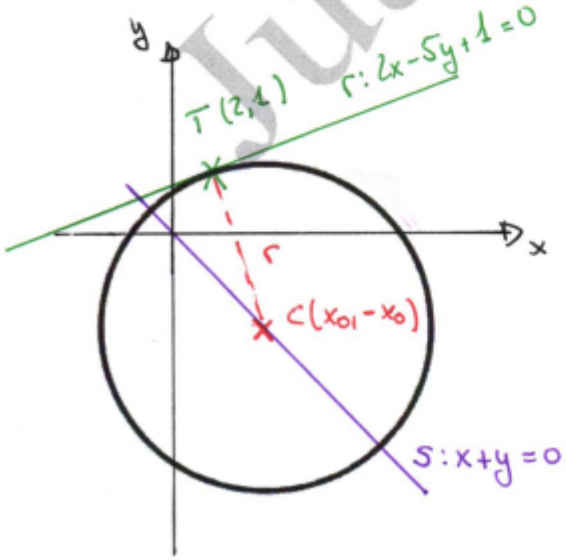
$$\Rightarrow \quad y_0^2-2y_0+1=0 \Rightarrow y_0 = \frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2} = 1$$

El centro por tanto es $C(0,1)$ y el radio será $r = \frac{|1+5|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$,

con lo que la ecuación pedida es:

$$\boxed{x^2+(y-1)^2 = 18}$$

(64) Encuentra la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $r: 2x-5y+1=0$ en el punto $T(2,1)$ y tiene su centro sobre la recta $s: x+y=0$



El centro $C(x_0, y_0)$ está sobre la recta $s: y=-x$, y por tanto será $C(x_0, -x_0)$

$$\overrightarrow{TC} = (x_0,-x_0)-(2,1) = (x_0-2,-x_0-1)$$

$$|\overrightarrow{TC}| = \sqrt{(x_0-2)^2+(-x_0-1)^2} = r$$

$$d(C,r) = \frac{|2x_0-5\cdot(-x_0)+1|}{\sqrt{2^2+5^2}} = r$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x_0-2)^2+(-x_0-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{|7x_0+1|}{\sqrt{29}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0-2)^2+(-x_0-1)^2 = \frac{(7x_0+1)^2}{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2-4x_0+4+x_0^2+2x_0+1 = \frac{49x_0^2+14x_0+1}{29}$$

$$\Rightarrow 2x_0^2-2x_0+5 = \frac{49x_0^2+14x_0+1}{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 58x_0^2-58x_0+145 = 49x_0^2+14x_0+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x_0^2-72x_0+144=0 \Rightarrow x_0^2-8x_0+16=0$$

$$x_0 = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$$

El centro por tanto es $C(4,-4)$ y el radio $r = \frac{|7\cdot 4+1|}{\sqrt{29}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$

con lo que la ecuación pedida es:

$$\boxed{(x-4)^2+(y+4)^2 = 29}$$

(65) Estudia la posición relativa de la recta $r: y = mx+2$ respecto de la circunferencia $(x-3)^2+(y-2)^2 = 4$ en función de los valores del parámetro "m".

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

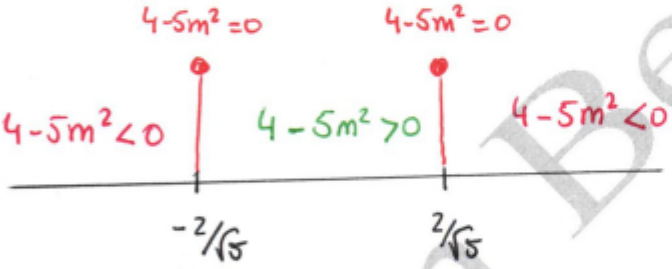
1ª Forma:

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + 2 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{array}\right\} \quad x^2 - 6x + 9 + (mx+2-2)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + m^2x^2 = 4 \Rightarrow (1+m^2)x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20(1+m^2)}}{2(1+m^2)} = \frac{6 \pm \sqrt{4(9 - 5(1+m^2)}}{2(1+m^2)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-5-5m^2}}{1+m^2}$$

$$\Rightarrow 4 - 5m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{4}{5} \begin{cases} \Rightarrow m = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \Rightarrow m = \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$



$\Rightarrow$ Si $x = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ o $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow$ Recta tangente a la circunferencia.

$\Rightarrow$ Si $x \in (-\infty, -2/\sqrt{5}) \cup (2/\sqrt{5}, +\infty)$ $\Rightarrow$ Recta exterior.

$\Rightarrow$ Si $x \in (-2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ $\Rightarrow$ Recta secante.

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

2ª Forma:

La circunferencia dada tiene centro en $C(3,2)$ y radio $R=2$.

La recta es $r: mx - y + 2 = 0$

La distancia $d(C,r)$ es $d(C,r) = \dfrac{|3m-2+2|}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}}$

Veamos cuándo esa distancia coincide con el radio de la circunferencia:

$$\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow \frac{9m^2}{m^2+1} = 4 \Rightarrow 9m^2 = 4m^2+4 \Rightarrow 5m^2 = 4$$

$$m^2 = \frac{4}{5} \begin{cases} \nearrow m = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \searrow m = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Si $x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ o $x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow d(C,r) = R \Rightarrow$ Recta tangente.

$\Rightarrow$ Si $x \in \left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, +\infty\right) \Rightarrow d(C,r) > R \Rightarrow$ Recta exterior.

$\Rightarrow$ Si $x \in \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow d(C,r) < R \Rightarrow$ Recta secante.

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(66) Estudia la posición relativa de los siguientes pares de circunferencias:

a) $C_1: x^2+y^2-8x+5y-7=0$ y $C_2: x^2+y^2-8x+5y-15=0$

b) $C_1: x^2+y^2-7x-11y-3=0$ y $C_2: x^2+y^2-7x-10y+2=0$

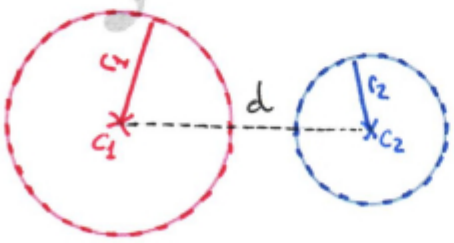
c) $C_1: x^2+y^2+8x+4y-11=0$ y $C_2: x^2+y^2-6x-8y+21=0$

d) $C_1: x^2+y^2+8x-4y+18=0$ y $C_2: x^2+y^2-2x+6y-22=0$

¡¡Recuerda!! POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

La posición relativa entre dos circunferencias viene determinada por la distancia entre sus centros $d(C_1, C_2)$ y el valor de sus radios r_1 y r_2, pudiéndose dar las siguientes situaciones:

EXTERIORES



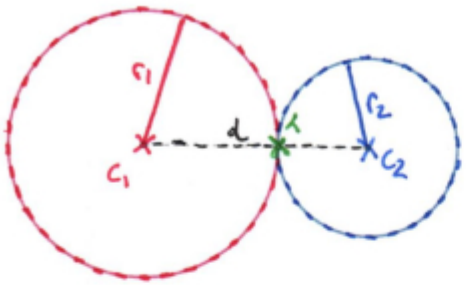
No tienen puntos en común y la distancia $d = d(C_1, C_2)$ es

$$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

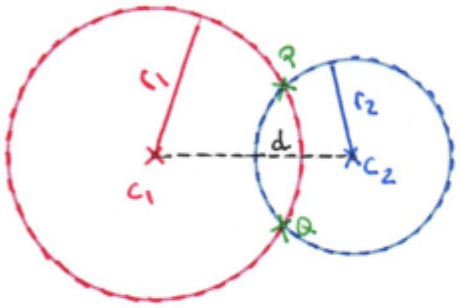
TANGENTES EXTERIORES



Tienen solo un punto en común (el punto de tangencia T) y la distancia d entre los centros es

$$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$$

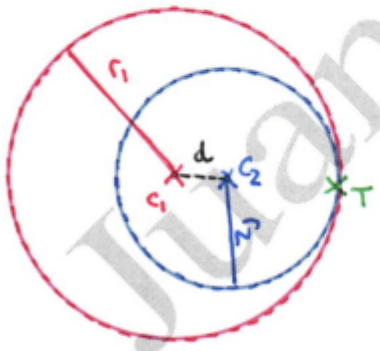
SECANTES



Tienen dos puntos en común P y Q y la distancia d entre los centros verifica:

$$|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$$

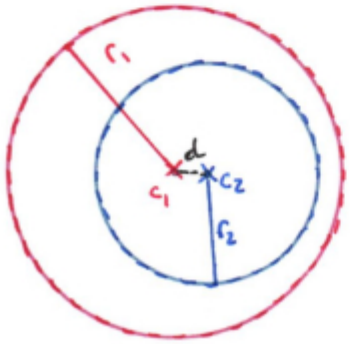
TANGENTES INTERIORES



Tienen un solo punto en común (el punto de tangencia T) y la distancia d entre los centros verifica:

$$d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$$

INTERIORES



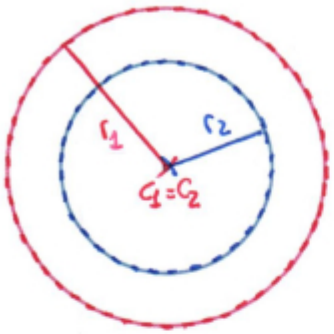
No tienen puntos en común y la distancia d entre los centros verifica:

$$d(C_1, C_2) < |r_1 - r_2|$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

CONCÉNTRICAS:



Son circunferencias que tienen el mismo centro y radios distintos. No tienen puntos comunes.

* En el caso de que fuera $r_1 = r_2$ las dos circunferencias son en realidad la misma circunferencia (COINCIDENTES)

a) $C_1: x^2+y^2-8x+5y-7=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-8x = (x-4)^2-16 \\ y^2+5y = \left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow (x-4)^2-16+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-7=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1: (x-4)^2+\left(y+\tfrac{5}{2}\right)^2 = \frac{117}{4} \quad \begin{cases} \rightarrow C_1\left(4, -\tfrac{5}{2}\right) \\ \rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{117}}{2} \end{cases}$$

$C_2: x^2+y^2-8x+5y-15=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-8x = (x-4)^2-16 \\ y^2+5y = \left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow (x-4)^2-16+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-15=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2: (x-4)^2+\left(y+\tfrac{5}{2}\right)^2 = \frac{149}{4} \quad \begin{cases} \rightarrow C_2\left(4, -\tfrac{5}{2}\right) \\ \rightarrow r_2 = \frac{\sqrt{149}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tienen el mismo centro y radios distintos $\Rightarrow$ CONCÉNTRICAS

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

b) $C_1: x^2+y^2-7x-11y-3=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-7x = \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4} \\ y^2-11y = \left(y-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{121}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{121}{4}-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1: \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{91}{2} \quad \begin{cases} C_1\left(\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right) \\ r_1=\sqrt{\frac{91}{2}} \end{cases}$$

$C_2: x^2+y^2-7x-10y+2=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-7x = \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4} \\ y^2-10y = (y-5)^2-25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+(y-5)^2-25+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2: \left(x-\tfrac{7}{2}\right)^2+(y-5)^2=\frac{141}{4} \quad \begin{cases} C_2=\left(\frac{7}{2},5\right) \\ r_2=\frac{\sqrt{141}}{2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{C_1C_2}=\left(\tfrac{7}{2},5\right)-\left(\tfrac{7}{2},\tfrac{11}{2}\right)=\left(0,-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} d(C_1,C_2)=|\overrightarrow{C_1C_2}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}=0'5 \\ r_1+r_2=\sqrt{\frac{91}{2}}+\frac{\sqrt{141}}{2}\approx 12'68 \\ |r_1-r_2|=0'81 \end{array}\right\} \begin{array}{l} d(C_1,C_2)<|r_1-r_2| \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{INTERIORES} \end{array}$$

c) $C_1: x^2+y^2+8x+4y-11=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+8x = (x+4)^2-16 \\ y^2+4y = (y+2)^2-4 \end{array}\right\} \Rightarrow (x+4)^2-16+(y+2)^2-4-11=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1: (x+4)^2+(y+2)^2=31 \quad \begin{cases} C_1(-4,-2) \\ r_1=\sqrt{31} \end{cases}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$C_2: \; x^2+y^2-6x-8y+21=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-6x=(x-3)^2-9 \\ y^2-8y=(y-4)^2-16 \end{array}\right\} (x-3)^2-9+(y-4)^2-16+21=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2: (x-3)^2+(y-4)^2=4 \begin{cases} \nearrow C_2(3,4) \\ \searrow r_2=2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{C_1C_2}=(3,4)-(-4,-2)=(7,6)$$

$$\left.\begin{array}{l} d(C_1,C_2)=|\overrightarrow{C_1C_2}|=\sqrt{7^2+6^2}=\sqrt{85}\approx 9'22 \\ r_1+r_2=7'56 \\ |r_1-r_2|=3'56 \end{array}\right\} d(C_1,C_2)>r_1+r_2 \Rightarrow \Rightarrow \text{EXTERIORES}$$

d) $C_1: \; x^2+8x+y^2-4y+18=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+8x=(x+4)^2-16 \\ y^2-4y=(y-2)^2-4 \end{array}\right\} \Rightarrow (x+4)^2-16+(y-2)^2-4+18=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1: (x+4)^2+(y-2)^2=2 \begin{cases} \nearrow C_1(-4,2) \\ \searrow r_1=\sqrt{2} \end{cases}$$

$C_2: \; x^2+y^2-2x+6y-22=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-2x=(x-1)^2-1 \\ y^2+6y=(y+3)^2-9 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)^2-1+(y+3)^2-9-22=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2: (x-1)^2+(y+3)^2=32 \begin{cases} \nearrow C_2(1,-3) \\ \searrow r_2=\sqrt{32} \end{cases}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$\overrightarrow{C_1C_2} = (1,-3)-(-4,2) = (5,-5)$

$d(C_1,C_2) = |\overrightarrow{C_1C_2}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$r_1 + r_2 = \sqrt{2} + \sqrt{32} = \sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$|r_1 - r_2| = |\sqrt{2} - 4\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow d(C_1,C_2) = r_1 + r_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ TANGENTES EXTERIORES

(67) Estudia la posición relativa de las circunferencias de ecuaciones $C_1: x^2+y^2-6x-6y+13=0$ y $C_2: x^2+y^2-8x+11=0$, diciendo además qué punto o puntos tienen en común (si es que los tienen)

$C_1: x^2+y^2-6x-6y+13=0 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}(x^2-6x) = (x-3)^2-9 \\ (y^2-6y) = (y-3)^2-9\end{array}\right\} \Rightarrow (x-3)^2-9+(y-3)^2-9+13=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1: (x-3)^2+(y-3)^2 = 5 \begin{cases} C_1(3,3) \\ r_1 = \sqrt{5} \end{cases}$

$C_2: x^2+y^2-8x+11=0 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}x^2-8x = (x-4)^2-16 \\ y^2 = y^2\end{array}\right\} \Rightarrow (x-4)^2-16+y^2+11=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2: (x-4)^2+y^2 = 5 \begin{cases} C_2(4,0) \\ r_2 = \sqrt{5} \end{cases}$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$\overrightarrow{C_1C_2} = (4,0) - (3,3) = (1,-3)$

$d(C_1,C_2) = |\overrightarrow{C_1C_2}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \approx 3'16$

$r_1 + r_2 = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \approx 4'47$

$|r_1 - r_2| = 0$

$\Rightarrow |r_1 - r_2| < d(C_1,C_2) < r_1 + r_2 \Rightarrow$ SECANTES

Para hallar los puntos de corte, calculamos primero el eje radical.

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = x^2 + y^2 - 8x + 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Eje}_{\text{radical}}: \; 2x - 6y + 2 = 0 \Rightarrow \text{Eje}_{\text{radical}}: \; x - 3y + 1 = 0$$

Los puntos de corte serán donde el eje radical corta a cualquiera de las dos circunferencias. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x - 3y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 11 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3y - 1 \\ \Rightarrow (3y-1)^2 + y^2 - 8(3y-1) + 11 = 0 \Rightarrow \end{array}$$

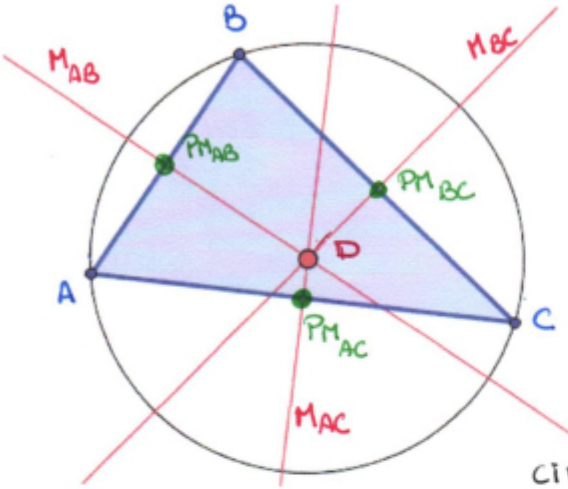
$$\Rightarrow 9y^2 - 6y + 1 + y^2 - 24y + 8 + 11 = 0 \Rightarrow 10y^2 - 30y + 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \begin{cases} \Rightarrow y = 1 \longrightarrow x = 2 \longrightarrow P(2,1) \\ \Rightarrow y = 2 \longrightarrow x = 5 \longrightarrow Q(5,2) \end{cases}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(68) Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(1,0)$, $B(-3,1)$ y $C(5,2)$.



Recuerda que el circuncentro es el punto donde se cortan las mediatrices de los lados de un triángulo.

Calcularé dos de ellas ya que con dos es suficiente para calcular el circuncentro D. Así:

Mediatriz M_{AB}:

$\overrightarrow{AB} = (-3,1) - (1,0) = (-4,1)$

$M_{AB} \perp \overline{AB} \Rightarrow \vec{v}_{M_{AB}} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{v}_{M_{AB}} = (1,4)$

$P_{M_{AB}} = \left(\frac{1-3}{2}, \frac{0+1}{2} \right) = \left(-1, \frac{1}{2} \right)$

$M_{AB}: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1/2}{4} \Rightarrow 4x+4 = y-1/2 \Rightarrow M_{AB}: 4x - y + \frac{9}{2} = 0$

Mediatriz M_{AC}:

$\overrightarrow{AC} = (5,2) - (1,0) = (4,2) \Rightarrow \vec{v}_{r_{AC}} = (2,1)$

$M_{AC} \perp \overline{AC} \Rightarrow \vec{v}_{M_{AC}} \perp \vec{v}_{r_{AC}} \Rightarrow \vec{v}_{M_{AC}} = (-1,2)$

$P_{M_{AC}} = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (3,1)$

$M_{AC}: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x - 6 = -y + 1 \Rightarrow M_{AC}: 2x + y - 7 = 0$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

El circuncentro D será el punto de corte de estas mediatrices. Así:

$$\left.\begin{array}{l} 4x - y + \frac{9}{2} = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{array}\right\} \quad 6x - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{12}$$

$$\rightarrow y = 7 - 2x = 7 - 2\cdot\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{6} \Rightarrow D\left(\frac{5}{12}, \frac{37}{6}\right)$$

Conocido el centro D, solo nos falta conocer el radio que calcularemos como la distancia del punto D a cualquiera de los vértices A, B, o C. Por tanto:

$$\overrightarrow{AD} = \left(\frac{5}{12}, \frac{37}{6}\right) - (1,0) = \left(\frac{-7}{12}, \frac{37}{6}\right)$$

$$r = d(A,D) = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\left(\frac{7}{12}\right)^2 + \left(\frac{37}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{5525}{144}}$$

La ecuación pedida será entonces:

$$\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{6}\right)^2 = \frac{5525}{144}$$

(69) Encuentra las ecuaciones de las circunferencias que siendo tangentes a ambos ejes coordenados, pasan por el punto P(2,4)

Las circunferencias que buscamos son tangentes a los ejes X e Y. Eso significa que las distancias del centro de esas circunferencias a los ejes X e Y deben ser iguales. O dicho de otra manera, el centro de las circunferencias que buscamos estarán sobre

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

la bisectriz del primer cuadrante $y = x \Rightarrow C(x_0, y_0) = (x_0, x_0)$

Por otro lado, el radio de la circunferencia es la distancia del centro $C(x_0, y_0) = (x_0, x_0)$ a cualquiera de los dos ejes.

El Eje X es una recta de ecuación Eje X: $y = 0$. Por tanto:

$$d(C, \text{Eje X}) = r$$

$$\frac{|x_0|}{\sqrt{1^2}} = r \Rightarrow r^2 = x_0^2$$

Con lo que:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - x_0)^2 = x_0^2$$

Las circunferencias pasan por $P(2,4)$ y por tanto el punto P verificará la ecuación:

$$P(2,4) \longrightarrow (2 - x_0)^2 + (4 - x_0)^2 = x_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - 4x_0 + x_0^2 + 16 - 8x_0 + x_0^2 = x_0^2$$

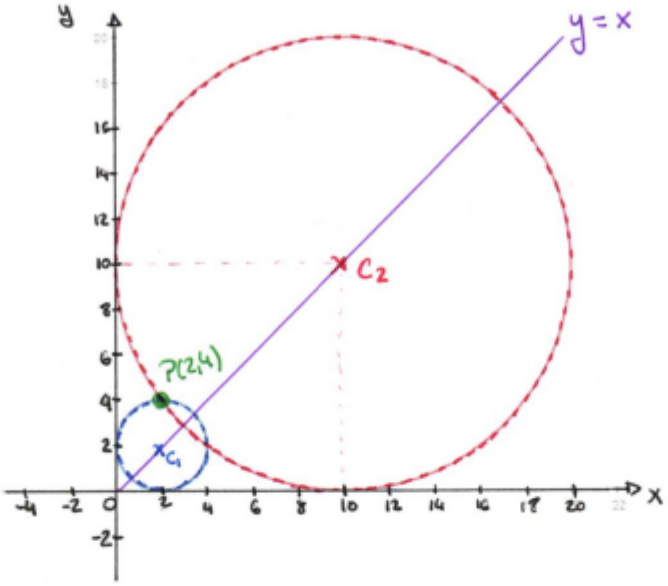
$$\Rightarrow x_0^2 - 12x_0 + 20 = 0 \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 10 \end{cases}$$

Las circunferencias pedidas son por tanto:

$C_1 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ y $C_2 : (x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com



(70) Determina los puntos de corte de las siguientes cónicas:

a) $2x^2 - 3y^2 = 6$ con $6x^2 + y^2 = 58$

b) $y^2 = 9x$ con $x^2 = \frac{1}{3}y$

¿De qué cónicas se trataba? Obtén su ecuación reducida y representalas para comprobar tus resultados.

a) $\left.\begin{matrix} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ 6x^2 + y^2 = 58 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\times(-3)} \left.\begin{matrix} -6x^2 + 9y^2 = -18 \\ 6x^2 + y^2 = 58 \end{matrix}\right\}$

$10y^2 = 40 \Rightarrow y^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} y = +2 \\ y = -2 \end{cases}$

$\rightarrow x^2 = \frac{6 + 3y^2}{2}$

$y = 2 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow (3,2) \\ x = -3 \rightarrow (-3,2) \end{cases}$

$y = -2 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow (3,-2) \\ x = -3 \rightarrow (-3,-2) \end{cases}$

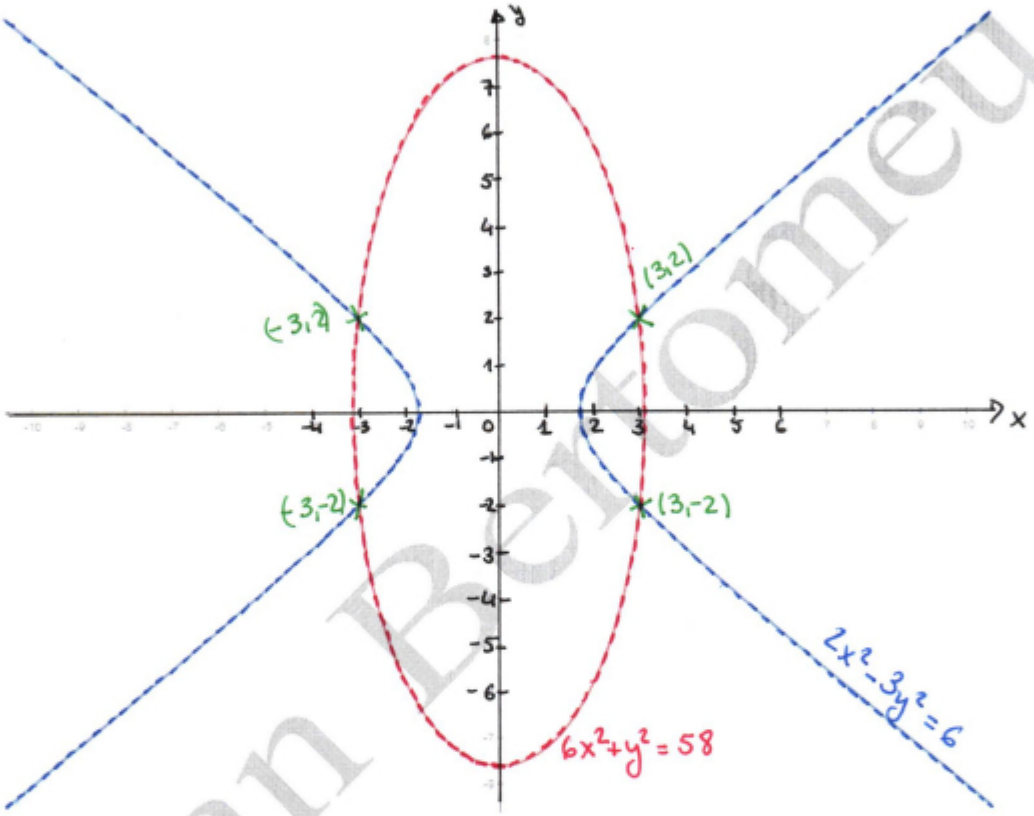
Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Veamos de qué cónicas se trataba:

$2x^2 - 3y^2 = 6 \longrightarrow \frac{2x^2}{6} - \frac{3y^2}{6} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1 \rightarrow$ Hipérbola

$6x^2 + y^2 = 58 \rightarrow \frac{6x^2}{58} + \frac{y^2}{58} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{29/3} + \frac{y^2}{58} = 1 \rightarrow$ Elipse con eje focal vertical

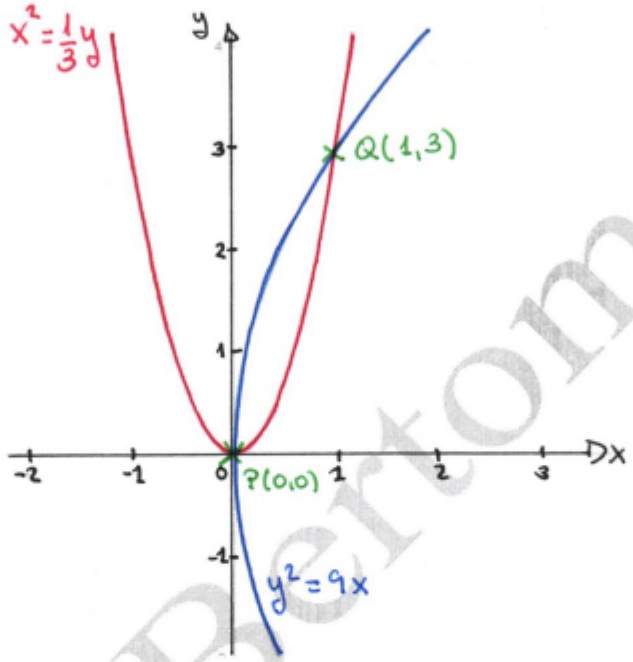


b) $\left.\begin{matrix} y^2 = 9x \\ x^2 = \frac{1}{3}y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x = \frac{y^2}{9} \\ \left(\frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{1}{3}y \end{matrix} \Rightarrow \frac{y^4}{81} = \frac{1}{3}y \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y^4}{27} - y = 0 \Rightarrow y\left(\frac{y^3}{27} - 1\right) = 0 \begin{cases} y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow P(0,0) \\ y = \sqrt[3]{27} = 3 \rightarrow x = 1 \rightarrow Q(1,3) \end{cases}$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

En este caso, las cónicas ya venían dadas en su forma reducida y se trataba de dos parábolas de eje focal horizontal y vertical respectivamente.



(71) Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que su distancia al punto $A(4,0)$ es el doble de su distancia a la recta $x=1$. Describe dicho lugar geométrico.

$$\overrightarrow{AP} = (x,y) - (4,0) = (x-4, y)$$

$$\left.\begin{array}{l} d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-4)^2+y^2} \\ d(P,r) = \dfrac{|x-1|}{\sqrt{1^2}} = |x-1| \end{array}\right\} \Rightarrow d(A,P) = 2\cdot d(P,r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-4)^2+y^2}\right)^2 = \left(2|x-1|\right)^2$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4\cdot(x-1)^2 \Rightarrow x^2-8x+16+y^2 = 4(x^2-2x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-8x+16+y^2 = 4x^2-8x+4 \Rightarrow 3x^2-y^2 = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

Que es la ecuación de una hipérbola con eje focal horizontal y las siguientes características: (centrada en el origen!!)

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ → Eje Mayor $= 2a = 4$
→ $A(2,0)$ $A'(-2,0)$

$b^2 = 12$

$c^2 = a^2+b^2 = 4+12 = 16 \Rightarrow c = 4$ → Distancia focal $= 2c = 8$
→ $F(4,0)$ y $F'(-4,0)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$ (excentricidad)

(72) Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ cuya distancia al punto $A(4,0)$ es igual a la mitad de la distancia a la recta $r: x-16=0$. Describe dicho lugar geométrico.

$\overrightarrow{AP} = (x,y) - (4,0) = (x-4, y)$

$$\left.\begin{array}{l} d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-4)^2+y^2} \\ d(P,r) = \frac{|x-16|}{\sqrt{1^2}} \end{array}\right\} \quad d(A,P) = \frac{1}{2}\, d(P,r) \Rightarrow$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-4)^2+y^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\,|x-16|\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)^2+y^2 = \frac{1}{4}(x^2-32x+256) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-8x+16+y^2 = \frac{1}{4}x^2-8x+64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}x^2+y^2 = 48 \Rightarrow \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48} = 1$$

Que es la ecuación de una elipse centrada en el origen, con eje focal horizontal, y las siguientes características:

$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$
- Eje Mayor $= 2a = 16$
- $A(8,0)$ $A'(-8,0)$

$b^2 = 48 \Rightarrow b = \sqrt{48}$
- Eje Menor $= 2b = 2\sqrt{48}$
- $B(0,\sqrt{48})$ $B'(0,-\sqrt{48})$

$a^2 = b^2+c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$
- Distancia focal $= 2c = 8$
- $F(4,0)$ $F'(-4,0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{(excentricidad)}$$

(73) Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que el producto de las pendientes de las rectas trazadas desde P a los puntos $A(-2,1)$ y $B(2,-1)$ sea igual a 1. Describe dicho lugar geométrico.

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

$\overrightarrow{AP} = (x,y) - (-2,1) = (x+2, y-1) \rightarrow m_A = \frac{V_y}{V_x} = \frac{y-1}{x+2}$

$\overrightarrow{BP} = (x,y) - (2,-1) = (x-2, y+1) \rightarrow m_B = \frac{V_y}{V_x} = \frac{y+1}{x-2}$

$m_A \cdot m_B = 1$

$\frac{y-1}{x+2} \cdot \frac{y+1}{x-2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2-1}{x^2-4} = 1 \Rightarrow y^2 - 1 = x^2 - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$

Que es la ecuación de una hipérbola centrada en el origen, con eje focal horizontal, y las siguientes características:

Centro $C(0,0)$

$a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3} \rightarrow$ Eje Mayor $= 2a = 2\sqrt{3}$
$\quad \rightarrow A(\sqrt{3},0)\ A'(-\sqrt{3},0)$

$b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$ ($a = b \Rightarrow$ Hipérbola Equilátera!!)

$c^2 = a^2 + b^2 = 3+3 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6} \rightarrow$ Distancia focal $= 2c = 2\sqrt{6}$
$\quad \rightarrow F(\sqrt{6},0)\ F'(-\sqrt{6},0)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ (excentricidad)

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com