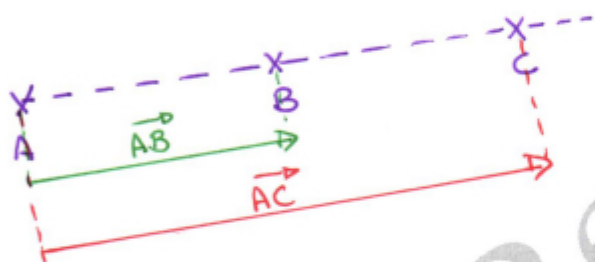


- ① Averigua si están alineados los puntos $A(7, 11)$, $B(4, -3)$ y $C(10, 25)$

Recuerda!! PUNTOS ALINEADOS:

Decimos que tres o más puntos están alineados cuando los vectores que van desde uno de ellos hasta el resto son vectores paralelos

Si A, B y C están alineados, entonces $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$



$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} &= (4, -3) - (7, 11) = (-3, -14) \\ \vec{AC} &= (10, 25) - (7, 11) = (3, 14) \end{aligned} \right\} \frac{-3}{3} = \frac{-14}{14} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son paralelos $\Rightarrow A, B$ y C están alineados.

- ② Calcula el valor de "k" para que los puntos $A(1, 7)$, $B(-3, 4)$ y $C(k, 5)$ estén alineados.

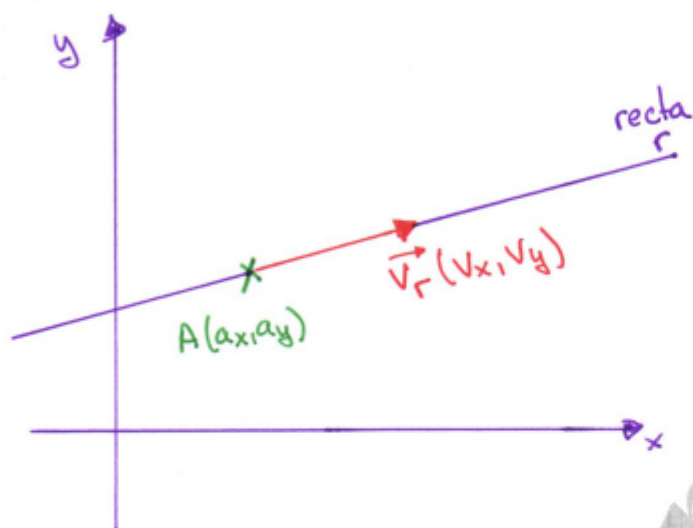
$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} &= (-3, 4) - (1, 7) = (-4, -3) \\ \vec{AC} &= (k, 5) - (1, 7) = (k-1, -2) \end{aligned} \right\} \frac{-4}{k-1} = \frac{-3}{-2} \Rightarrow 8 = -3k + 3$$

$$\Rightarrow -3k = 5 \Rightarrow \boxed{k = -5/3}$$

- ③ Obtén todas las formas posibles de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2,5)$ y $B(3,-5)$

Recuerda!!

ECUACIONES DE LA RECTA:



Para determinar la ecuación de una recta necesitaremos conocer un punto A de la misma y un vector de dirección. Con esta información:

$$(x, y) = (a_x, a_y) + \lambda (V_x, V_y) \quad \text{ECUACIÓN VECTORIAL}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= a_x + \lambda \cdot V_x \\ y &= a_y + \lambda \cdot V_y \end{aligned} \right\}$$

ECUACIONES
PARAMÉTRICAS

$$\rightarrow \lambda = \frac{x - a_x}{V_x}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{y - a_y}{V_y}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{x - a_x}{V_x} = \frac{y - a_y}{V_y}$$

ECUACIÓN
CONTINUA

$$V_y \cdot x - a_x \cdot V_y = V_x \cdot y - a_y \cdot V_x \Rightarrow V_y x - V_x y - a_x V_y + a_y V_x = 0$$

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{ECUACIÓN IMPLÍCITA}$$

$$By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$y = mx + n$$

ECUACIÓN
EXPLÍCITA

$m \equiv$ pendiente

$n \equiv$ ordenada en
el origen

$$\frac{x-a_x}{v_x} = \frac{y-a_y}{v_y} \Rightarrow v_x \cdot (y-a_y) = v_y (x-a_x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-a_y = \frac{v_y}{v_x} (x-a_x) \Rightarrow \boxed{y-a_y = m(x-a_x)}$$

Ecuación PUNTO-PENDIENTE

 $(m \equiv \text{pendiente})$

$$A(-2, 5) \text{ y } B(3, -5)$$

$$\vec{AB} = (3, -5) - (-2, 5) = (5, -10) \Rightarrow \vec{v_r} = (1, -2)$$

→ Ojo!! → Cuando de un vector solo nos interesa su dirección lo podemos simplificar.

$$(x, y) = (-2, 5) + \lambda(1, -2) \quad \text{VECTORIAL}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{array} \right\} \quad \text{PARAMÉTRICAS}$$

$$\underbrace{\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-2}}_{\text{CONTÍNUA}} \Rightarrow -2x-4 = y-5 \Rightarrow \underbrace{2x+y-1=0}_{\text{IMPLÍCITA}}$$

$$y = -2x + 1 \quad \text{EXPLÍCITA} \quad (\text{Pendiente } m = -2)$$

$$\text{Punto-pendiente} \Rightarrow y-5 = -2(x+2)$$

④ Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2,3)$ y $B(3,2)$ en todas sus formas.

Punto: $A(2,3)$

Vector director: $\overrightarrow{AB} = (3,2) - (2,3) = (1,-1) \Rightarrow \overrightarrow{V_r} = (1,-1)$

Vectorial $\rightarrow (x,y) = (2,3) + \lambda(1,-1)$

Paramétricas $\rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \end{array} \right\}$

Continua $\rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1}$

Punto-pendiente $\rightarrow 1(y-3) = -1(x-2) \Rightarrow y-3 = -1(x-2)$

Implícita $\rightarrow -x+2 = y-3 \Rightarrow x+y-5 = 0$

Explícita $\rightarrow y = -x+5$

⑤ Dadas las siguientes ecuaciones, obtén para cada recta un punto y un vector de dirección:

a) $(x, y) = (2, 3) + \lambda(1, 1)$

Punto: $A(2, 3)$

Vector director: $\vec{V}_r = (1, 1)$

b) $r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases} \Rightarrow$ Punto: $A(2, 0)$
Vector director: $\vec{V}_r(-1, 1)$

c) $r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow$ Punto: $A(0, 3)$
Vector director: $\vec{V}_r(2, 0)$

d) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} \rightarrow$ Punto: $A(1, 3)$
 $\rightarrow \vec{V}_r(2, 1)$

e) $r: x+2 = \frac{y}{4} \rightarrow$ Punto: $A(-2, 0)$
 $\rightarrow \vec{V}_r(1, 4)$

f) $r: \frac{2x-1}{3} = \frac{1-y}{4} \Rightarrow \frac{\frac{2x-1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1-y}{-1}}{\frac{4}{-1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x-1/2}{3/2} = \frac{y-1}{-4} \rightarrow$ Punto: $A(1/2, 1)$
 $\rightarrow \vec{V}_r(\frac{3}{2}, -4)$

⑥ Dada la recta de ecuación $y = 2x - 3$, obtener su ecuación en las formas vectorial, paramétrica, continua y general (implícita)

Damos dos valores cualesquiera a "x" para obtener dos puntos:

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \Rightarrow A(0, -3)$$

$$\text{Si } x = 2 \rightarrow y = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \Rightarrow B(2, 1)$$

Conociendo dos puntos, procedemos de forma habitual

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1) - (0, -3) = (2, 4) \Rightarrow \overrightarrow{V_r} (1, 2)$$

$$\text{Vectorial} \rightarrow r: (x, y) = (0, -3) + \lambda (1, 2)$$

$$\text{Paramétricas} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\text{Continua} \rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2}$$

$$\text{General o implícita} \rightarrow 2x = y + 3 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

⑦ Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto medio de $A(3,4)$ y $B(5,-3)$, y por el punto $C(0,3)$. ¿Pertenece el punto $D(1,2)$ a la recta calculada? ¿Y el punto $E(2,3)$?

$$M = P_{n_{AB}} = \left(\frac{a_x + b_x}{2}, \frac{a_y + b_y}{2} \right) = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{4-3}{2} \right) = (4, -1)$$

$$\overrightarrow{CM} = (4, -1) - (0, 3) = (4, -4) \Rightarrow \overrightarrow{V_r} = (1, -1)$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \end{cases}$$

El punto $D(1,2)$ pertenecerá a esta recta si verifica su ecuación. Es decir:

$$1 = 4 + \lambda \Rightarrow \lambda = -3$$

$$2 = -1 - \lambda \Rightarrow \lambda = -3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda$$

El punto D sí que pertenece a r .

Veamos que ocurre con el punto $E(2,3)$:

$$2 = 4 + \lambda \Rightarrow \lambda = -2$$

$$3 = -1 - \lambda \Rightarrow \lambda = -4$$

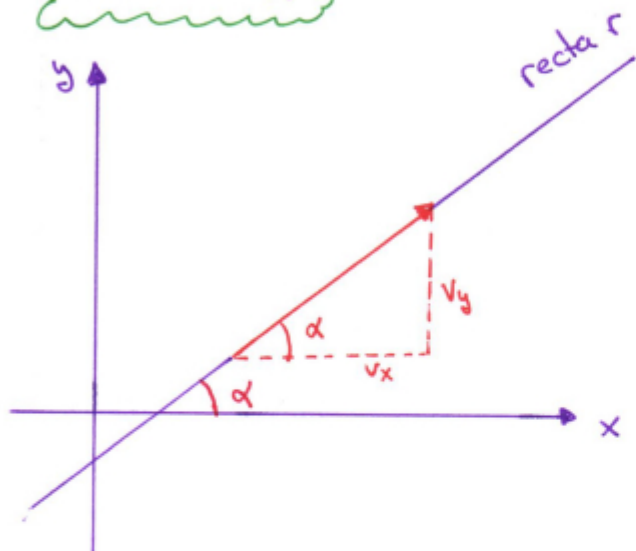
$$\Rightarrow \lambda \neq \lambda$$

El punto E no pertenece a r .

- ⑧ Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2,7)$ y forma un ángulo de 60° con el eje de abscisas.

Recuerda!!

PENDIENTE DE LA RECTA:



Pendiente $\rightarrow m = \frac{v_y}{v_x}$

$\text{tg } \alpha = \frac{v_y}{v_x}$

$m = \text{tg } \alpha$

Ecuación punto-pendiente $\Rightarrow y - a_y = m(x - a_x)$

$A(2,7)$
 $m = \text{tg } 60 = \sqrt{3}$ $\Rightarrow y - 7 = \sqrt{3}(x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{3} - y - 2\sqrt{3} + 7 = 0$

- ⑨ Di cuáles de las siguientes rectas son paralelas a la recta $\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{2}$

a) $2x + 5y - 4 = 0$

b) $2x - 5y + 1 = 0$

c) $5x + 2y = 0$

f) $y = \frac{2}{5}x - 3$

Recuerda!!

PARALELISMO DE RECTAS

Dos rectas r_1 y r_2 son paralelas cuando sus vectores directores $\vec{v}_{r_1}$ y $\vec{v}_{r_2}$ son paralelos, lo que equivale a decir que ambas rectas tienen la misma pendiente. Así:

$$\text{Si } r_1 \parallel r_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \\ (\vec{v}_{r_1} \parallel \vec{v}_{r_2})$$

CONDICIÓN DE
PARALELISMO

Veamos cuál es la pendiente de la recta que nos han dado:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 5 \cdot (y-1) = 2 \cdot (x-2) \Rightarrow y-1 = \frac{2}{5} (x-2) \\ \Rightarrow m = \frac{2}{5}$$

Y ahora veamos qué pendiente tienen las otras rectas

$$a) 2x + 5y - 4 = 0 \Rightarrow 5y = -2x + 4 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5} \Rightarrow m = -\frac{2}{5}$$

Como $m \neq \frac{2}{5} \Rightarrow$ No son paralelas.

$$b) 2x - 5y + 1 = 0 \Rightarrow 5y = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} \Rightarrow m = \frac{2}{5}$$

Como $m = \frac{2}{5} \Rightarrow$ Son paralelas

$$c) 5x + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -5x \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

Como $m \neq \frac{2}{5} \Rightarrow$ No son paralelas

$$d) y = \frac{2}{5}x - 3 \Rightarrow m = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{Son paralelas}$$

10) Di cuáles de las siguientes rectas es perpendicular a la recta de ecuación $x - 2y + 4 = 0$

Recuerda !!

PERPENDICULARIDAD DE RECTAS

Dos rectas r_1 y r_2 son perpendiculares cuando sus vectores directores $\vec{v}_{r_1}$ y $\vec{v}_{r_2}$ son perpendiculares, lo que equivale a decir que el producto de sus pendientes es igual a -1 . Veámoslo:

$$\text{Sean } \vec{v}_{r_1} = (v_{1x}, v_{1y}) \text{ y } \vec{v}_{r_2} = (v_{2x}, v_{2y})$$

$$\text{Como } r_1 \perp r_2 \Rightarrow \vec{v}_{r_1} \perp \vec{v}_{r_2} \Rightarrow \vec{v}_{r_1} \cdot \vec{v}_{r_2} = 0$$

$$v_{1x} \cdot v_{2x} + v_{1y} \cdot v_{2y} = 0 \Rightarrow v_{1x} \cdot v_{2x} = -v_{1y} \cdot v_{2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_{1x}}{v_{1y}} = -\frac{v_{2y}}{v_{2x}} \Rightarrow \text{Como } m = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \frac{1}{m_1} = -m_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 \cdot m_1 = -1$$

Así:

$$\text{Si } r_1 \perp r_2 \Rightarrow \vec{v}_{r_1} \perp \vec{v}_{r_2} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \\ (\vec{v}_{r_1} \cdot \vec{v}_{r_2}) = 0$$

CONDICIÓN DE
PERPENDICULARIDAD

Veamos cuál es la pendiente de la recta que nos han dado:

$$x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow 2y = x + 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

Por tanto serán perpendiculares a la recta que nos han dado aquellas que tengan:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{1/2} = -2$$

Así:

a) $\left. \begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 1-2t \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -2) \Rightarrow m = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow \text{Si que es perpendicular a la recta dada.}$

b) $\left. \begin{array}{l} x = 1-2t \\ y = 3+t \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = (-2, 1) \Rightarrow m = \frac{1}{-2} \neq -2 \Rightarrow \text{No es perpendicular a la recta dada.}$

c) $2x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 2x + 5 \Rightarrow m = 2 \neq -2 \Rightarrow \text{No es perpendicular a la recta dada.}$

$$d) \quad 1-x = \frac{3y-4}{6} \Rightarrow \frac{\frac{1-x}{-1}}{\frac{1}{-1}} = \frac{\frac{3y-4}{3}}{\frac{6}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4/3}{2} \Rightarrow \vec{V}_r = (-1, 2) \Rightarrow m = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow \text{Si}$$

que es perpendicular a la recta dada

11) Halla una perpendicular y una paralela a la recta

$$r: \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-2} \text{ que pasen por el punto } (7, -5)$$

$$r: \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-2} \Rightarrow 3(y-1) = -2(x+5) \Rightarrow y-1 = -\frac{2}{3}(x+5)$$

$$\text{Paralela} \Rightarrow m = -2/3$$

$$y+5 = -\frac{2}{3}(x-7) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 1/3$$

$$\text{Perpendicular} \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{-2/3} = \frac{3}{2}$$

$$y+5 = \frac{3}{2}(x-7) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{31}{2}$$

Otra forma:

$$\text{Como } \vec{V}_r = (3, -2)$$

$$\text{Paralela} \rightarrow \vec{V}_s = (3, -2)$$

$$\text{Perpendicular} \rightarrow \vec{V}_s = (2, 3)$$

$$S_{\text{paralela}}: \begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = -5 - 2\lambda \end{cases}$$

$$S_{\text{perpendicular}}: \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \end{cases}$$

- ⑫ Halla la recta $r_1 \parallel r: 5x - y + 4 = 0$ que pase por $A(3, -5)$ y la recta $r_2 \perp r$ que pase por $B(1, 4)$

$$r: 5x - y + 4 = 0 \Rightarrow y = 5x + 4 \Rightarrow m = 5$$

Utilizamos la ecuación $y - a_y = m(x - a_x)$

$$\text{Si } r_1 \parallel r \Rightarrow m_1 = m = 5$$

$$y + 5 = 5(x - 3) \Rightarrow y = 5x - 20$$

$$\text{Si } r_2 \perp r \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{5}$$

$$y - 4 = -\frac{1}{5}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{21}{5}$$

- ⑬ Dada la recta $r: \frac{x+5}{2} = \frac{y}{-5}$, halla

- Las ecuaciones paramétricas de $r_1 \perp r$ que pase por $(-2, 0)$
- La ecuación implícita de $r_2 \parallel r$ que pase por $(0, -3)$
- La ecuación explícita de $r_3 \perp r$ que pase por $(-3, 5)$

La recta $r: \frac{x+5}{2} = \frac{y}{-5}$ tiene $\vec{V}_r = (2, -5)$

$\xrightarrow{\text{Paralelos}} \vec{V}_{r_1} = (2, -5)$
 $\xrightarrow{\text{perpendiculares}} \vec{V}_{r_3} = (5, 2)$

$$a) r_1: \frac{x+2}{5} = \frac{y}{2} \Rightarrow r_1: \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$$

$$b) r_2: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-5} \Rightarrow -5x = 2y+6 \Rightarrow 5x+2y+6=0$$

$$c) r_3: \frac{x+3}{5} = \frac{y-5}{2} \Rightarrow 2x+6 = 5y-25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y = 2x+31 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{31}{5}$$

(14) Dada la recta $r: y = -2x+5$, halla:

a) Las ecuaciones paramétricas de una recta r_1 paralela a r que pase por $(0, -2)$

b) La ecuación explícita de una recta r_2 paralela a r y de otra r_3 perpendicular a r y que ambas pasen por $(0, 1)$

c) La ecuación implícita de una recta r_4 perpendicular a r y que pase por $(-2, 5)$

La recta $r: y = -2x + 5$ que nos han dado tiene

$m_r = -2$ y como $m = \frac{V_y}{V_x}$, un vector director de r

será $\vec{V}_r = (1, -2)$. Así:

$$a) \quad r_1 \parallel r \Rightarrow \vec{V}_{r_1} = \vec{V}_r = (1, -2)$$

$$r_1: \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$$

$$b) \quad r_2 \parallel r \Rightarrow m_2 = m_r = -2$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = -2x + n \xRightarrow{(0,1)} 1 = -2 \cdot 0 + n \Rightarrow n = 1$$

$$\Rightarrow r_2: y = -2x + 1$$

$$r_3 \perp r \Rightarrow m_3 = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + n \xRightarrow{(0,1)} 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + n \Rightarrow n = 1$$

$$\Rightarrow r_3: y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$c) \quad r_4 \perp r \Rightarrow m_4 = -\frac{1}{m_r} = \frac{1}{2}$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + n \xRightarrow{(-2,5)} 5 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + n \Rightarrow n = 6$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 6 \Rightarrow 2y = x + 12 \Rightarrow r_4: x - 2y + 12 = 0$$

15) Dada la recta $s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$, halla:

- La ecuación continua de una recta r_1 perpendicular a s que pase por $P_1(5, -3)$.
- La ecuación implícita de r_2 paralela a s que pase por $P_2(0, 4)$.
- La ecuación explícita de r_3 perpendicular a s que pase por $P_3(-3, 0)$.

La recta $s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$ tiene $P \in s(5, 0)$. Así:
 $\vec{v}_s = (-1, 3)$

$$a) r_1 \perp s \Rightarrow \vec{v}_{r_1} \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_{r_1} = (3, 1)$$

$$\Rightarrow r_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y+3}{1}$$

$$b) r_2 \parallel s \Rightarrow \vec{v}_{r_2} = \vec{v}_s = (-1, 3)$$

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-4}{3} \Rightarrow 3x = -y + 4 \Rightarrow r_2: 3x + y - 4 = 0$$

$$c) r_3 \perp s \Rightarrow \vec{v}_{r_3} \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_{r_3} = (3, 1)$$

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y}{1} \Rightarrow r_3: y = \frac{1}{3}x + 1$$

①6 Determina la posición relativa de las rectas

$$r_1: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 5\lambda \end{cases} \quad y \quad r_2: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 6 - t \end{cases}$$

En el caso de que se corten, determina el punto de corte.

Recuerda!!

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS:

Dadas dos rectas en forma general

$$r_1: Ax + By + C = 0 \quad r_2: A'x + B'y + C' = 0$$

Entonces, si:

$$\rightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \Rightarrow \text{Las rectas se cortan (secantes)}$$

$$\rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \Rightarrow \text{Las rectas son paralelas}$$

$$\rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \Rightarrow \text{Las rectas son coincidentes}$$

En el caso de que se corten, determinaremos el punto de corte resolviendo el sistema

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A'x + B'y + C' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$r_1: \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -5 - 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{-5} \Rightarrow -5x+5 = 2y+10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1: 5x + 2y + 5 = 0$$

$$r_2: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 6 - t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+4}{1} = \frac{y-6}{-1} \Rightarrow -x-4 = y-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2: x + y - 2 = 0$$

$\Rightarrow \frac{5}{1} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow$ Las rectas se cortan. Para determinar el punto de corte resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y = -5 \\ (x + y = 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5x + 2y = -5 \\ -2x - 2y = -4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ -2E_2 \end{array}$$

$$\underline{\hspace{10em}} 3x = -9 \Rightarrow x = -3$$

$$\Rightarrow y = 2 - x = 2 - (-3) = 5$$

El punto de corte es $P(-3, 5)$

⑫ Determina la posición relativa de las rectas

$$r_1: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \end{cases} \quad y \quad r_2: \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 3 + 10t \end{cases}$$

$$r_1: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-1}{5} \Rightarrow 5x = 2y - 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow r_1: 5x - 2y + 2 = 0$$

$$r_2: \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 3 + 10t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-8}{4} = \frac{y-3}{10} \Rightarrow 10x - 80 = 4y - 12 \Rightarrow \\ \Rightarrow r_2: 10x - 4y - 68 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{-68}{2} \Rightarrow \text{Las rectas son paralelas}$$

(18) Determina la posición relativa de las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \end{cases} \quad y \quad r_2: \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 21 + 10t \end{cases}$$

$$r_1: 5x - 2y + 2 = 0 \quad (\text{Es la misma que el ejercicio anterior})$$

$$r_2: \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 21 + 10t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-8}{4} = \frac{y-21}{10} \Rightarrow 10x - 80 = 4y - 84 \\ \Rightarrow r_2: 10x - 4y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{-4}{-2} = \frac{4}{2} \Rightarrow \text{Las rectas son coincidentes.}$$

- 19) Estudiar en función de los valores del parámetro "a" la posición relativa de las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = a - 3\lambda \end{cases} \quad y \quad r_2: \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 9 + 6t \end{cases}$$

$$r_1: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = a - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-a}{-3} \Rightarrow -3x = 2y - 2a \Rightarrow \\ \Rightarrow r_1: 3x + 2y - 2a = 0$$

$$r_2: \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 9 + 6t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-4}{-4} = \frac{y-9}{6} \Rightarrow 6x - 24 = -4y + 36 \Rightarrow \\ \Rightarrow r_2: 6x + 4y - 60 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{-60}{-2a} \Rightarrow 2 = \frac{30}{a} \Rightarrow a = 15$$

Si $a = 15 \rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

Si $a \neq 15 \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

20) Estudia en función de los valores del parámetro "a" la posición relativa de las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = a \cdot \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \end{cases}$$

$$r_1: \begin{cases} x = a \cdot \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow -x = ay - a \Rightarrow \\ \Rightarrow r_1: x + ay - a = 0$$

$$r_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x-1 = -y+3 \Rightarrow \\ \Rightarrow r_2: x + y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{a}{1} = \frac{-a}{-4} \\ \rightarrow 1 = a$$

$$\text{Si } a = 1 \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Paralelas}$$

$$\text{Si } a \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{a}{1} \Rightarrow \text{Secantes}$$

21) Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 7 + \lambda \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

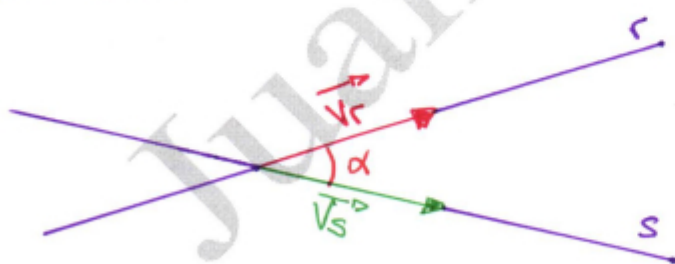
b) $r_1: x + 2y - 17 = 0$ y $r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

c) $r_1: y = 5x - 1$ y $r_2: y = 4x + 3$

d) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$ y $r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

Recuerda!! ÁNGULO ENTRE RECTAS:

Se llama ángulo entre dos rectas al menor de los ángulos que éstas determinan al cortarse.



Si conocemos las pendientes:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right|$$

Si conocemos los vectores directores, lo calcularemos según:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|}$$

→ Ponemos el producto escalar en valor absoluto para obtener siempre ángulos α con $0 \leq \alpha \leq 90$

$$a) \quad r_1: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 7 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{r_1} = (-2, 1)$$

$$r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{r_2} = (-4, 3)$$

$$\vec{v}_{r_1} \cdot \vec{v}_{r_2} = (-2, 1) \cdot (-4, 3) = 8 + 3 = 11$$

$$|\vec{v}_{r_1}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad ; \quad |\vec{v}_{r_2}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_{r_1} \cdot \vec{v}_{r_2}|}{|\vec{v}_{r_1}| \cdot |\vec{v}_{r_2}|} = \frac{|11|}{5 \cdot \sqrt{5}} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{11}{5\sqrt{5}} \right) = 10'305''$$

$$b) \quad r_1: x + 2y - 17 = 0 \Rightarrow 2y = -x + 17 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$r_2: 3x - 5y + 4 = 0 \Rightarrow 5y = 3x + 4 \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|m_2 - m_1|}{|1 + m_2 \cdot m_1|} = \left| \frac{\frac{3}{5} - (-\frac{1}{2})}{1 + \frac{3}{5} \cdot (-\frac{1}{2})} \right| = \left| \frac{11/10}{7/10} \right| = \frac{11}{7}$$

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{11}{7} \right) = 57'529''$$

$$c) \quad r_1: y = 5x - 1 \Rightarrow m_1 = 5 \quad ; \quad r_2: y = 4x + 3 \Rightarrow m_2 = 4$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right| = \left| \frac{4 - 5}{1 + 4 \cdot 5} \right| = \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{21} \right) = 2'726''$$

$$d) r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{r_1} = (-2, 1) \Rightarrow m_1 = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$r_2: 3x - 5y + 4 = 0 \Rightarrow 5y = 3x + 4 \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right| = \left| \frac{\frac{3}{5} - (-\frac{1}{2})}{1 + \frac{3}{5} \cdot (-\frac{1}{2})} \right| = \left| \frac{\frac{11}{10}}{\frac{7}{10}} \right| = \frac{11}{7}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctg \left(\frac{11}{7} \right) = 57'529''$$

② Dadas las rectas $r: 3x + y - 1 = 0$ y $s: 2x + Ky - 8 = 0$ determina el valor de "K" para que formen un ángulo de 45°

$$r: 3x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -3x + 1 \Rightarrow m_r = -3$$

$$s: 2x + K \cdot y - 8 = 0 \Rightarrow Ky = -2x + 8 \Rightarrow y = \frac{-2}{K} \cdot x + \frac{8}{K} \Rightarrow m_s = \frac{-2}{K}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right| \Rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{\frac{-2}{K} + 3}{1 + (\frac{-2}{K}) \cdot (-3)} \right| = \left| \frac{\frac{-2 + 3K}{K}}{\frac{K + 6}{K}} \right|$$

$$\Rightarrow 1 = \left| \frac{-2 + 3K}{K + 6} \right| \Rightarrow \pm 1 = \frac{-2 + 3K}{K + 6}$$

$$1 = \frac{-2 + 3K}{K + 6} \Rightarrow K + 6 = -2 + 3K \Rightarrow 2K = 8 \Rightarrow K = 4$$

$$-1 = \frac{-2 + 3K}{K + 6} \Rightarrow -K - 6 = -2 + 3K \Rightarrow 4K = -4 \Rightarrow K = -1$$

②③ Determina el valor de "k" para que las rectas

$$r: kx + (k+1)y + 8 = 0 \text{ y } s: 5x + 6y - 12 = 0$$

sean paralelas.

Serán paralelas si se cumple que:

$$\frac{k}{5} = \frac{k+1}{6} \neq \frac{8}{-12}$$

$$\hookrightarrow \frac{k}{5} = \frac{k+1}{6} \Rightarrow 6k = 5k+5 \Rightarrow k = 5$$

Comprobamos:

$$\frac{5}{5} = \frac{6}{6} \neq \frac{8}{-12} \Rightarrow \text{Paralelas!!}$$

②④ Determina el valor de "k" para que las rectas

$$r: k^2x + (k+1)y + 8 = 0 \text{ y } s: 16x - 9y - 5 = 0$$

sean perpendiculares.

Si $r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$. Así:

$$r: k^2x + (k+1)y + 8 = 0 \Rightarrow (k+1)y = -k^2x - 8 \Rightarrow y = \frac{-k^2}{k+1}x - \frac{8}{k+1}$$

$$\Rightarrow m_r = \frac{-k^2}{k+1}$$

$$s: 16x - 9y - 5 = 0 \Rightarrow 9y = 16x - 5 \Rightarrow y = \frac{16}{9}x - \frac{5}{9} \Rightarrow m_s = \frac{16}{9}$$

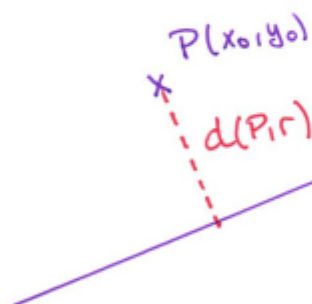
$$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow \frac{-k^2}{k+1} \cdot \frac{16}{9} = -1 \Rightarrow 16k^2 = 9k + 9$$

$$\Rightarrow 16k^2 - 9k - 9 = 0 \begin{cases} \rightarrow k = 1'082 \\ \rightarrow k = -0'52 \end{cases}$$

25) Dados los puntos $P(-6, -3)$ y $Q(9, 5)$ y las rectas $r: 3x - 4y + 9 = 0$ y $s: 5x + 15 = 0$, halla la distancia de cada uno de los puntos a cada una de las rectas.

Recuerda!! DISTANCIA PUNTO RECTA

Dado un punto $P(x_0, y_0)$ y una recta $r: Ax + By + C = 0$, llamamos distancia de P a r , y la representamos por $d(P, r)$, a la mínima distancia que separa a P de r .



$$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

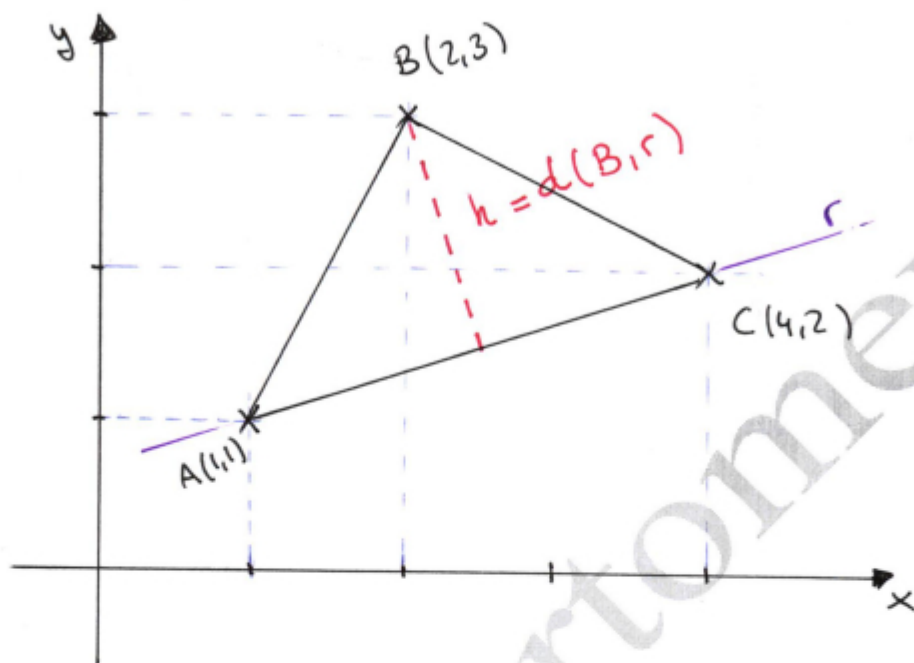
$$d(P, r) = \frac{|3 \cdot (-6) - 4 \cdot (-3) + 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} \text{ u.}$$

$$d(P, s) = \frac{|5 \cdot (-6) + 15|}{\sqrt{5^2}} = \frac{|-15|}{5} = \frac{15}{5} = 3 \text{ u.}$$

$$d(Q, r) = \frac{|3 \cdot (9) - 4 \cdot 5 + 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{16}{5} \text{ u.}$$

$$d(Q, s) = \frac{|5 \cdot 9 + 15|}{\sqrt{5^2}} = \frac{60}{5} = 12 \text{ u.}$$

26) Representa el triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(2,3)$ y $C(4,2)$ y calcula su área utilizando $\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$



Tomaremos como base el lado $\overline{AC}$ (por ejemplo). Por tanto

$$b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ u.}$$

$$\overrightarrow{AC} = (4,2) - (1,1) = (3,1)$$

Determinamos la ecuación de la recta r que pasa por A y C:

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{AC} = (3,1) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1 = 3y-3 \Rightarrow r: x-3y+2=0$$

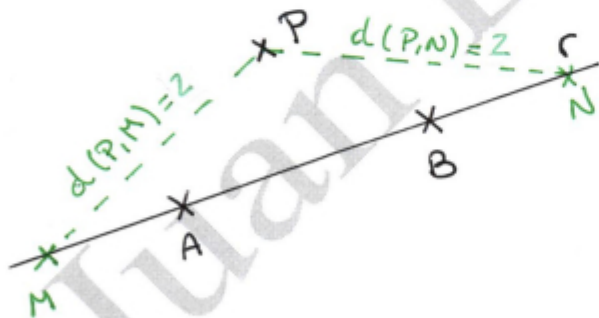
La altura h será la distancia del punto B a la recta r :

$$h = d(B, r) = \frac{|2 - 3 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \mu.$$

Y por tanto, el área pedida:

$$\bar{\text{Área}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}/2}{2} = \frac{10}{4} = 2.5 \mu^2$$

②7) Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,1)$ y $B(2,3)$, y sea P el punto $(1,3)$. Averigua los puntos M y N de la recta r que están a 2 unidades de distancia de P .



$$\vec{AB} = (2,3) - (1,1) = (1,2)$$

Por tanto:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$M \in r = (1 + \lambda, 1 + 2\lambda)$$

$$\vec{PM} = (1 + \lambda, 1 + 2\lambda) - (1, 3) = (\lambda, 2\lambda - 2)$$

$$d(P, M) = 2 \Rightarrow |\vec{PM}| = 2$$

$$\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda - 2)^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 4} = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{5\lambda^2 - 8\lambda + 4}\right)^2 = (2)^2$$

$$\Rightarrow 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 4 \Rightarrow 5\lambda^2 - 8\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(5\lambda - 8) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ 5\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 8/5 \end{cases}$$

$$\text{Como } M \in r(1+\lambda, 1+2\lambda) \begin{cases} \lambda = 0 \rightarrow M(1, 1) \\ \lambda = 8/5 \rightarrow N(13/5, 21/5) \end{cases}$$

28) Calcula el valor de "k" para que la distancia del punto $A(2, k)$ a la recta $r: 6x - 8y + 4 = 0$ sea de 4 unidades.

$$d(A, r) = \frac{|6 \cdot 2 - 8k + 4|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|16 - 8k|}{10} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |16 - 8k| = 40 \Rightarrow 16 - 8k = \pm 40 \begin{cases} 16 - 8k = 40 \Rightarrow k = -3 \\ 16 - 8k = -40 \Rightarrow k = 7 \end{cases}$$

29) Averigua el valor de "b" para que $r: \frac{x+1}{b} = \frac{y+3}{3}$ y $P(-4, 1)$ disten 5 unidades

$$r: \frac{x+1}{b} = \frac{y+3}{3} \Rightarrow 3x+3 = by+3b \Rightarrow r: 3x - by + 3 - 3b = 0$$

$$d(P, r) = 5 \Rightarrow \frac{|3 \cdot (-4) - b \cdot 1 + 3 - 3b|}{\sqrt{3^2 + b^2}} = 5 \Rightarrow$$

$$(1 - 9 - 4b)^2 = (5 \cdot \sqrt{9 + b^2})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-9 - 4b)^2 = 25(9 + b^2) \Rightarrow$$

$$81 + 72b + 16b^2 = 225 + 25b^2 \Rightarrow 9b^2 - 72b + 144 = 0 \Rightarrow$$

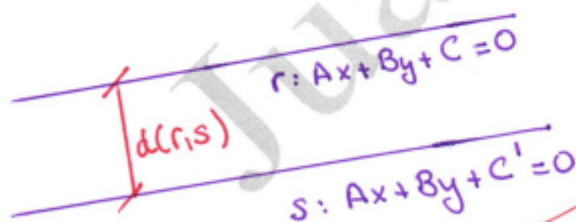
$$\Rightarrow b^2 - 8b + 16 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

30) Calcular la distancia entre las rectas $r: 2x + 3y - 10 = 0$ y

$$s: 4x + 6y + 6 = 0$$

Recuerda!! DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS:

Solo tiene sentido hablar de distancia entre rectas cuando éstas sean paralelas. En otro caso, la distancia sería cero. Para calcularla:



$$d(r,s) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Antes de aplicarla hay que hacer

que los coeficientes A y B sean los mismos en ambas ecuaciones

→ También se puede calcular $d(r,s)$ como la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas hasta la otra recta.

Veamos la posición relativa de r y s :

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} \neq \frac{6}{-10} \Rightarrow \text{Paralelas} \Rightarrow \text{Hay distancia}$$

$$\left. \begin{array}{l} r: 2x + 3y - 10 = 0 \\ s: 4x + 6y + 6 = 0 \end{array} \right\} \text{No podemos aplicar la fórmula porque} \\ \text{no tienen coeficientes iguales. Así:}$$

$$\left. \begin{array}{l} r: 4x + 6y - 20 = 0 \\ s: 4x + 6y + 6 = 0 \end{array} \right\} d(r, s) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 + 20|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \frac{26}{\sqrt{52}} =$$

$$= \frac{26}{2\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \text{ u.}$$

③① Determina las ecuaciones de las rectas paralelas a

$r: \frac{x+1}{-3} = \frac{y-5}{4}$ que están a 8 unidades de distancia de ésta.

$$r: \frac{x+1}{-3} = \frac{y-5}{4} \Rightarrow 4x+4 = -3y+15 \Rightarrow r: 4x+3y-11=0$$

Las rectas " s " que estamos buscando, al ser paralelas a " r " serán de la forma:

$$s: 4x+3y+C=0 \Rightarrow$$

$$d(r,s) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow 8 = \frac{|C + 11|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Rightarrow |C + 11| = 40$$

$$\Rightarrow C + 11 = \pm 40 \begin{cases} \nearrow C = 29 \Rightarrow s_1: 4x + 3y + 29 = 0 \\ \searrow C = -51 \Rightarrow s_2: 4x + 3y - 51 = 0 \end{cases}$$

32) Calcular el valor de "k" para que la distancia entre las rectas $r: 3x + 4y + k = 0$ y $s: 6x + 8y - 5 = 0$ sea de 4 unidades.

$$\left. \begin{array}{l} r: 3x + 4y + k = 0 \rightarrow r: 6x + 8y + 2k = 0 \\ s: 6x + 8y - 5 = 0 \end{array} \right\} d(r,s) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow$$

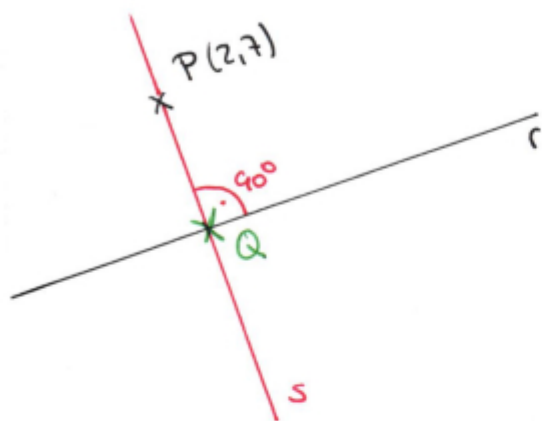
$$\Rightarrow 4 = \frac{|2k + 5|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \Rightarrow |2k + 5| = 40 \Rightarrow 2k + 5 = \pm 40$$

$$\nearrow 2k + 5 = 40 \Rightarrow \boxed{k = 35/2}$$

$$\searrow 2k + 5 = -40 \Rightarrow \boxed{k = -45/2}$$

33) Calcular la distancia del punto $P(2,7)$ a la recta

$r: 6x - 8y + 4 = 0$ SIN UTILIZAR LA FÓRMULA $d(P, r)$.



- Construiremos una recta "s" que pasando por P sea perpendicular a r .
- Calcularemos Q como punto de corte entre r y s .
- Calcularemos $d(P, r)$ como $d(P, Q)$.

$$r: 6x - 8y + 4 = 0 \Rightarrow 8y = 6x + 4 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_r = \frac{3}{4}$$

$$\text{Como } s \perp r \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{3/4} = -\frac{4}{3}$$

$$s: y = mx + n \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + n \xrightarrow{P(2,7)} 7 = -\frac{4}{3} \cdot 2 + n \Rightarrow n = \frac{29}{3}$$

$$\Rightarrow s: y = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$$

Determinamos Q .

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3} \Rightarrow \frac{25}{12}x = \frac{55}{6} \Rightarrow \\ \Rightarrow 25x = 110 \Rightarrow x = \frac{22}{5} \Rightarrow y = \frac{19}{5} \end{array}$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{22}{5}, \frac{19}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{22}{5}, \frac{19}{5} \right) - (2, 7) = \left(\frac{12}{5}, -\frac{16}{5} \right)$$

$$d(P, r) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{400}{25}} = \sqrt{16} = 4 \text{ u.}$$

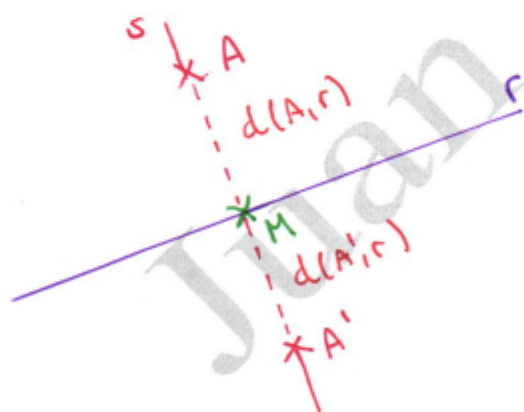
(34) Calcular el punto simétrico del punto $A(2, 3)$ respecto de la recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2}$

Recuerda!! SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UNA RECTA:

Dado un punto A y una recta r , el simétrico de A respecto de r será aquel punto A' que verifica que

$$d(A, r) = d(A', r):$$

Para calcular A' :



- Construiremos por A una recta s perpendicular a r .

- Determinaremos M como punto de corte entre r y s .

- Razcaremos que M es el punto

medio del segmento AA' para obtener las coordenadas de A' .

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow 2x+2 = 3y+3 \Rightarrow r: 2x-3y-1=0$$

$$\vec{v}_r = (3, 2) \Rightarrow s \perp r \Rightarrow \vec{v}_s = (-2, 3)$$

$$s: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x-6 = -2y+6 \Rightarrow s: 3x+2y-12=0$$

Calculamos M como punto de corte entre r y s:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 3x + 2y - 12 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times 2 \rightarrow 4x - 6y - 2 = 0 \\ \times 3 \rightarrow 9x + 6y - 36 = 0 \end{array}$$

$$13x - 38 = 0 \Rightarrow x = \frac{38}{13}$$

$$\hookrightarrow 2y = 12 - 3x \Rightarrow y = \frac{12 - 3x}{2} = \frac{12 - 3 \cdot \frac{38}{13}}{2} = \frac{21}{13}$$

$$\Rightarrow M \left(\frac{38}{13}, \frac{21}{13} \right)$$

M es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$. Así:

$$\left(\frac{38}{13}, \frac{21}{13} \right) = \left(\frac{2 + a'_x}{2}, \frac{3 + a'_y}{2} \right)$$

$$\hookrightarrow \frac{38}{13} = \frac{2 + a'_x}{2} \Rightarrow a'_x = \frac{50}{13}$$

$$\hookrightarrow \frac{21}{13} = \frac{3 + a'_y}{2} \Rightarrow a'_y = \frac{3}{13}$$

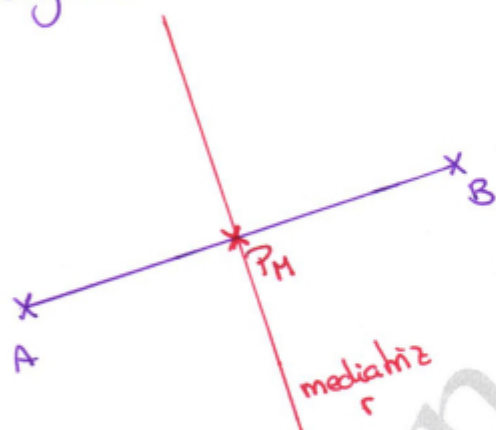
$$A' \left(\frac{50}{13}, \frac{3}{13} \right)$$

③5 Calcular la recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(2,1)$ y $B(4,3)$

Recuerda !!

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO:

La recta mediatriz es la recta perpendicular al segmento trazada por su punto medio, de modo que todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento $\overline{AB}$.



Para determinarla:

- Sacamos el punto medio P_M
- Trazamos por P_M una recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$.

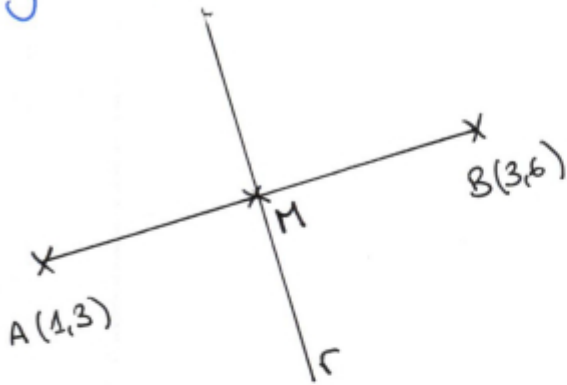
$$P_M = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (3, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4, 3) - (2, 1) = (2, 2) \Rightarrow \overrightarrow{V_r} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{V_r} (-1, 1)$$

Hemos simplificado !!

$$\Rightarrow r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow x-3 = -y+2 \Rightarrow \boxed{r: x+y-5=0}$$

36) Calcular en todas sus formas la recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(1,3)$ y $B(3,6)$



$$M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{3+6}{2} \right) = \left(2, \frac{9}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (3,6) - (1,3) = (2,3)$$

$$\vec{v}_r \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{v}_r = (-3,2)$$

$$\Rightarrow (x,y) = \left(2, \frac{9}{2} \right) + \lambda \cdot (-3,2) \quad \text{Ec. Vectorial}$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = \frac{9}{2} + 2\lambda \end{cases} \quad \text{Ec. Paramétricas}$$

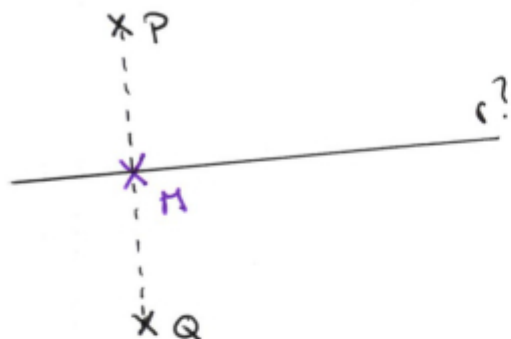
$$\Rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-\frac{9}{2}}{2} \quad \text{Ec. Continua}$$

$$\Rightarrow 2(x-2) = -3(y-\frac{9}{2}) \Rightarrow (y-\frac{9}{2}) = -\frac{2}{3}(x-2) \Rightarrow \text{Pto-pendiente}$$

$$\Rightarrow 2x-4 = -3y + \frac{27}{2} \Rightarrow 2x + 3y - \frac{35}{2} = 0 \Rightarrow \text{Ec. General (implícita)}$$

$$\Rightarrow 3y = -2x + \frac{35}{2} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{35}{6} \Rightarrow \text{Ec. explícita.}$$

- (37) Los puntos $P(3,3)$ y $Q(6,-1)$ son simétricos respecto de una recta. Encuentra la ecuación general de ésta.



Aunque nos lo pregunten así, la recta r que nos están pidiendo es justamente la mediatriz de $\overline{PQ}$. Por tanto:

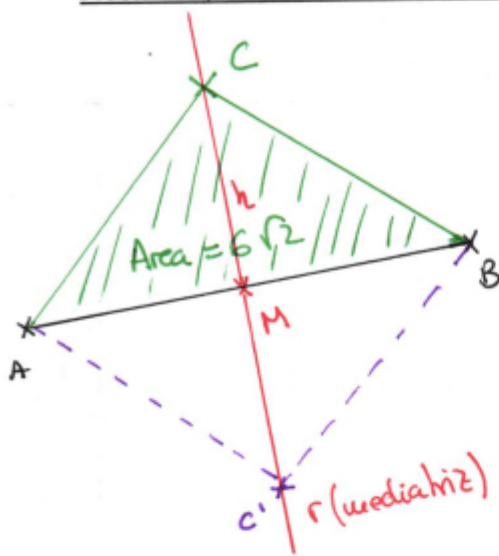
$$M = \left(\frac{3+6}{2}, \frac{3+(-1)}{2} \right) = \left(\frac{9}{2}, 1 \right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (6, -1) - (3, 3) = (3, -4); \quad \vec{V}_r \perp \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \vec{V}_r = (4, 3)$$

$$\Rightarrow r: \frac{x - 9/2}{4} = \frac{y - 1}{3} \Rightarrow 3x - \frac{27}{2} = 4y - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: 3x - 4y - \frac{19}{2} = 0$$

- (38) La base de un triángulo isósceles es el segmento $\overline{AB}$ siendo $A(2,4)$ y $B(4,3)$. El tercer vértice se encuentra sobre la mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Determina el tercer vértice C sabiendo que el área del triángulo $\triangle ABC$ es $6\sqrt{2} \text{ u}^2$.



$$M = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (3, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4, 3) - (2, 1) = (2, 2)$$

$$\vec{v}_r \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{v}_r = (-2, 2) = (-1, 1)$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{MC}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+2^2} \cdot |\vec{MC}|}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot |\vec{MC}|}{2} = \sqrt{2} \cdot |\vec{MC}|$$

$$\text{Área} = 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot |\vec{MC}| = 6 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow |\vec{MC}| = 6$$

$$C \in r \text{ será } C(3 - \lambda, 2 + \lambda)$$

$$\vec{MC} = (3 - \lambda, 2 + \lambda) - (3, 2) = (-\lambda, \lambda)$$

$$|\vec{MC}| = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2} = \sqrt{2\lambda^2}; |\vec{MC}| = 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\lambda^2} = 6 \Rightarrow 2\lambda^2 = 36 \Rightarrow \lambda^2 = 18 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{18}$$

$$\lambda = \sqrt{18} \rightarrow C(3 - \sqrt{18}, 2 + \sqrt{18})$$

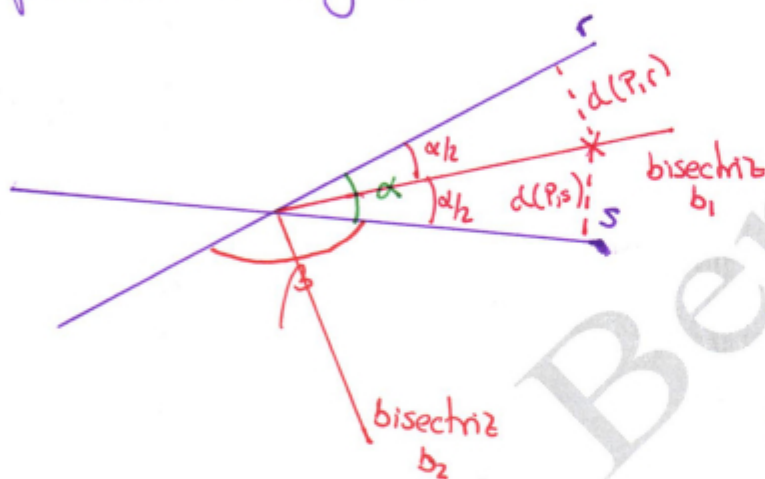
$$\lambda = -\sqrt{18} \rightarrow C'(3 + \sqrt{18}, 2 - \sqrt{18})$$

39) Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas $r: 3x - 4y - 5 = 0$ y $s: 4x - 3y + 8 = 0$

Recuerda!!

ECUACIONES DE LAS BISECTRIZ

Bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas que forman el ángulo.



Para determinar las ecuaciones de las dos bisectrices, razonaremos que un punto cualquiera $P(x,y)$ de la bisectriz está a igual distancia de las dos rectas que determinan el ángulo.

Así:

$$d(P,r) = d(P,s) \Rightarrow \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|A'x + B'y + C'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} r: 3x - 4y - 5 = 0 \\ s: 4x - 3y + 8 = 0 \end{array} \right\} d(P,r) = d(P,s) \Rightarrow \frac{|3x - 4y - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x - 3y + 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$\Rightarrow |3x - 4y - 5| = |4x - 3y + 8| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 4y - 5 = \pm (4x - 3y + 8) \Rightarrow$$

$$3x - 4y - 5 = 4x - 3y + 8 \Rightarrow b_1: x + y + 13 = 0$$

$$3x - 4y - 5 = -4x + 3y - 8 \Rightarrow b_2: 7x - 7y + 3 = 0$$

④ Halla la ecuación de una recta que pasando por el punto $P(1,3)$ forme un ángulo de 45° con la recta "r" que pasa por los puntos $A(1,1)$ y $B(4,2)$. Representalo.

$$\overrightarrow{AB} = (4,2) - (1,1) = (3,1) \Rightarrow \vec{v}_r = (3,1)$$

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x-1 = 3y-3 \Rightarrow 3y = x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow m_r = 1/3$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right| \Rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{1/3 - m_s}{1 + \frac{1}{3} \cdot m_s} \right| \Rightarrow$$

$$1 = \left| \frac{\frac{1-3m_s}{3}}{\frac{3+m_s}{3}} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{1-3m_s}{3+m_s} \right| \Rightarrow \pm 1 = \frac{1-3m_s}{3+m_s}$$

Opción 1: $1 = \frac{1-3m_s}{3+m_s}$

$$3+m_s = 1-3m_s \Rightarrow 4m_s = -2 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{2}$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + n \xRightarrow{P(1,3)} 3 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + n \Rightarrow n = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow S_1: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Opción 2: $-1 = \frac{1-3m_s}{3+m_s}$

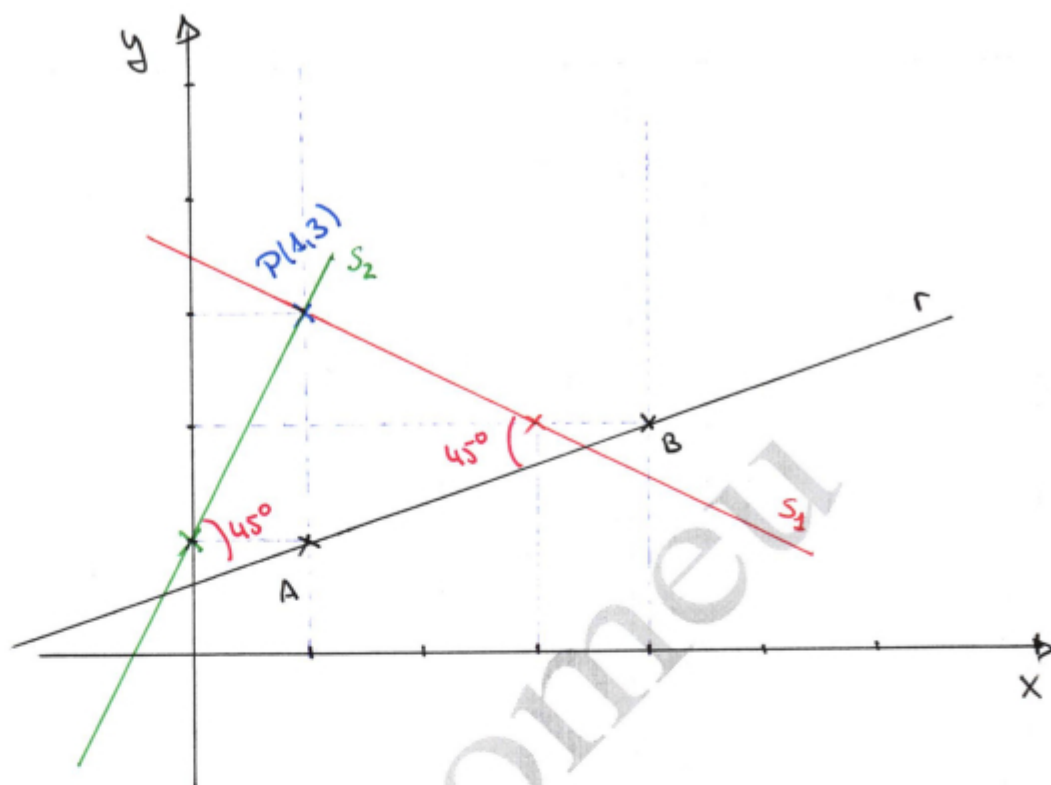
$$-3-m_s = 1-3m_s \Rightarrow 2m_s = 4 \Rightarrow m_s = 2$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = 2x + n \xRightarrow{P(1,3)} 3 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 1$$

$$\Rightarrow S_2: y = 2x + 1$$

Para representar gráficamente el ejercicio basta hacer una tabla de valores para cada recta. Así:

x	$r: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
1	1
4	2
x	$s_1: y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$
1	3
3	2
x	$s_2: y = 2x + 1$
0	1
1	3

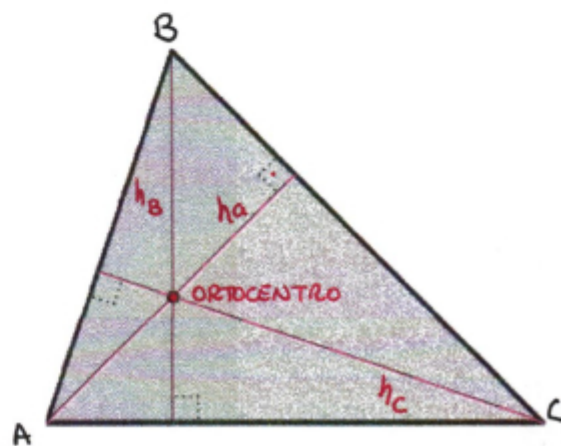


- 41) Dado el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(1,3)$ y $C(4,1)$ calcula su ortocentro, su baricentro y su circuncentro. Comprueba que esos tres puntos están alineados. ¿Cómo llamamos a esa recta? Halla su ecuación y representa todo el ejercicio en unos mismos ejes.

Recuerda!!

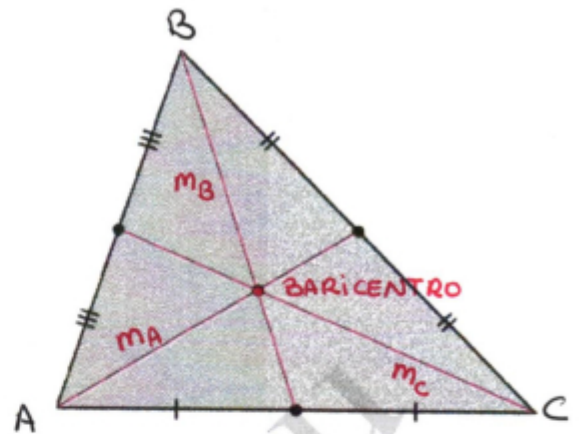
ORTOCENTRO:

La altura de un triángulo es la perpendicular a un lado trazada desde el vértice opuesto. El ortocentro es el punto donde se cortan las alturas.

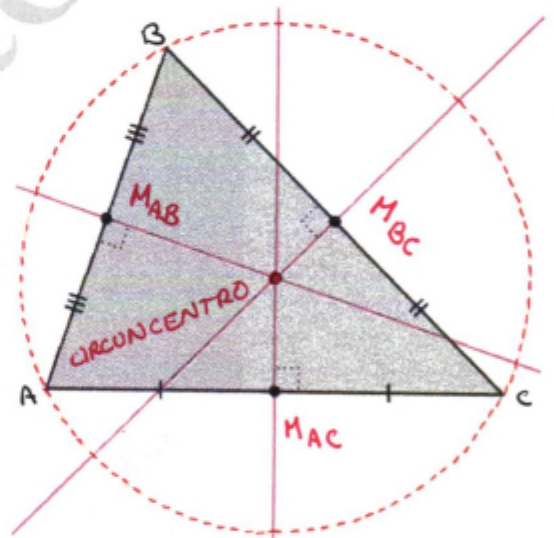


BARICENTRO:

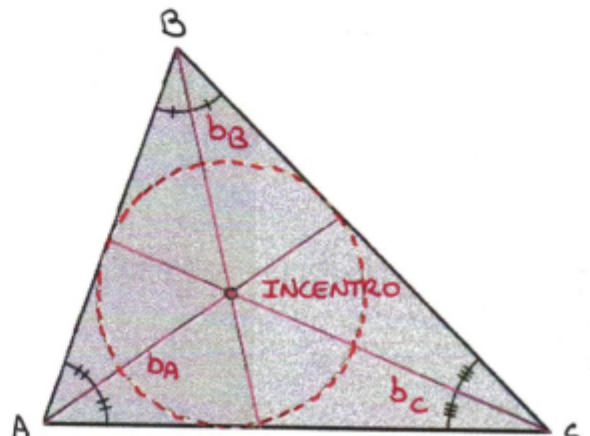
La mediana de un triángulo es una recta que pasa por el punto medio de un lado y el vértice opuesto a ese lado. El baricentro es el punto donde se cortan las medianas.

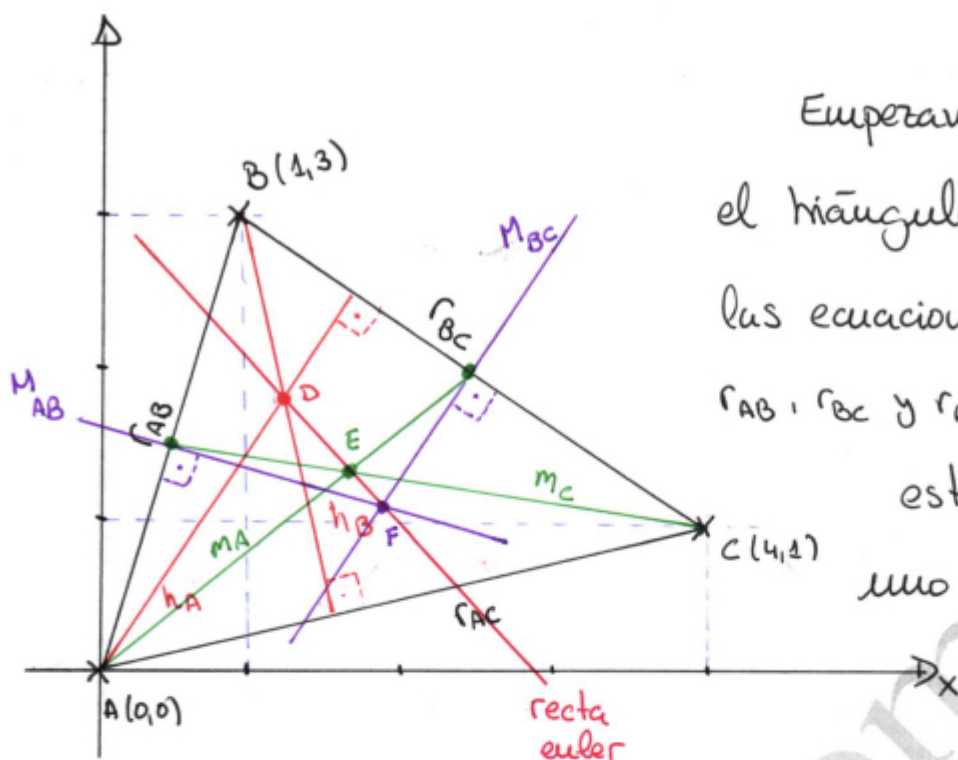
CIRCUNCENTRO:

Es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo que se sitúa en el punto donde se cortan las mediatrices de cada uno de los lados del triángulo.

INCENTRO:

Es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo que se sitúa en el punto donde se cortan las bisectrices de cada uno de los ángulos del triángulo.





Empezamos representando el triángulo y vamos a calcular las ecuaciones de las rectas r_{AB} , r_{BC} y r_{AC} en las que están contenidos cada uno de sus lados. Así:

Recta r_{AB} :

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3) - (0, 0) = (1, 3) \Rightarrow \overrightarrow{V_{r_{AB}}} = (1, 3)$$

$$r_{AB}: \frac{x}{1} = \frac{y}{3} \Rightarrow r_{AB}: y = 3x \Rightarrow m_{r_{AB}} = 3$$

Recta r_{AC} :

$$\overrightarrow{AC} = (4, 1) - (0, 0) = (4, 1) \Rightarrow \overrightarrow{V_{r_{AC}}} = (4, 1)$$

$$r_{AC}: \frac{x}{4} = \frac{y}{1} \Rightarrow r_{AC}: y = \frac{1}{4}x \Rightarrow m_{r_{AC}} = \frac{1}{4}$$

Recta r_{BC} :

$$\overrightarrow{BC} = (4, 1) - (1, 3) = (3, -2) \Rightarrow \overrightarrow{V_{r_{BC}}} = (3, -2)$$

$$r_{BC}: \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow -2x+2 = 3y-9 \Rightarrow r_{BC}: y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3} \Rightarrow m_{r_{BC}} = -\frac{2}{3}$$

ORTOCENTRO

$$h_A \perp r_{BC} \Rightarrow m_{h_A} = \frac{-1}{m_{r_{BC}}} = \frac{-1}{-2/3} = \frac{3}{2}$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + n \Rightarrow 0 = 0 + n \Rightarrow n = 0$$

$A(0,0)$

$$\Rightarrow h_A : y = \frac{3}{2}x$$

$$h_B \perp r_{AC} \Rightarrow m_{h_B} = \frac{-1}{m_{r_{AC}}} = \frac{-1}{1/4} = -4$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = -4x + n \Rightarrow 3 = -4 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 7$$

$B(1,3)$

$$\Rightarrow h_B : y = -4x + 7$$

El ortocentro es el punto de corte de estas alturas. Así:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{2}x \\ y = -4x + 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{2}x = -4x + 7 \Rightarrow \frac{11}{2}x = 7 \Rightarrow x = \frac{14}{11} \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \frac{3}{2} \cdot \frac{14}{11} = \frac{21}{11} \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow D\left(\frac{14}{11}, \frac{21}{11}\right)$$

ORTOCENTRO

BARICENTRO

$$P_{M_{BC}} = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 2 \right)$$

$$\overrightarrow{AP_{M_{BC}}} = \left(\frac{5}{2}, 2 \right) - (0,0) = \left(\frac{5}{2}, 2 \right) \Rightarrow \vec{v}_{m_A} = (5, 4)$$

$$m_A : \frac{x}{5} = \frac{y}{4} \Rightarrow m_A : y = \frac{4}{5}x$$

$$P_{M_{AB}} = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{P_{M_{AB}}C} = (4, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow \vec{V}_{m_c} = (7, -1)$$

$$m_c: \frac{x-4}{7} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow -x+4 = 7y-7 \Rightarrow 7y = -x+11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_c: y = -\frac{1}{7}x + \frac{11}{7}$$

El baricentro es el punto de corte de estas medianas. Así:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{4}{5}x \\ y = -\frac{1}{7}x + \frac{11}{7} \end{array} \right\} \frac{4}{5}x = -\frac{1}{7}x + \frac{11}{7} \Rightarrow \frac{33}{35}x = \frac{11}{7} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{E \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3} \right)}$$

BARICENTRO

CIRCUNCENTRO

$$M_{AB} \perp r_{AB} \Rightarrow m_{M_{AB}} = -\frac{1}{m_{r_{AB}}} = -\frac{1}{3}$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + n \xrightarrow{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)} \frac{3}{2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + n \Rightarrow n = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow M_{AB}: y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$M_{BC} \perp r_{BC} \Rightarrow m_{M_{BC}} = -\frac{1}{m_{r_{BC}}} = -\frac{1}{-2/3} = \frac{3}{2}$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + n \xrightarrow{\left(\frac{5}{2}, 2 \right)} 2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + n \Rightarrow n = -\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow M_{BC}: y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$$

El circuncentro es el punto de corte de estas mediatrices. Así:

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} &= \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{11}{6}x = \frac{41}{12} \Rightarrow x = \frac{41}{22} \\ y &= \frac{3}{2} \cdot \frac{41}{22} - \frac{7}{4} = \frac{23}{22} \Rightarrow \boxed{F\left(\frac{41}{22}, \frac{23}{22}\right)} \end{aligned}$$

CIRCUNCENTRO

Ahora vamos a comprobar que efectivamente los puntos D, E y F calculados están alineados. Para ello basta ver que los vectores $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{DF}$ son paralelos. Así:

$$\overrightarrow{DE} = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{14}{11}, \frac{21}{11}\right) = \left(\frac{13}{33}, \frac{-19}{33}\right)$$

$$\overrightarrow{DF} = \left(\frac{41}{22}, \frac{23}{22}\right) - \left(\frac{14}{11}, \frac{21}{11}\right) = \left(\frac{13}{22}, \frac{-19}{22}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{13}{22}}{\frac{13}{33}} = \frac{\frac{-19}{22}}{\frac{-19}{33}} \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow \overrightarrow{DE} // \overrightarrow{DF} \Rightarrow D, E \text{ y } F \text{ están alineados!!}$$

La recta que contiene al ortocentro, al baricentro, y al circuncentro de un triángulo no equilátero es conocida como **RECTA DE EULER**, y solo nos falta conocer su ecuación para terminar el ejercicio. Por tanto:

$$\vec{V}_{\text{euler}} = (13, -19)$$

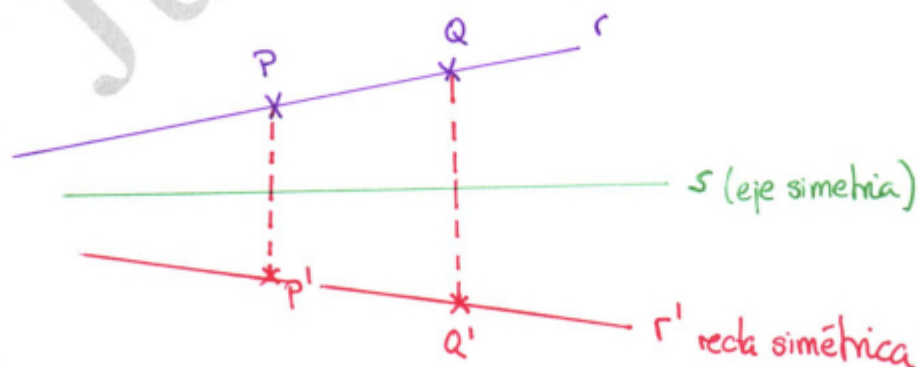
$$r_{\text{euler}}: \frac{x - 5/3}{13} = \frac{y - 4/3}{-19} \Rightarrow -19x + \frac{95}{3} = 13y - \frac{52}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{\text{euler}}: 19x + 13y - 49 = 0$$

- 42) Determina la ecuación de la recta simétrica de $r: -7x + 8y - 49 = 0$ respecto de la recta $s: 2x + 3y - 8 = 0$

Recuerda !! RECTA SIMÉTRICA

La recta simétrica r' de una recta r respecto a otra recta s ("s" será el eje de simetría) se calcula determinando dos puntos cualesquiera P y Q en r y calculando sus simétricos P' y Q' respecto de s . La recta r' que buscamos será la que pase por P' y Q' .



Hallamos P' razonando que M_1 es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$:

$$M_1 = \left(-\frac{47}{13}, \frac{66}{13} \right) = \left(\frac{-7+P'_x}{2}, \frac{0+P'_y}{2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hookrightarrow -\frac{47}{13} = \frac{-7+P'_x}{2} \Rightarrow P'_x = -\frac{3}{13} \\ \hookrightarrow \frac{66}{13} = \frac{P'_y}{2} \Rightarrow P'_y = \frac{132}{13} \end{array} \right\} P' \left(-\frac{3}{13}, \frac{132}{13} \right)$$

Construimos la recta t_2 :

$$t_2 \perp s \Rightarrow m_{t_2} = -\frac{1}{m_s} = \frac{3}{2}$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + n \xrightarrow{Q(1,7)} 7 = \frac{3}{2} \cdot 1 + n \Rightarrow n = \frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow t_2: y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$$

Hallamos M_2 punto de corte entre las rectas t_2 y s :

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - 8 = 0 \\ y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + 3\left(\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}\right) - 8 = 0 \Rightarrow \frac{13}{2}x = -\frac{17}{2} \\ \Rightarrow x = -\frac{17}{13} \end{array}$$

$$\hookrightarrow y = \frac{3}{2}\left(-\frac{17}{13}\right) + \frac{11}{2} = \frac{46}{13} \Rightarrow M_2 \left(-\frac{17}{13}, \frac{46}{13} \right)$$

Hallamos Q' razonando que M_2 es el punto medio del segmento $\overline{QQ'}$:

$$M_2 = \left(-\frac{17}{13}, \frac{46}{13} \right) = \left(\frac{1+q'_x}{2}, \frac{7+q'_y}{2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow -\frac{17}{13} = \frac{1+q'_x}{2} \Rightarrow q'_x = -\frac{47}{13} \\ \rightarrow \frac{46}{13} = \frac{7+q'_y}{2} \Rightarrow q'_y = \frac{1}{13} \end{array} \right\} Q' \left(-\frac{47}{13}, \frac{1}{13} \right)$$

La recta r' que nos pidian es la que pasa por P' y Q' :

$$\overrightarrow{P'Q'} = \left(-\frac{47}{13}, \frac{1}{13} \right) - \left(-\frac{3}{13}, \frac{132}{13} \right) = \left(-\frac{44}{13}, -\frac{131}{13} \right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{r'}} = (44, 131)$$

$$r': \frac{x + 3/13}{44} = \frac{y - \frac{132}{13}}{131} \Rightarrow 131x + \frac{393}{13} = 44y - \frac{5808}{13} \Rightarrow$$

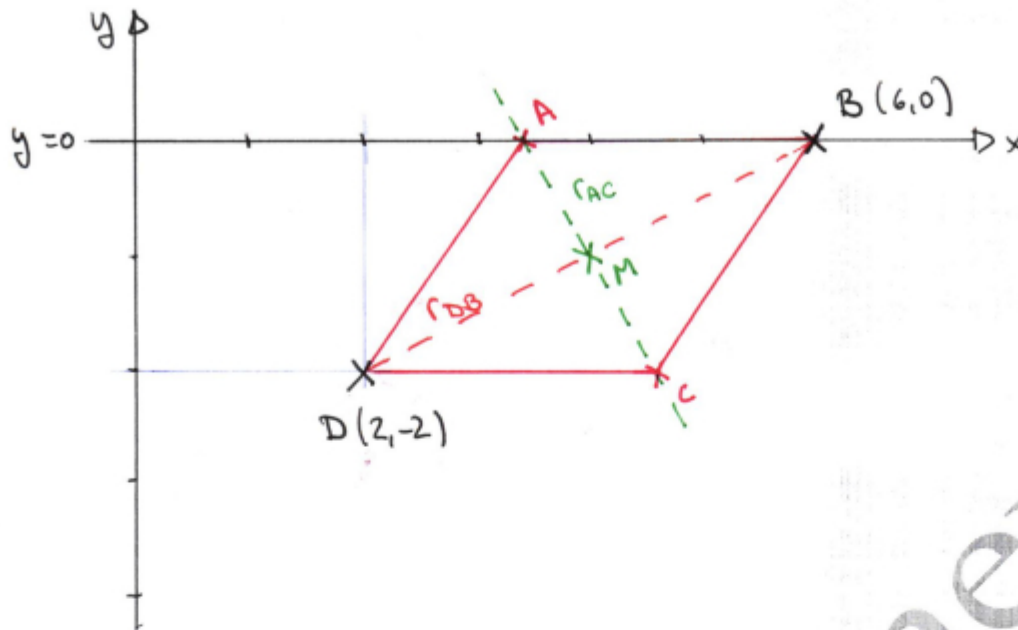
$$\Rightarrow \boxed{r': 131x - 44y + 477 = 0}$$

(43) Un rombo ABCD tiene el vértice A en el eje de abscisas.

Otros dos vértices opuestos son $B(6,0)$ y $D(2,-2)$.

Representa el ejercicio y halla los vértices A y C.

Recuerda!! Un rombo es un paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales y cuyas diagonales se cortan perpendicularmente.



Recta r_{DB} :

$$\overrightarrow{DB} = (6, 0) - (2, -2) = (4, 2) \Rightarrow \vec{r}_{DB} = (2, 1)$$

Recta r_{AC} :

$$r_{AC} \perp r_{DB} \Rightarrow \vec{r}_{AC} \perp \vec{r}_{DB} \Rightarrow \vec{r}_{AC} = (-1, 2)$$

$$M \equiv \text{punto medio segmento } \overline{DB} = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{0-2}{2} \right) = (4, -1)$$

$$\Rightarrow r_{AC}: \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow 2x-8 = -y-1 \Rightarrow r_{AC}: 2x+y-7=0$$

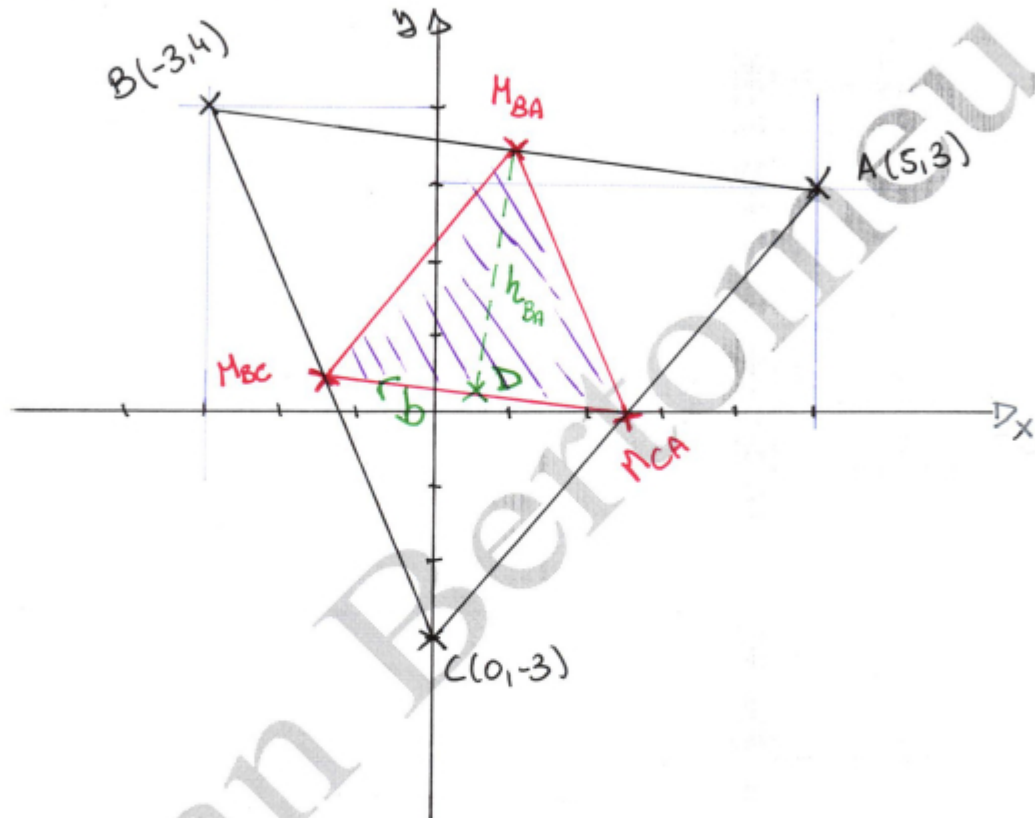
El vértice A es el punto de corte de r_{AC} con el eje X. Así:

$$\left. \begin{array}{l} 2x+y-7=0 \\ y=0 \end{array} \right\} 2x-7=0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \Rightarrow \boxed{A\left(\frac{7}{2}, 0\right)}$$

Para el vértice C es fácil ver que:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB} = (2, -2) + \left(\frac{5}{2}, 0\right) = \left(\frac{9}{2}, -2\right) \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{9}{2}, -2\right)}$$

- ④ Calcular el área del triángulo que se forma cuando se unen los puntos medios de los lados del triángulo que tiene por vértices a los puntos $A(5,3)$, $B(-3,4)$ y $C(0,-3)$. Representarlo.



$$M_{BC} = \left(\frac{-3+0}{2}, \frac{4-3}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$M_{CA} = \left(\frac{0+5}{2}, \frac{3-3}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 0 \right)$$

$$M_{BA} = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{4+3}{2} \right) = \left(1, \frac{7}{2} \right)$$

La base será la distancia de M_{BC} a M_{CA} . Así:

$$\overrightarrow{M_{BC}M_{CA}} = (5/2, 0) - (-3/2, 1/2) = (4, -1/2)$$

$$\Rightarrow \text{base} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{65} \text{ u.}$$

$$r_b: \frac{x - 5/2}{4} = \frac{y}{-1/2} \Rightarrow x - 5/2 = -8y \Rightarrow r_b: x + 8y - 5/2 = 0$$

Determinamos la ecuación de la altura:

$$h_{BA} \perp r_b \Rightarrow \vec{V}_h \perp \vec{V}_r \Rightarrow \vec{V}_h = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

$$h: \frac{x - 1}{1/2} = \frac{y - 7/2}{4} \Rightarrow 8x - 8 = y - 7/2 \Rightarrow h: 8x - y - \frac{9}{2} = 0$$

El punto D se obtiene como punto de corte entre las rectas r_b y h_{BA} . Así:

$$\left. \begin{array}{l} x + 8y - 5/2 = 0 \\ 8x - y - 9/2 = 0 \end{array} \right\} \times 8 \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 8y - 5/2 = 0 \\ 64x - 8y - 36 = 0 \end{array} \right\}$$

$$65x - \frac{77}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{77}{130}$$

$$\hookrightarrow y = 8x - \frac{9}{2} = 8 \cdot \frac{77}{130} - \frac{9}{2} = \frac{31}{130} \Rightarrow D\left(\frac{77}{130}, \frac{31}{130}\right)$$

La altura será la distancia de M_{BA} a D:

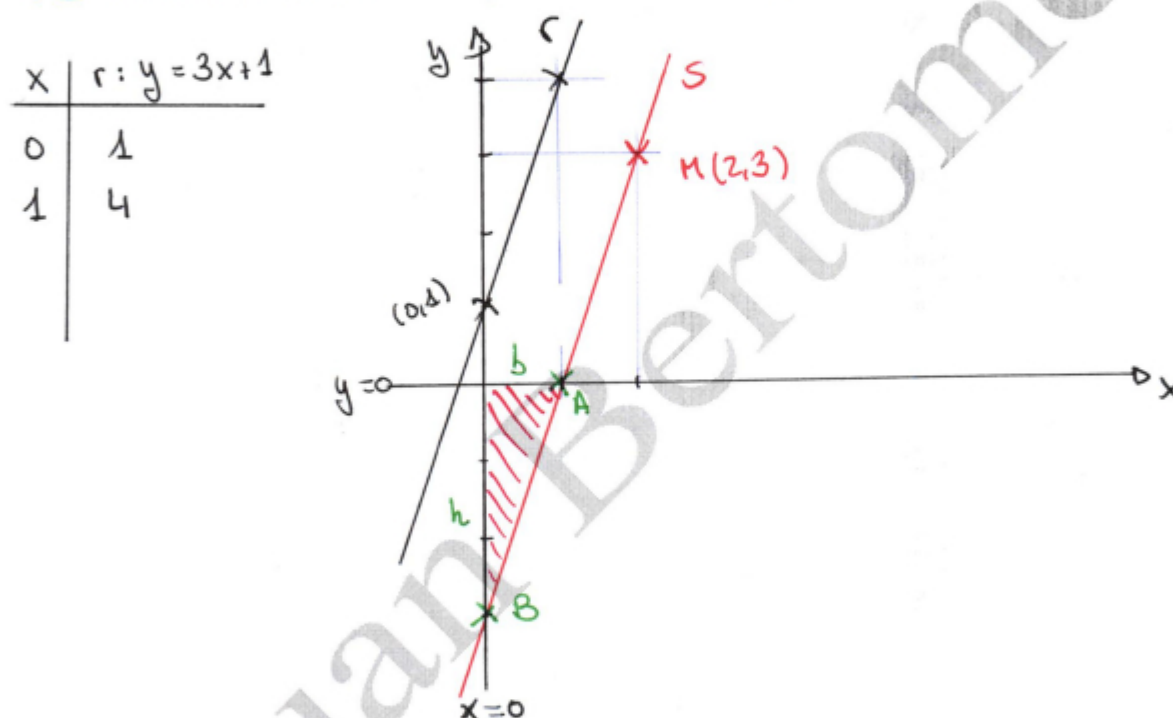
$$\overrightarrow{M_{BA}D} = \left(\frac{77}{130}, \frac{31}{130}\right) - \left(1, \frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{53}{130}, -\frac{212}{65}\right)$$

$$\Rightarrow \text{altura} = h = \sqrt{\left(\frac{53}{130}\right)^2 + \left(\frac{212}{65}\right)^2} = 3.287 \text{ u.}$$

Por último, el área pedida es:

$$\text{Area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 165 \cdot 3'287}{2} = 6'625 = \frac{53}{8} \mu^2$$

- ④5) La recta que pasa por $M(2,3)$ y es paralela a la recta $r: y = 3x + 1$ determina un triángulo con los ejes de coordenadas. Representalo y calcula su área.



Empezamos por determinar la ecuación de la recta s :

$$r: y = 3x + 1 \Rightarrow m_r = 3$$

$$s \parallel r \Rightarrow m_s = m_r = 3$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = 3x + n \Rightarrow 3 = 3 \cdot 2 + n \Rightarrow n = -3$$

$M(2,3)$

$$\Rightarrow s: y = 3x - 3$$

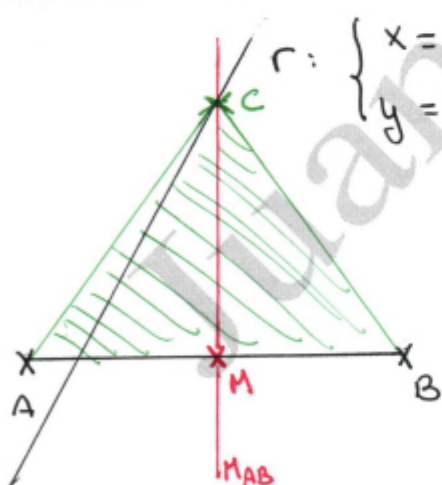
La recta "s" corta a los ejes en los puntos A y B

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - 3 \\ y = 0 \end{array} \right\} 3x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - 3 \\ x = 0 \end{array} \right\} y = -3 \Rightarrow B(0, -3)$$

$$\Rightarrow \text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2} \text{ u}^2.$$

- (46) Los puntos $A(2, 2)$ y $B(-10, -2)$ son los vértices que corresponden al lado desigual de un triángulo isósceles. El otro lado está sobre la recta $r: \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$. Determina las coordenadas del vértice C y calcula el área del triángulo.



$$r: \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{-6} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x-2 = -6y+6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+6y-8=0 \Rightarrow r: x+3y-4=0$$

Construimos la mediatriz M_{AB} :

$$M = \left(\frac{2-10}{2}, \frac{2-2}{2} \right) = (-4, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-10, -2) - (2, 2) = (-12, -4)$$

$$M_{AB} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{V_{MAB}} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{V_{MAB}} = (4, -12) \Rightarrow \overrightarrow{V_{MAB}} = (1, -3)$$

$$M_{AB}: \frac{x+4}{1} = \frac{y}{-3} \Rightarrow -3x-12=y \Rightarrow M_{AB}: 3x+y+12=0$$

El vértice C es el punto de intersección entre r y M_{AB} :

$$\left. \begin{array}{l} x+3y-4=0 \\ 3x+y+12=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times (-3) \\ \hline \end{array} \left. \begin{array}{l} -3x-9y+12=0 \\ 3x+y+12=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \hline -8y+24=0 \Rightarrow y=3 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 4-3y = 4-9 = -5 \Rightarrow \boxed{C(-5, 3)}$$

$$\text{base} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{12^2+4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ u.}$$

$$\overrightarrow{CM} = (-4, 0) - (-5, 3) = (1, -3)$$

$$\text{altura} = |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \text{ u.}$$

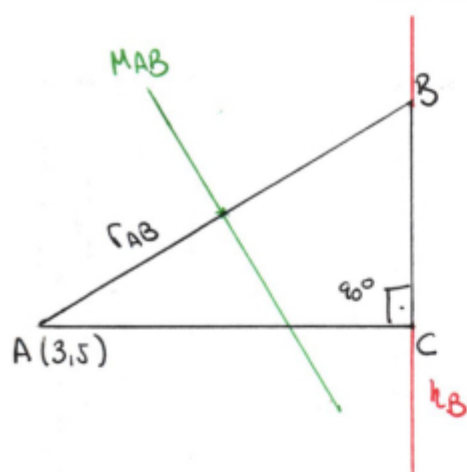
$$\Rightarrow \text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ u}^2$$

(47) En un triángulo rectángulo en C , conocemos el vértice

$A(3, 5)$, la ecuación de la mediatriz del lado AB ,

$M_{AB}: x-2y+2=0$, y la altura que pasa por B , $h_B: 3x-y-14=0$

calcula los vértices B y C .



$$M_{AB}: x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow 2y = x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow m_{M_{AB}} = \frac{1}{2}$$

Construimos r_{AB} :

$$r_{AB} \perp M_{AB} \Rightarrow m_{r_{AB}} = \frac{-1}{m_{M_{AB}}} = -2$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = -2x + n \Rightarrow \underset{(3,5)}{5} = -6 + n \Rightarrow n = 11$$

$$\Rightarrow r_{AB}: y = -2x + 11$$

El vértice B es el punto de corte entre r_{AB} y h_B . Así:

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + 11 \\ 3x - y - 14 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3x + 2x - 11 - 14 = 0 \Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow x = 5 \\ \rightarrow y = -2 \cdot 5 + 11 = 1 \Rightarrow \boxed{B(5,1)} \end{array}$$

Del vértice C sabemos que está sobre la recta h_B . Por tanto C tendrá la forma:

$$h_B: 3x - y - 14 = 0 \Rightarrow y = 3x - 14 \Rightarrow C(x, 3x - 14)$$

Al ser rectángulo en C, los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$ serán perpendiculares.

$$\overrightarrow{AC} = (x, 3x - 14) - (3, 5) = (x - 3, 3x - 19)$$

$$\overrightarrow{CB} = (5, 1) - (x, 3x - 14) = (5 - x, -3x + 15)$$

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

$$(x-3, 3x-19) \cdot (5-x, -3x+15) = 0$$

$$(x-3) \cdot (5-x) + (3x-19)(-3x+15) = 0$$

$$5x - x^2 - 15 + 3x - 9x^2 + 45x + 57x - 285 = 0$$

$$-10x^2 + 110x - 300 = 0$$

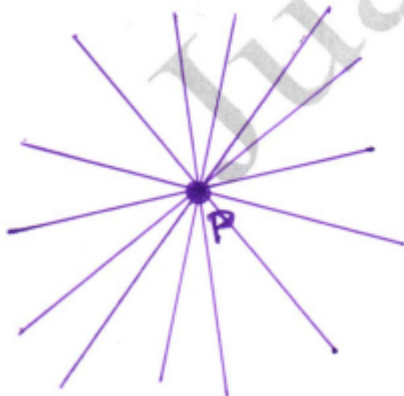
$$x^2 - 11x + 30 = 0$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow x=5 \rightarrow C(5,1) \quad \text{No sirve. Este es B!!} \\ &\rightarrow x=6 \rightarrow C(6,4) \end{aligned}$$

(48) Dado el haz de rectas de centro $(3, -2)$; escribe su ecuación y di:

- Qué recta del haz pasa por $(-1, 5)$
- Qué recta del haz es paralela a $s: 2x + y = 0$
- Qué recta del haz dista 3 unidades del origen $(0, 0)$.

Recuerda!! HAZ DE RECTAS SECANTES:



llamamos haz de rectas secantes con centro en un punto $P(x_0, y_0)$ al conjunto de todas las rectas que se cortan en P . Su ecuación es:

$$\text{HAZ: } a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

La ecuación del haz con centro en $P(3, -2)$ viene dada por:

$$\text{HAZ: } a(x-3) + b(y+2) = 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Esta ecuación solemos operarla para que solo tengamos una incógnita, según:

$$a(x-3) + b(y+2) = 0$$

$$b(y+2) = -a(x-3)$$

$$(y+2) = -\frac{a}{b}(x-3) \Rightarrow y+2 = m(x-3)$$

Sin embargo, para hacer esto, tiene que ser $b \neq 0$, o dicho de otra manera, estamos quitando una de las rectas del haz (aquella que sale siendo $b=0$). Veamos cuál es:

$$b=0 \rightarrow a(x-3) + 0 \cdot (y+2) = 0 \Rightarrow x=3$$

Con lo que nuestro haz de rectas puede escribirse como

$$\text{HAZ: } \begin{cases} y+2 = m(x-3) & \forall m \in \mathbb{R} \\ x=3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } Q(-1, 5) &\Rightarrow y+2 = m(x-3) \\ 5+2 &= m(-1-3) \Rightarrow m = -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r: y+2 = -\frac{7}{4}(x-3) \Rightarrow 4y+8 = -7x+21 \Rightarrow \boxed{r: 7x+4y-13=0}$$

$$b) \quad s: 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow m_s = -2$$

$$\text{Si } r \parallel s \Rightarrow m_r = m_s = -2$$

$$\Rightarrow y + 2 = -2(x - 3) \Rightarrow y + 2 = -2x + 6 \Rightarrow \boxed{r: 2x - y - 8 = 0}$$

$$c) \quad y + 2 = m(x - 3) \Rightarrow y + 2 = mx - 3m \Rightarrow mx - y - 3m - 2 = 0$$

$$d(0, r) = \frac{|m \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|-3m - 2|)^2 = (3 \cdot \sqrt{m^2 + 1})^2$$

$$\Rightarrow \cancel{9m^2} + 12m + 4 = \cancel{9m^2} + 9 \Rightarrow 12m = 5 \Rightarrow m = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow r: \frac{5}{12}x - y - \frac{15}{12} - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{r: 5x - 12y - 39 = 0}$$

④⑨ Determina el centro del haz de rectas de ecuación

$$3kx + 2y - 3k + 4 = 0$$

Hemos visto que:

$$\text{HAZ: } a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$\Downarrow$

$$b(y - y_0) = -a(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = -\frac{a}{b}(x - x_0) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \neq 0$$

$\Downarrow$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - y_0 = mx - mx_0 \Rightarrow mx - y - mx_0 + y_0 = 0$$

$$3Kx + 2y - 3K + 4 = 0 \quad (\text{Dividimos entre } -2)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{3}{2}Kx - y + \frac{3}{2}K - 2 &= 0 \\ mx - y - mx_0 + y_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Identificando}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{3}{2}K$$

$$-m \cdot x_0 = \frac{3}{2}K$$

$$\frac{3}{2}K x_0 = \frac{3}{2}K$$

$$\Downarrow$$

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = -2$$

$P(1, -2)$ es el centro del haz.

- 50) Las rectas $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ forman parte del mismo haz de rectas. Averigua la recta t de dicho haz que tiene pendiente -2 .

Las rectas que pertenecen al mismo haz se cortan en el centro P del haz. Así:

$$\left. \begin{aligned} y &= 3 \\ y &= 2x - 1 \end{aligned} \right\} 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow P(2, 3)$$

$$\Rightarrow \text{HAZ: } \begin{cases} y - 3 = m(x - 2) \quad \forall m \in \mathbb{R} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Si } m = -2 \Rightarrow t: y - 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y - 3 = -2x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t: 2x + y - 7 = 0}$$

- 51) Calcular el valor de "k" para que la recta $3x + ky - 2 = 0$ forme un ángulo de 60° con el eje X.

$$3x + ky - 2 = 0 \Rightarrow ky = -3x + 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{k}x + \frac{2}{k} \Rightarrow m = -\frac{3}{k}$$

Sabemos que $m = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow$

$$-\frac{3}{k} = \operatorname{tg} 60 \Rightarrow -\frac{3}{k} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{k = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}}$$

- 52) Calcular α y β sabiendo que $P(1,4)$ pertenece a r , y que r y s forman 45° , siendo

$$r: \alpha x - 2y + 5 = 0 \quad s: \beta x + 6y - 8 = 0$$

$$\text{Si } P \in r \rightarrow \alpha \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3}$$

$$r: \alpha x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y = \alpha x + 5 \Rightarrow y = \left(\frac{\alpha}{2}\right)x + \frac{5}{2} \Rightarrow m_r = \frac{\alpha}{2}$$

$$s: \beta x + 6y - 8 = 0 \Rightarrow 6y = -\beta x + 8 \Rightarrow y = \left(-\frac{\beta}{6}\right)x + \frac{4}{3} \Rightarrow m_s = -\frac{\beta}{6}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right| \Rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{\alpha/2 + \beta/6}{1 + \frac{\alpha}{2} \cdot \left(-\frac{\beta}{6}\right)} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \left| \frac{\frac{6\alpha + 2\beta}{12}}{\frac{12 - \alpha\beta}{12}} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{6\alpha + 2\beta}{12 - \alpha\beta} \right| \Rightarrow \alpha = 3!!$$

$$\Rightarrow 1 = \left| \frac{18 + 2\beta}{12 - 3\beta} \right| \Rightarrow \pm 1 = \frac{18 + 2\beta}{12 - 3\beta}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{18+2\beta}{12-3\beta}$$

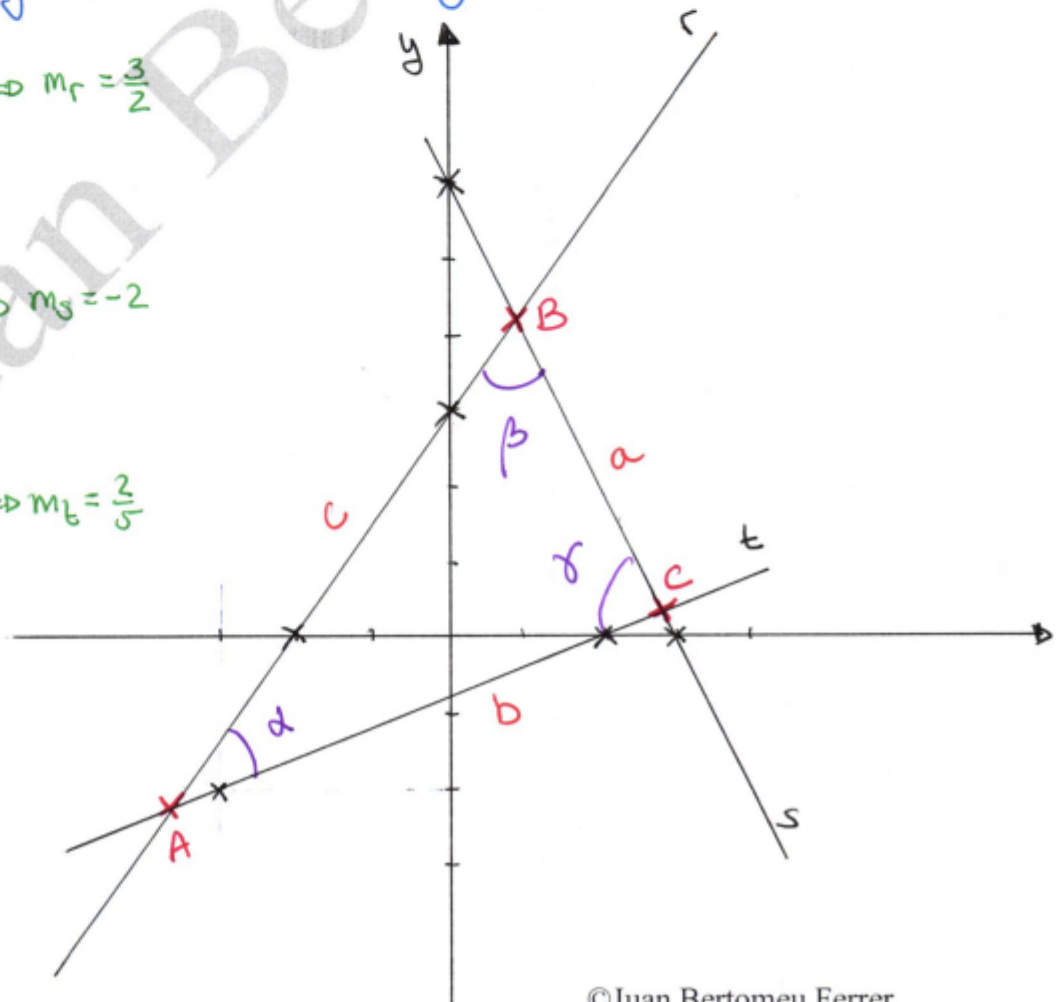
$$\hookrightarrow 12-3\beta = 18+2\beta \Rightarrow 5\beta = -6 \Rightarrow \beta = -\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{18+2\beta}{12-3\beta}$$

$$\hookrightarrow -12+3\beta = 18+2\beta \Rightarrow \beta = 30$$

- 53) Un triángulo tiene sus vértices sobre las rectas
 $r: 3x-2y+6=0$, $s: 2x+y-6=0$ y $t: 2x-5y-4=0$.
 Representalas y resuelve el triángulo.

x	$r: y = \frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow m_r = \frac{3}{2}$
0	3
-2	0
x	$s: y = -2x + 6 \Rightarrow m_s = -2$
0	6
3	0
x	$t: y = \frac{2}{5}x - \frac{4}{5} \Rightarrow m_t = \frac{2}{5}$
2	0
-3	-2



El punto A es la intersección de r y t.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ 2x - 5y - 4 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \times 2 \rightarrow 6x - 4y + 12 = 0 \\ \times (-3) \rightarrow -6x + 15y + 12 = 0 \end{matrix}$$

$$11y + 24 = 0 \Rightarrow y = -\frac{24}{11}$$

$$\hookrightarrow x = \frac{5y + 4}{2} = \frac{5 \cdot (-\frac{24}{11}) + 4}{2} = -\frac{38}{11} \Rightarrow A \left(-\frac{38}{11}, -\frac{24}{11} \right)$$

El punto B es la intersección de r y s:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \times 2 \rightarrow 4x + 2y - 12 = 0 \\ 3x - 2y + 6 = 0 \end{matrix}$$

$$7x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{7}$$

$$\hookrightarrow y = 6 - 2x = 6 - 2 \cdot \frac{6}{7} = \frac{30}{7} \Rightarrow B \left(\frac{6}{7}, \frac{30}{7} \right)$$

El punto C es la intersección de s y t:

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 2x - 5y - 4 = 0 \end{cases} E_2 - E_1 \rightarrow -6y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$\hookrightarrow x = \frac{6 - y}{2} = \frac{6 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{17}{6} \Rightarrow C \left(\frac{17}{6}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{6}{7}, \frac{30}{7} \right) - \left(-\frac{38}{11}, -\frac{24}{11} \right) = \left(\frac{332}{77}, \frac{492}{77} \right) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 7'773 \text{ u.} = c$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{17}{6}, \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{38}{11}, -\frac{24}{11} \right) = \left(\frac{415}{66}, \frac{83}{33} \right) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = 6'772 \text{ u.} = b$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{17}{6}, \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{6}{7}, \frac{30}{7} \right) = \left(\frac{83}{42}, -\frac{83}{21} \right) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 4'419 \text{ u.} = a$$

Podemos calcular el área con la fórmula de Herón:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{|\vec{BC}| + |\vec{AC}| + |\vec{AB}|}{2} = \frac{18'964}{2} = 9'482 \text{ u.}$$

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{9'482 \cdot 5'063 \cdot 2'71 \cdot 1'709} = 14'911 \text{ u}^2$$

Podemos calcular los ángulos del triángulo como los ángulos entre las rectas. Así:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_r - m_t}{1 + m_r \cdot m_t} \right| = \left| \frac{3/2 - 2/5}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5}} \right| = \left| \frac{11/10}{16/10} \right| = \frac{11}{16}$$

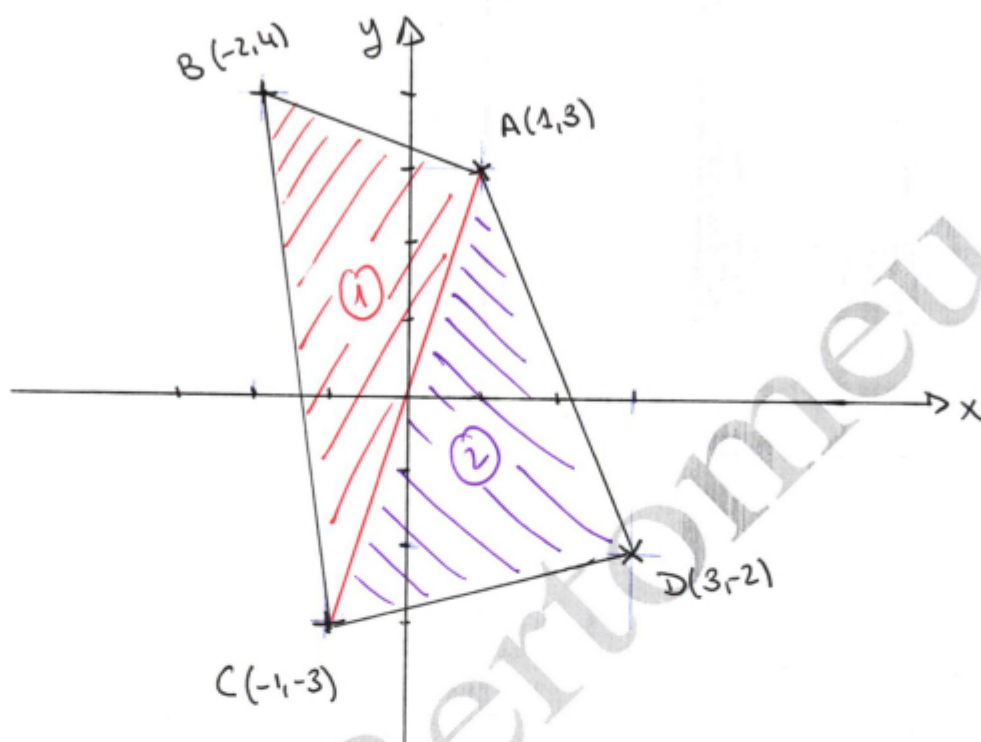
$$\Rightarrow \alpha = \arctg \left(\frac{11}{16} \right) = 34'508^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right| = \left| \frac{3/2 + 2}{1 + \frac{3}{2} \cdot (-2)} \right| = \left| \frac{7/2}{-2} \right| = \left| -\frac{7}{4} \right| = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \beta = \arctg \left(\frac{7}{4} \right) = 60'255^\circ$$

Por último $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 85'237^\circ$

54) Calcular el área del cuadrilátero que forman los puntos $A(1,3)$, $B(-2,4)$, $C(-1,-3)$ y $D(3,-2)$.



La forma más sencilla es dividir el cuadrilátero en dos triángulos y aplicar Herón en cada uno de ellos.

Triángulo 1:

$$\vec{BA} = (1,3) - (-2,4) = (3,-1); |\vec{BA}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ u.}$$

$$\vec{CB} = (-2,4) - (-1,-3) = (-1,7); |\vec{CB}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} \text{ u.}$$

$$\vec{CA} = (1,3) - (-1,-3) = (2,6); |\vec{CA}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \text{ u.}$$

$$p = \frac{|\vec{BA}| + |\vec{CB}| + |\vec{CA}|}{2} = \frac{46'558}{2} = 23'279 \text{ u.}$$

$$A_1 = \sqrt{p(p - \sqrt{10})(p - \sqrt{50})(p - \sqrt{40})} = 10 \text{ u}^2$$

Triángulo 2:

$$|\vec{CA}| = \sqrt{40} \text{ u.}$$

$$\vec{CD} = (3, -2) - (-1, -3) = (4, 1); \quad |\vec{CD}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \text{ u.}$$

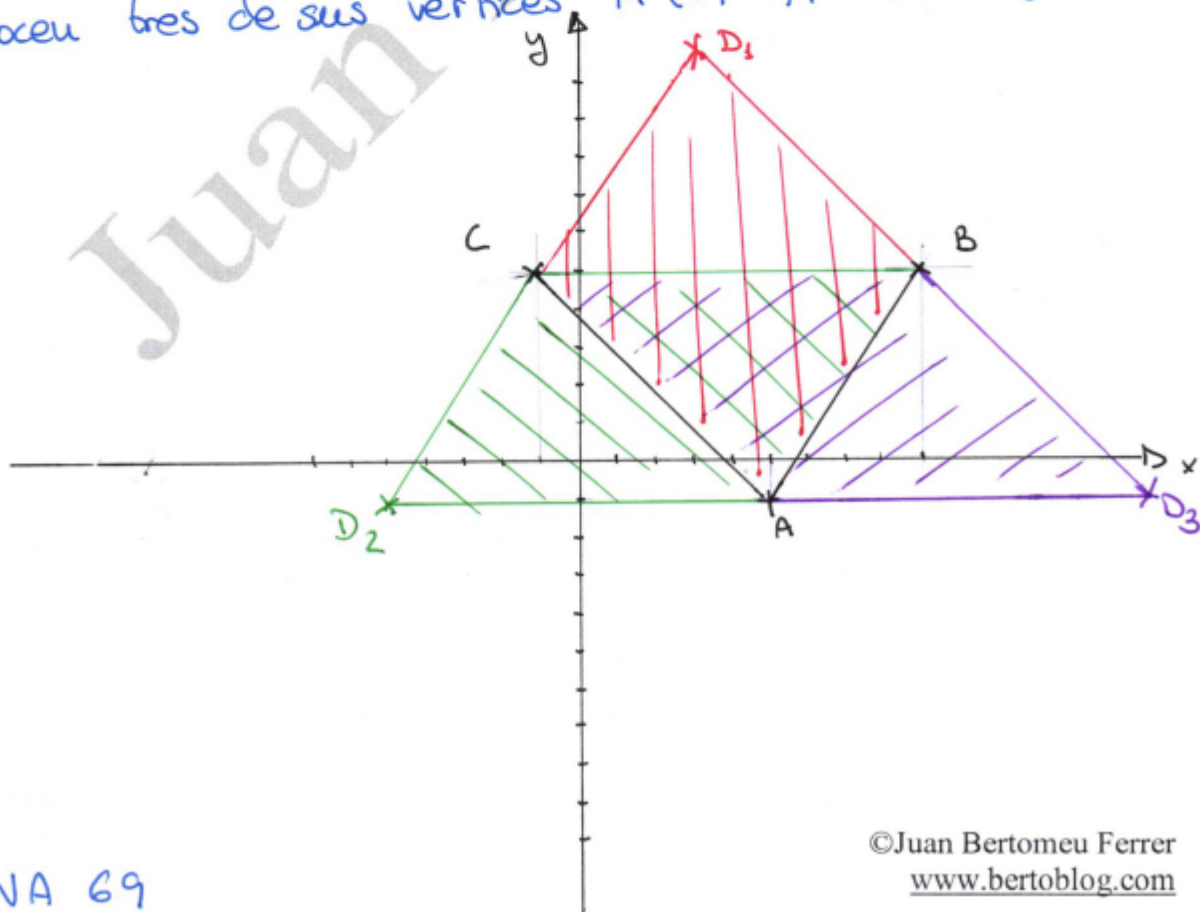
$$\vec{DA} = (1, 3) - (3, -2) = (-2, 5); \quad |\vec{DA}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \text{ u.}$$

$$p = \frac{|\vec{CA}| + |\vec{CD}| + |\vec{DA}|}{2} = \frac{15.833}{2} = 7.916 \text{ u.}$$

$$A_2 = \sqrt{p(p - \sqrt{40})(p - \sqrt{17})(p - \sqrt{29})} = \sqrt{121} = 11 \text{ u}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{\text{TOTAL}} = A_1 + A_2 = 10 + 11 = 21 \text{ u}^2}$$

(55) Determina el centro de un paralelogramo del que se conocen tres de sus vértices A(5, -1), B(9, 5) y C(-1, 5)



El centro de un paralelogramo está situado en el punto donde se cortan sus diagonales. Además, el punto de intersección de dichas diagonales es el punto medio de las mismas. Como vemos en la figura anterior hay tres opciones distintas de paralelogramo con los datos dados. Así:

Paralelogramo ACD_1B :

$\overline{CB}$ es diagonal de este paralelogramo

$$\Rightarrow E_1 = P_{M_{\overline{CB}}} = \left(\frac{-1+9}{2}, \frac{5+5}{2} \right) = (4, 5)$$

Paralelogramo $ABCD_2$:

$\overline{CA}$ es diagonal de este paralelogramo:

$$\Rightarrow E_2 = P_{M_{\overline{CA}}} = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{5-1}{2} \right) = (2, 2)$$

Paralelogramo CBD_3A :

$\overline{AB}$ es diagonal de este paralelogramo:

$$\Rightarrow E_3 = P_{M_{\overline{AB}}} = \left(\frac{5+9}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = (7, 2)$$

- 56) Calcular las ecuaciones de las rectas que, siendo paralelas a la recta $r: 10x - 3y + 4 = 0$, están a 2 unidades de distancia del punto $P(3,1)$

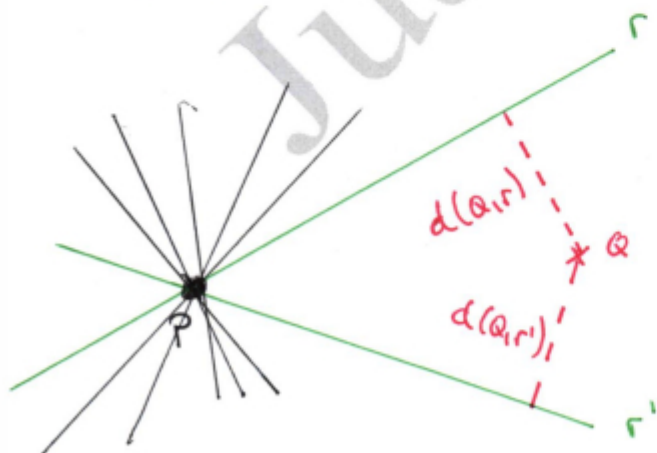
Las rectas paralelas a r serán de la forma

$$s: 10x - 3y + C = 0$$

$$d(P, s) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{|10 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + C|}{\sqrt{10^2 + 3^2}} \Rightarrow 2\sqrt{109} = |27 + C|$$

$$\Rightarrow 27 + C = \pm 2\sqrt{109} \begin{cases} \rightarrow C = 2\sqrt{109} - 27 \Rightarrow s: 10x - 3y + 2\sqrt{109} - 27 = 0 \\ \rightarrow C = -2\sqrt{109} - 27 \Rightarrow s: 10x - 3y - 2\sqrt{109} - 27 = 0 \end{cases}$$

- 57) Encuentra la ecuación de la recta que pasando por $P(-3,3)$ está a dos unidades de distancia de $Q(0,5)$



La ecuación del haz de rectas que pasa por P es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = m(x + 3)$$

$$\text{HAZ: } mx - y + 3m + 3 = 0$$

De todas esas rectas, estamos buscando aquellas que distan dos unidades de $Q(0,5)$. Así:

$$d(Q, HAZ) = 2$$

$$2 = \frac{|m \cdot 0 - 5 + 3m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} \Rightarrow \left(2\sqrt{m^2 + 1}\right)^2 = (3m - 2)^2 \Rightarrow$$

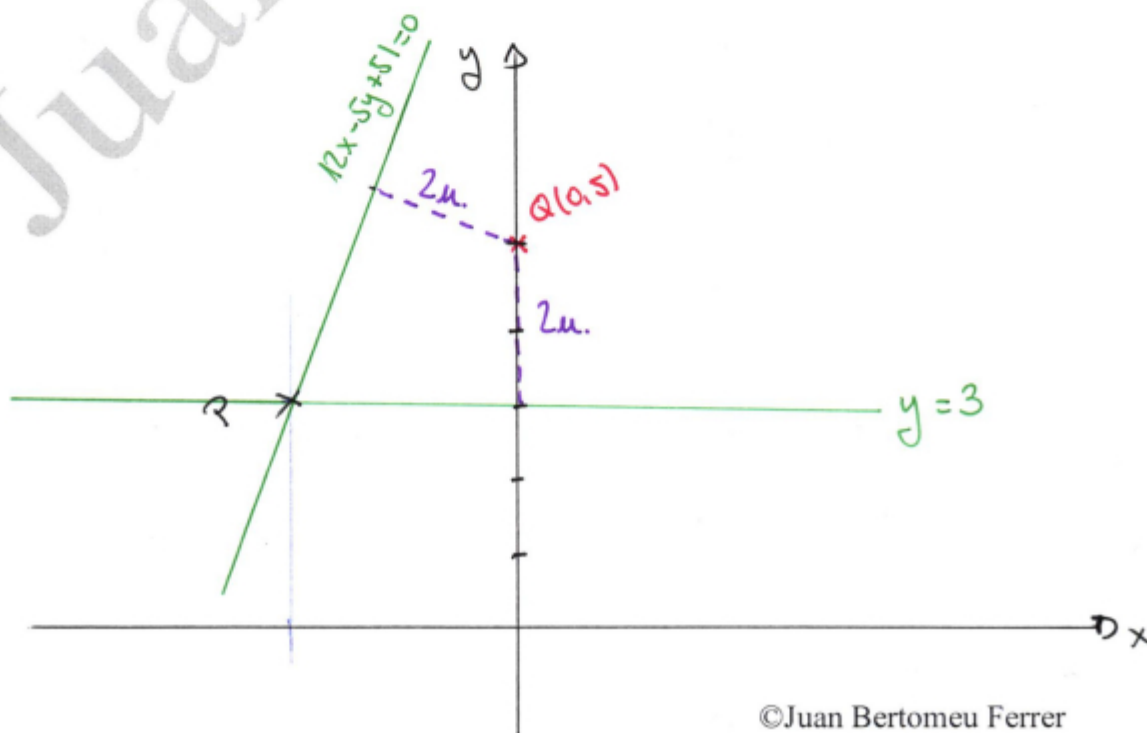
$$\Rightarrow 4(m^2 + 1) = 9m^2 - 12m + 4$$

$$4m^2 + 4 = 9m^2 - 12m + 4$$

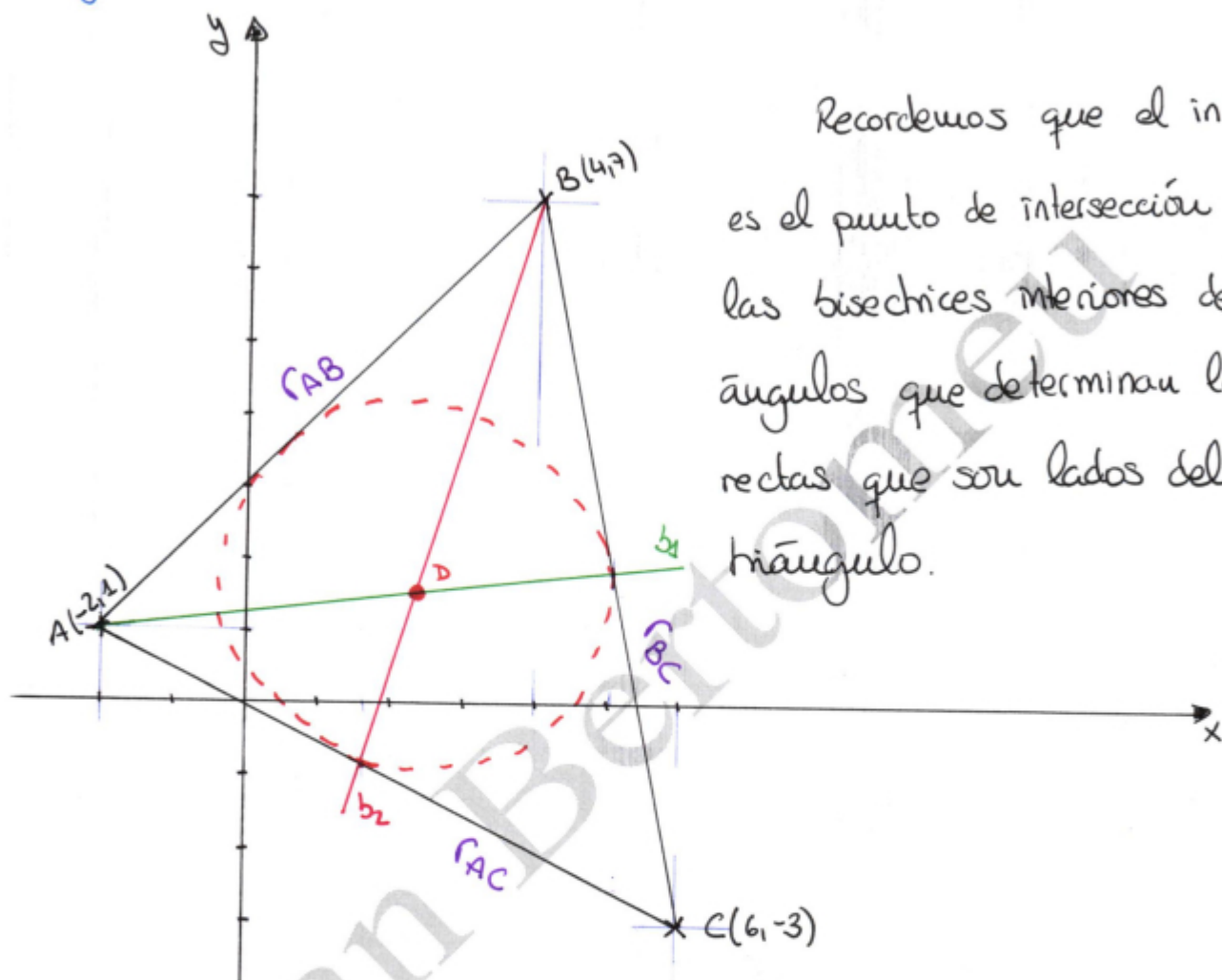
$$5m^2 - 12m = 0 \Rightarrow m(5m - 12) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\text{Si } m = \frac{12}{5} \Rightarrow r: \frac{12}{5}x - y + \frac{3 \cdot 12}{5} + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{r: 12x - 5y + 51 = 0}$$

$$\text{Si } m = 0 \Rightarrow r': -y + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{r': y = 3}$$



- (58) Determina el área de la circunferencia inscrita en el triángulo de vértices $A(-2, 4)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$



Recordemos que el incentro es el punto de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos que determinan las rectas que son lados del triángulo.

Recta r_{AB} :

$$\overrightarrow{AB} = (4, 7) - (-2, 4) = (6, 6) \Rightarrow \vec{V}_{r_{AB}} = (1, 1)$$

$$r_{AB}: \frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow r_{AB}: x - y + 3 = 0$$

Recta r_{AC} :

$$\overrightarrow{AC} = (6, -3) - (-2, 4) = (8, -4) \Rightarrow \vec{V}_{r_{AC}} = (2, -1)$$

$$r_{AC}: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-1} \Rightarrow -x-2 = 2y-2 \Rightarrow r_{AC}: x+2y=0$$

Bisectriz b_1 :

$$\left. \begin{array}{l} r_{AB}: x - y + 3 = 0 \\ r_{AC}: x + 2y = 0 \end{array} \right\} d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|x - y + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x + 2y|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$\Rightarrow |x - y + 3| = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot |x + 2y| \Rightarrow x - y + 3 = \pm \sqrt{\frac{2}{5}} (x + 2y)$$

$$x - y + 3 = x\sqrt{\frac{2}{5}} + 2y\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow x - y + 3 = 0'632x + 1'265y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1: -0'368x + 2'265y - 3 = 0$$

↳ ESTA ES LA BISECTRIZ INTERIOR

$$x - y + 3 = -x\sqrt{\frac{2}{5}} - 2y\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow x - y + 3 = -0'632x - 1'265y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b'_1: -1'632x - 0'265y - 3 = 0$$

Recta r_{BC} :

$$\overrightarrow{BC} = (6, -3) - (4, 7) = (2, -10) \Rightarrow \vec{V}_{r_{BC}} = (1, -5)$$

$$r_{BC}: \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{-5} \Rightarrow -5x + 20 = y - 7 \Rightarrow r_{BC}: 5x + y - 27 = 0$$

Bisectriz b_2 :

$$\left. \begin{array}{l} r_{AB}: x - y + 3 = 0 \\ r_{BC}: 5x + y - 27 = 0 \end{array} \right\} d(P, r_{AB}) = d(P, r_{BC}) \Rightarrow \frac{|x - y + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|5x + y - 27|}{\sqrt{5^2 + 1^2}}$$

$$\Rightarrow |x - y + 3| = \sqrt{\frac{2}{26}} \cdot |5x + y - 27| \Rightarrow x - y + 3 = \pm \frac{1}{\sqrt{13}} (5x + y - 27)$$

$$x - y + 3 = \frac{5x}{\sqrt{13}} + \frac{y}{\sqrt{13}} - \frac{27}{\sqrt{13}} \Rightarrow x - y + 3 = 1'387x + 0'277y - 7'488$$

$$\Rightarrow b_2: 0'387x + 1'277y - 10'488 = 0$$

$$\Delta x - y + 3 = -\frac{5x}{\sqrt{13}} - \frac{y}{\sqrt{13}} + \frac{27}{\sqrt{13}} \Rightarrow x - y + 3 = -1'387x - 0'277y + 7'488$$

$$\Rightarrow b_2: -2'387x + 0'723y + 4'488 = 0$$

↳ ESTA ES LA BISECTRIZ INTERIOR

Calculamos el incenter D como punto de intersección entre las bisectrices interiores b_1 y b_2 :

$$\begin{cases} -0'368x + 2'265y - 3 = 0 \\ -2'387x + 0'723y + 4'488 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0'1625x + 1'3245 \\ y = 3'3015x - 6'2075 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0'1625x + 1'3245 = 3'3015x - 6'2075$$

$$3'139x = 7'532 \Rightarrow x = 2'4 \Rightarrow y = 1'71 \Rightarrow \boxed{D(2'4, 1'71)}$$

INCENTRO

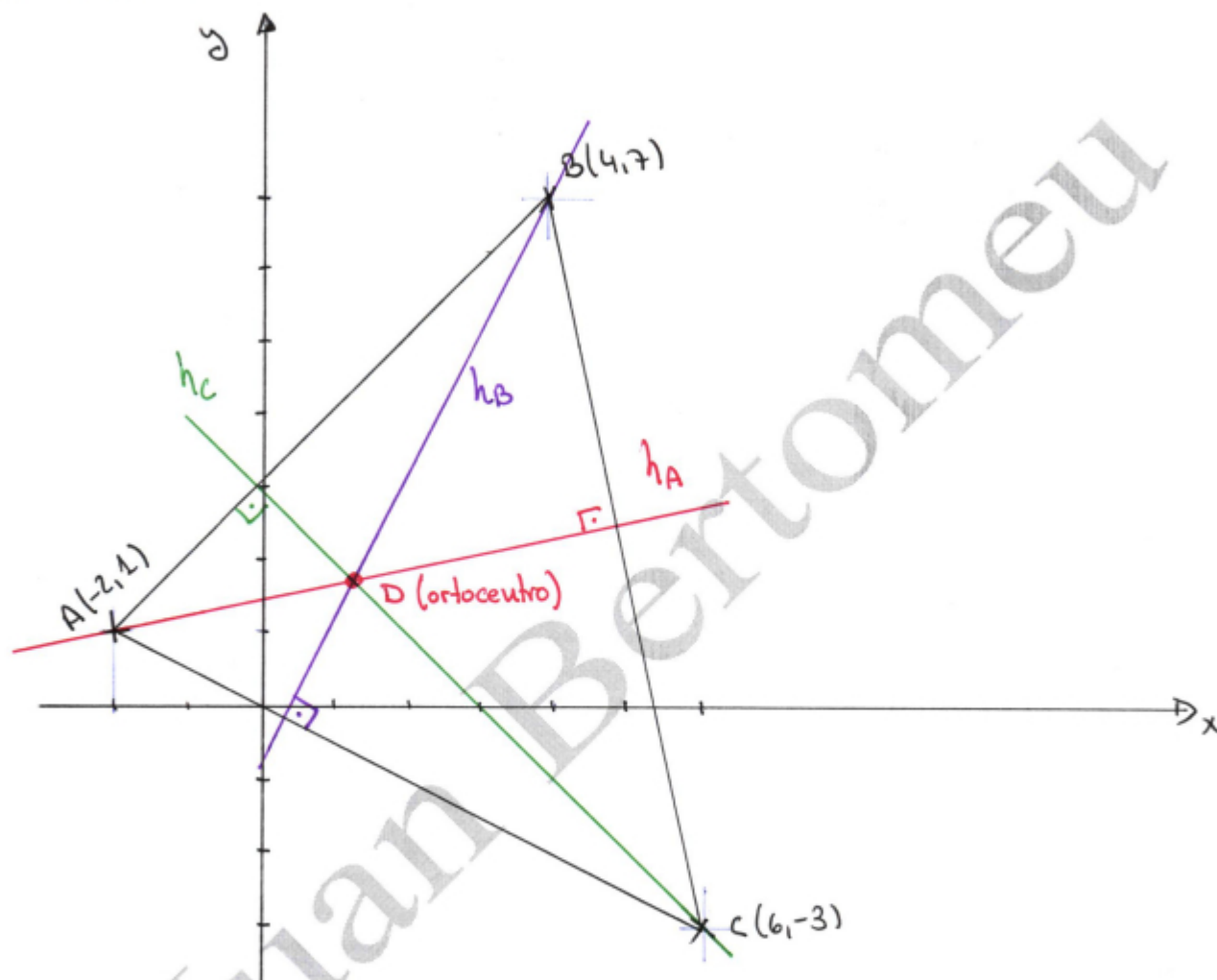
El radio R de la circunferencia inscrita será la distancia del incenter D calculado a cualquiera de las rectas de los lados:

$$R = d(D, r_{AB}) = \frac{|2'4 - 1'71 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3'69}{\sqrt{2}} \text{ u.}$$

Y por tanto, el área pedida:

$$\boxed{A = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot \left(\frac{3'69}{\sqrt{2}}\right)^2 = 21'39 \text{ u}^2}$$

- 59) Calcula las ecuaciones de las alturas del triángulo de vértices $A(-2,1)$, $B(4,7)$ y $C(6,-3)$. Calcula también el ortocentro.



Altura h_C :

$$\overrightarrow{AB} = (4,7) - (-2,1) = (6,6) \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_{AB}}} = (1,1)$$

$$h_C \perp r_{AB} \Rightarrow \overrightarrow{v_{h_C}} = (-1,1)$$

$$h_C: \frac{x-6}{-1} = \frac{y+3}{1} \Rightarrow x-6 = -y-3 \Rightarrow \boxed{h_C: x+y-3=0}$$

Altura h_A :

$$\overrightarrow{BC} = (6, -3) - (4, 7) = (2, -10) \Rightarrow \overrightarrow{r_{BC}} = (1, -5)$$

$$h_A \perp r_{BC} \Rightarrow \overrightarrow{v_{h_A}} = (5, 1)$$

$$h_A: \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x+2 = 5y-5 \Rightarrow h_A: x-5y+7=0$$

Altura h_B :

$$\overrightarrow{AC} = (6, -3) - (-2, 4) = (8, -4) \Rightarrow \overrightarrow{r_{AC}} = (2, -1)$$

$$h_B \perp r_{AC} \Rightarrow \overrightarrow{v_{h_B}} = (1, 2)$$

$$h_B: \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{2} \Rightarrow 2x-8 = y-7 \Rightarrow h_B: 2x-y-1=0$$

El ortocentro es el punto donde se cortan estas alturas.

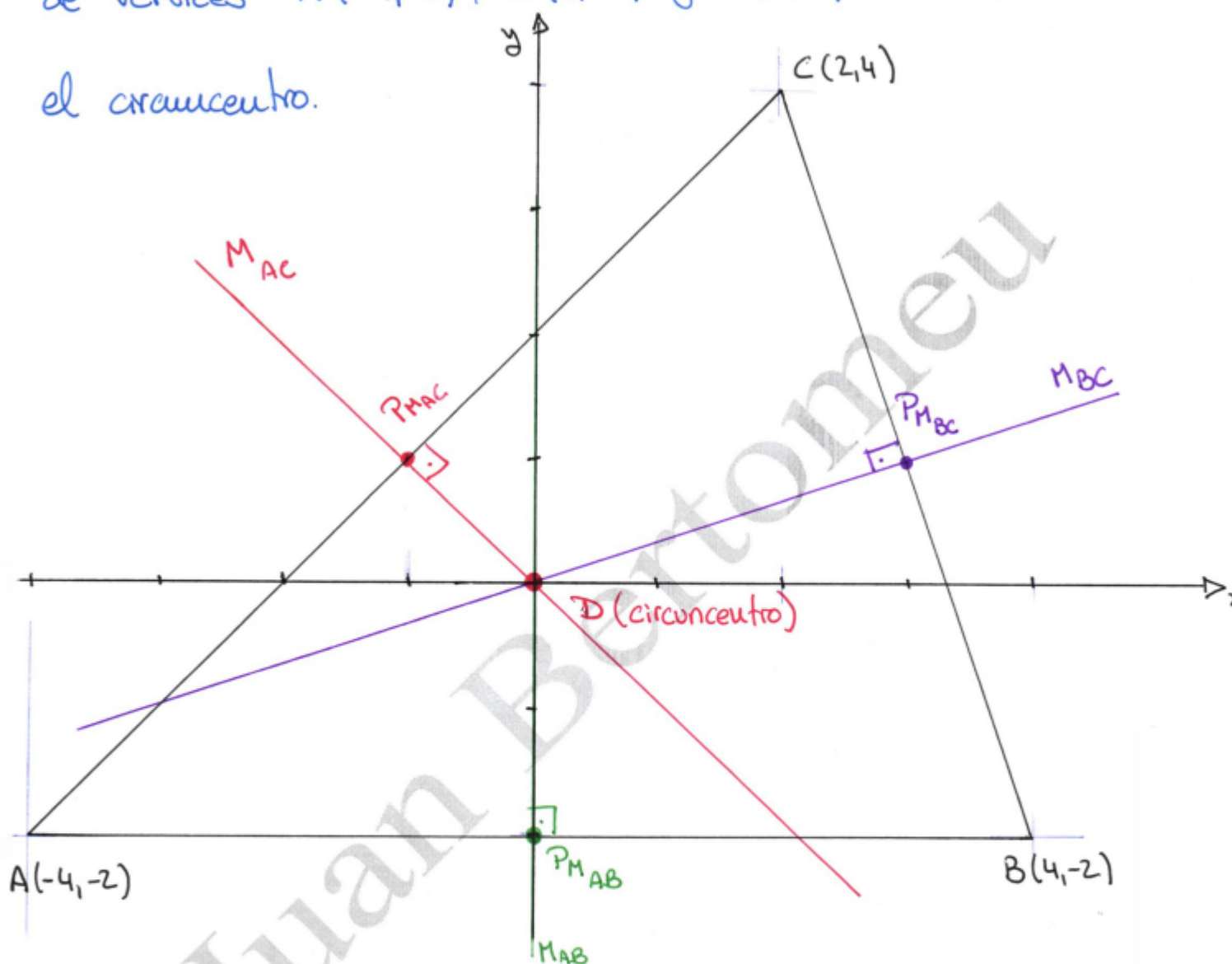
Tomamos dos de ellas:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow E_1 + E_2 \rightarrow 3x-4=0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y = 3 - x = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow D\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

ORTOCENTRO

- 60) Calcular las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(4, -2)$ y $C(2, 4)$. Calcular también el circuncentro.



Mediatriz M_{AC} :

$$\vec{AC} = (2, 4) - (-4, -2) = (6, 6) \Rightarrow \vec{r}_{AC} = (1, 1)$$

$$M_{AC} \perp r_{AC} \Rightarrow \vec{v}_{M_{AC}} = (-1, 1)$$

$$P_{M_{AC}} = \left(\frac{2-4}{2}, \frac{4-2}{2} \right) = (-1, 1)$$

$$M_{AC}: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x+1 = -y+1 \Rightarrow \boxed{M_{AC}: x+y=0}$$

Mediatriz M_{AB} :

$$\overrightarrow{AB} = (4, -2) - (-4, -2) = (8, 0) \Rightarrow \overrightarrow{r_{AB}} = (1, 0)$$

$$M_{AB} \perp r_{AB} \Rightarrow \overrightarrow{v_{M_{AB}}} = (0, 1)$$

$$P_{M_{AB}} = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{-2-2}{2} \right) = (0, -2)$$

$$M_{AB}: \frac{x}{0} = \frac{y+2}{1} \Rightarrow M_{AB}: x=0$$

Mediatriz M_{BC} :

$$\overrightarrow{BC} = (2, 4) - (4, -2) = (-2, 6) \Rightarrow \overrightarrow{r_{BC}} = (-1, 3)$$

$$M_{BC} \perp r_{BC} \Rightarrow \overrightarrow{v_{M_{BC}}} = (3, 1)$$

$$P_{M_{BC}} = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{4-2}{2} \right) = (3, 1)$$

$$M_{BC}: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x-3 = 3y-3 \Rightarrow M_{BC}: x-3y=0$$

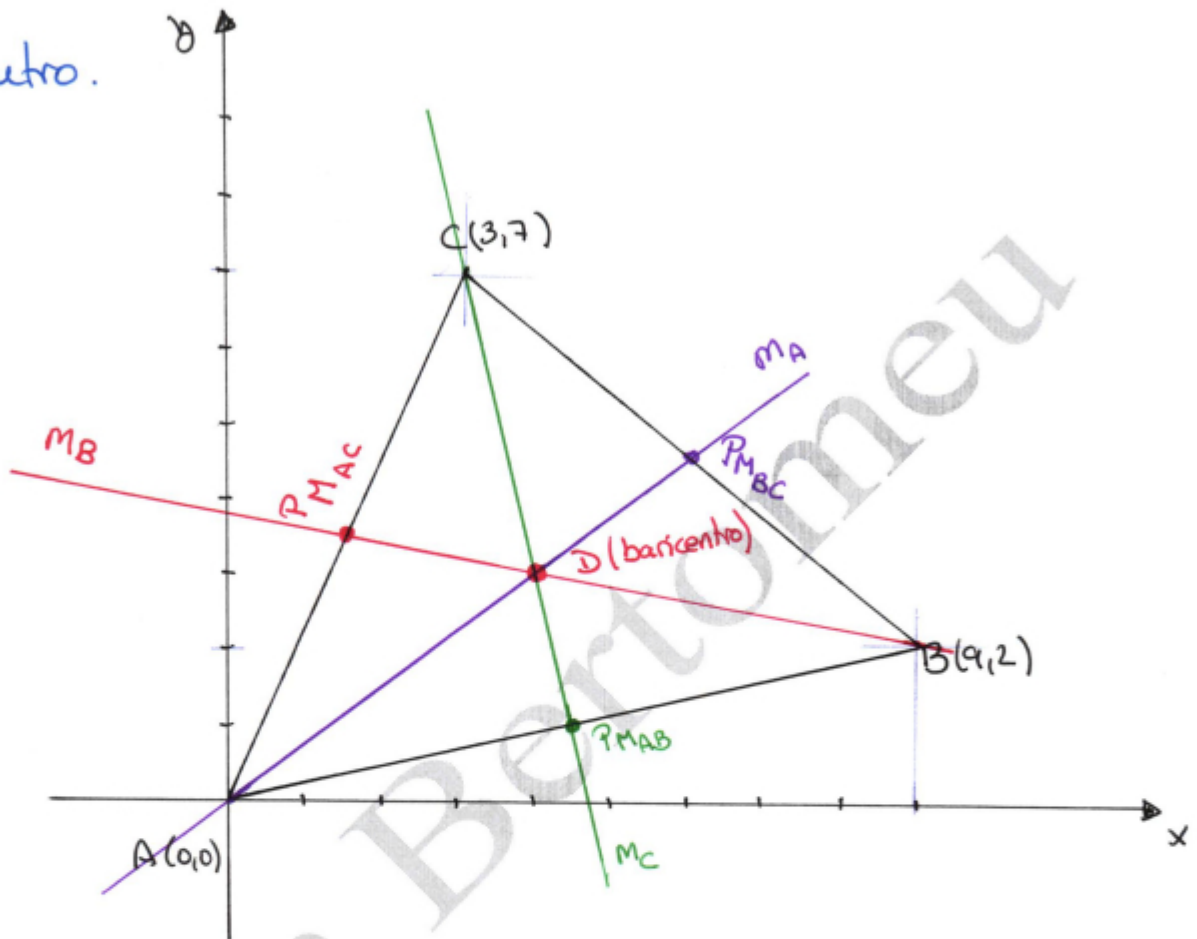
El circuncentro es el punto donde se cortan estas mediatrices

Tomamos dos de ellas

$$\left. \begin{array}{l} x+y=0 \\ x=0 \end{array} \right\} y=0 \Rightarrow D(0,0)$$

CIRCUNCENTRO

- ⑥1 En el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(9,2)$ y $C(3,7)$ determina las ecuaciones de las medianas y calcula el baricentro.



Mediana m_A :

$$P_{MBC} = \left(\frac{9+3}{2}, \frac{7+2}{2} \right) = \left(6, \frac{9}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{AP_{MBC}} = \left(6, \frac{9}{2} \right) - (0,0) = \left(6, \frac{9}{2} \right) \Rightarrow \vec{v}_{m_A} = (4, 3)$$

$$m_A: \frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow 3x = 4y \Rightarrow \boxed{m_A = 3x - 4y = 0}$$

Mediana m_B :

$$P_{MAC} = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+7}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{P_{MAC}B} = (9, 2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right) = \left(\frac{15}{2}, -\frac{3}{2} \right) \Rightarrow \vec{V}_{m_B} = (5, -1)$$

$$m_B: \frac{x-9}{5} = \frac{y-2}{-1} \Rightarrow -x+9 = 5y-10 \Rightarrow m_B: x+5y-19=0$$

Mediana m_C :

$$P_{MAB} = \left(\frac{0+9}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = \left(\frac{9}{2}, 1 \right)$$

$$\overrightarrow{P_{MAB}C} = (3, 7) - \left(\frac{9}{2}, 1 \right) = \left(-\frac{3}{2}, 6 \right) \Rightarrow \vec{V}_{m_C} = (-1, 4)$$

$$m_C: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-7}{4} \Rightarrow 4x-12 = -y+7 \Rightarrow m_C: 4x+y-19=0$$

El baricentro es el punto donde se cortan estas medianas.

Tomando dos de ellas:

$$\begin{cases} x + 5y - 19 = 0 \\ 4x + y - 19 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \times (-4) \rightarrow \\ \hline \end{matrix} \begin{cases} -4x - 20y + 76 = 0 \\ 4x + y - 19 = 0 \end{cases}$$

$$-19y + 57 = 0$$

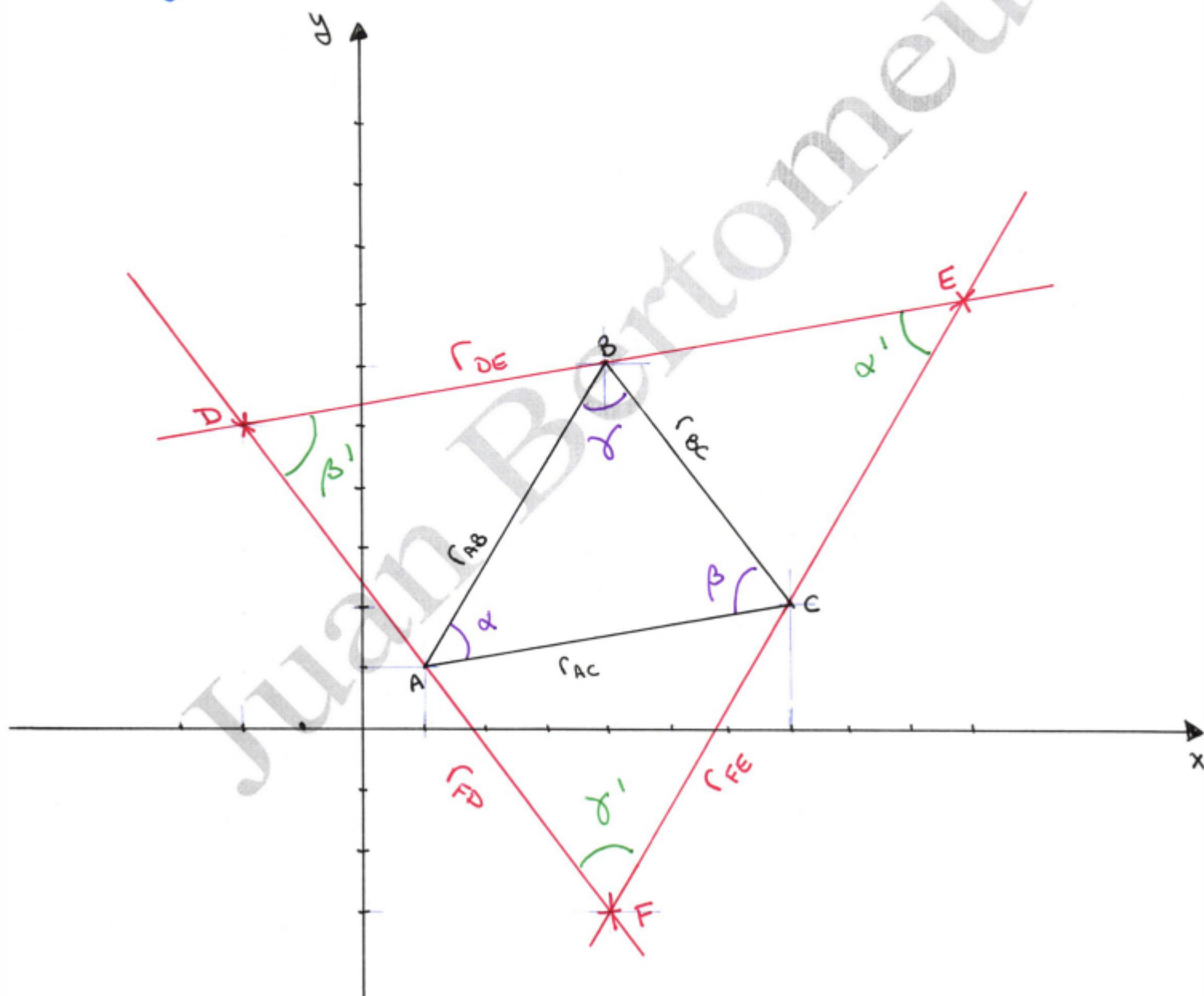
$$y = \frac{57}{19} = 3$$

$$\rightarrow x = 19 - 5y$$

$$x = 19 - 5 \cdot 3 = 4 \Rightarrow D(4, 3)$$

BARICENTRO

- 62) Considera el triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(4,6)$ y $C(7,2)$. Las rectas paralelas al lado opuesto trazadas por cada vértice determinan un triángulo $\triangle DEF$. Determina los vértices D , E , y F y comprueba que ambos triángulos son semejantes.



Recta r_{FD} :

$$\overrightarrow{BC} = (7, 2) - (4, 6) = (3, -4) \Rightarrow \overrightarrow{V_{BC}} = (3, -4)$$

$$r_{FD} \parallel r_{BC} \Rightarrow \overrightarrow{V_{r_{FD}}} = \overrightarrow{V_{r_{BC}}} = (3, -4)$$

$$r_{FD}: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} \Rightarrow -4x+4 = 3y-3 \Rightarrow r_{FD}: 4x+3y-7=0$$

Recta r_{FE} :

$$\overrightarrow{AB} = (4, 6) - (1, 1) = (3, 5) \Rightarrow \overrightarrow{V_{r_{AB}}} = (3, 5)$$

$$r_{FE} \parallel r_{AB} \Rightarrow \overrightarrow{V_{r_{FE}}} = \overrightarrow{V_{r_{AB}}} = (3, 5)$$

$$r_{FE}: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{5} \Rightarrow 5x-35 = 3y-6 \Rightarrow r_{FE}: 5x-3y-29=0$$

Recta r_{DE} :

$$\overrightarrow{AC} = (7, 2) - (1, 1) = (6, 1) \Rightarrow \overrightarrow{V_{r_{AC}}} = (6, 1)$$

$$r_{DE} \parallel r_{AC} \Rightarrow \overrightarrow{V_{r_{DE}}} = \overrightarrow{V_{r_{AC}}} = (6, 1)$$

$$r_{DE}: \frac{x-4}{6} = \frac{y-6}{1} \Rightarrow x-4 = 6y-36 \Rightarrow r_{DE}: x-6y+32=0$$

Los vértices que nos piden son los puntos de corte entre estas rectas:

$$\left. \begin{array}{l} r_{FD}: 4x+3y-7=0 \\ r_{DE}: x-6y+32=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times 2 \\ \hline \end{array} \left. \begin{array}{l} 8x+6y-14=0 \\ x-6y+32=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \hline 9x+18=0 \Rightarrow x=-2 \end{array}$$

$y = \frac{30}{6} = 5$
 $\Downarrow$
 $D(-2, 5)$

$$\left. \begin{array}{l} r_{FD}: 4x + 3y - 7 = 0 \\ r_{FE}: 5x - 3y - 29 = 0 \end{array} \right\} E_1 + E_2 \Rightarrow 9x - 36 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow y = \frac{7 - 4x}{3} = \frac{7 - 16}{3} = -3 \Rightarrow \boxed{F(4, -3)}$$

$$\left. \begin{array}{l} r_{FE}: 5x - 3y - 29 = 0 \\ r_{DE}: x - 6y + 32 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times (-2) \quad -10x + 6y + 58 = 0 \\ \underline{x - 6y + 32 = 0} \\ -9x + 90 = 0 \Rightarrow x = 10 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x + 32}{6} = 7 \Rightarrow \boxed{E(10, 7)}$$

Decimos que dos triángulos son semejantes cuando tienen los ángulos iguales. Calcularemos los ángulos de cada triángulo y veremos como efectivamente son iguales

Triángulo $\widehat{ABC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3, 5) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

$$\overrightarrow{AC} = (6, 1) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3, -4) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(3, 5) \cdot (6, 1)}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{37}} = \frac{23}{\sqrt{1258}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{23}{\sqrt{1258}} \right) = 49'574''$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{-\vec{AC} \cdot (-\vec{BC})}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} =$$

$$= \frac{(6,1) \cdot (3,-4)}{\sqrt{37} \cdot 5} = \frac{14}{5\sqrt{37}} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{14}{5\sqrt{37}}\right) = 62'592''$$

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta = 67'834''$$

Triángulo DEF:

$$\vec{DE} = (10,7) - (-2,5) = (12,2) \Rightarrow |\vec{DE}| = \sqrt{12^2 + 2^2} = \sqrt{148}$$

$$\vec{DF} = (4,-3) - (-2,5) = (6,-8) \Rightarrow |\vec{DF}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\vec{EF} = (4,-3) - (10,7) = (-6,-10) \Rightarrow |\vec{EF}| = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136}$$

$$\cos \alpha' = \frac{\vec{ED} \cdot \vec{EF}}{|\vec{ED}| \cdot |\vec{EF}|} = \frac{(-\vec{DE}) \cdot \vec{EF}}{|\vec{ED}| \cdot |\vec{EF}|} = \frac{(-12,-2) \cdot (-6,-10)}{\sqrt{148} \cdot \sqrt{136}} =$$

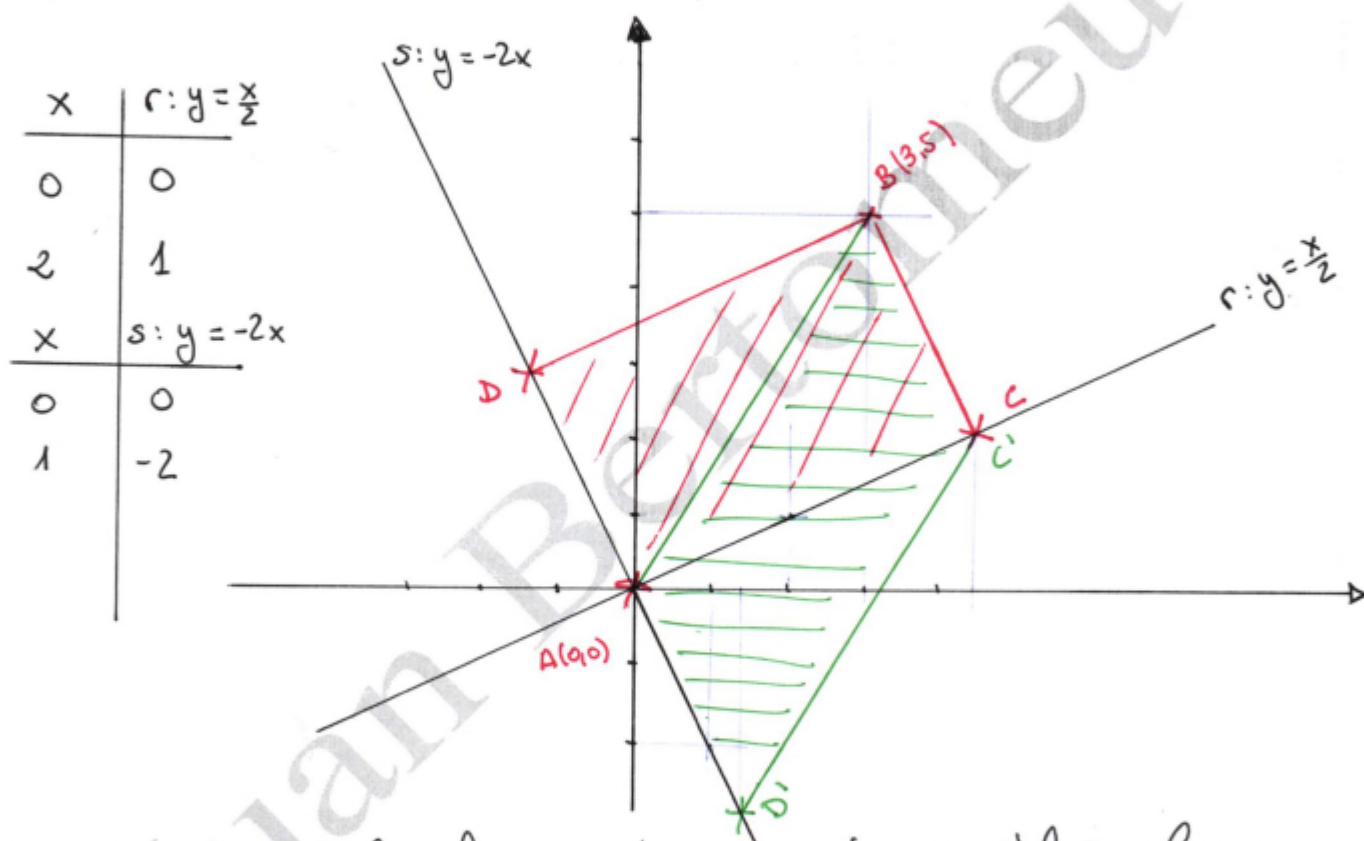
$$= \frac{92}{\sqrt{20128}} \Rightarrow \alpha' = \arccos\left(\frac{92}{\sqrt{20128}}\right) = 49'574'' = \alpha$$

$$\cos \beta' = \frac{\vec{DE} \cdot \vec{DF}}{|\vec{DE}| \cdot |\vec{DF}|} = \frac{(12,2) \cdot (6,-8)}{\sqrt{148} \cdot 10} = \frac{56}{10 \cdot \sqrt{148}}$$

$$\Rightarrow \beta' = \arccos\left(\frac{56}{10\sqrt{148}}\right) = 62'592'' = \beta \Rightarrow \gamma' = \gamma$$

$\Rightarrow$ Efectivamente los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes

63) Uno de los vértices de un paralelogramo está en el origen de coordenadas y otro está en el punto $(3,5)$. Los otros dos vértices están sobre las rectas $r: x-2y=0$ y $s: 2x+y=0$. Representa el ejercicio y obtén las coordenadas de los vértices que faltan.



Como vemos en la figura, tenemos dos posibles soluciones. Los puntos se obtienen fácilmente razonando con los vectores. Así:

- Solución 1:

El punto $C \in r$ será de la forma $C(a, \frac{a}{2})$

El punto $D \in s$ será de la forma $D(b, -2b)$

Como vemos, se tiene la relación:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a, \frac{a}{2}\right) + (b, -2b) = (3, 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+b = 3 \\ \frac{a}{2} - 2b = 5 \end{array} \right\} \times 2 \quad \left. \begin{array}{l} 2a+2b = 6 \\ \frac{a}{2} - 2b = 5 \end{array} \right\}$$

$$\frac{5a}{2} = 11 \Rightarrow a = \frac{22}{5} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)}$$

$$\rightarrow b = 3 - a = 3 - \frac{22}{5} = -\frac{7}{5} \Rightarrow \boxed{D\left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)}$$

- Solución 2:

El punto $C' \in r$ será de la forma $C'(a, \frac{a}{2})$

El punto $D' \in s$ será de la forma $D'(b, -2b)$

La relación vectorial en este caso es (por ejemplo):

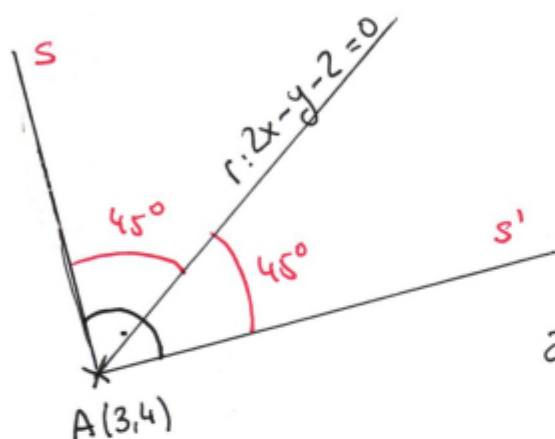
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'} \Rightarrow (3, 5) = (a, \frac{a}{2}) - (b, -2b) = (a-b, \frac{a}{2} + 2b)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a-b = 3 \\ \frac{a}{2} + 2b = 5 \end{array} \right\} \times 2 \quad \left. \begin{array}{l} 2a-2b = 6 \\ \frac{a}{2} + 2b = 5 \end{array} \right\}$$

$$\frac{5a}{2} = 11 \Rightarrow a = \frac{22}{5} \Rightarrow \boxed{C'\left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)}$$

$$\rightarrow b = a - 3 = \frac{22}{5} - 3 = \frac{7}{5} \Rightarrow \boxed{D'\left(\frac{7}{5}, -\frac{14}{5}\right)}$$

64) Un ángulo recto tiene su vértice en el punto $A(3,4)$ y la ecuación de su bisectriz es $r: 2x - y - 2 = 0$. Encuentra las ecuaciones de las rectas s y s' que determinan el ángulo del que r es bisectriz.



$$r: 2x - y - 2 = 0$$

$$\hookrightarrow r: y = 2x - 2 \Rightarrow m_r = 2$$

las rectas s y s' forman un ángulo de 45° con la bisectriz r .

$$\Rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right| \Rightarrow \tan 45 = \left| \frac{2 - m_s}{1 + 2m_s} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \left| \frac{2 - m_s}{1 + 2m_s} \right| \Rightarrow \pm 1 = \frac{2 - m_s}{1 + 2m_s}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 1 + 2m_s &= 2 - m_s \Rightarrow 3m_s = 1 \Rightarrow m_s = \frac{1}{3} \\ \rightarrow -1 - 2m_s &= 2 - m_s \Rightarrow m_s = -3 \end{aligned}$$

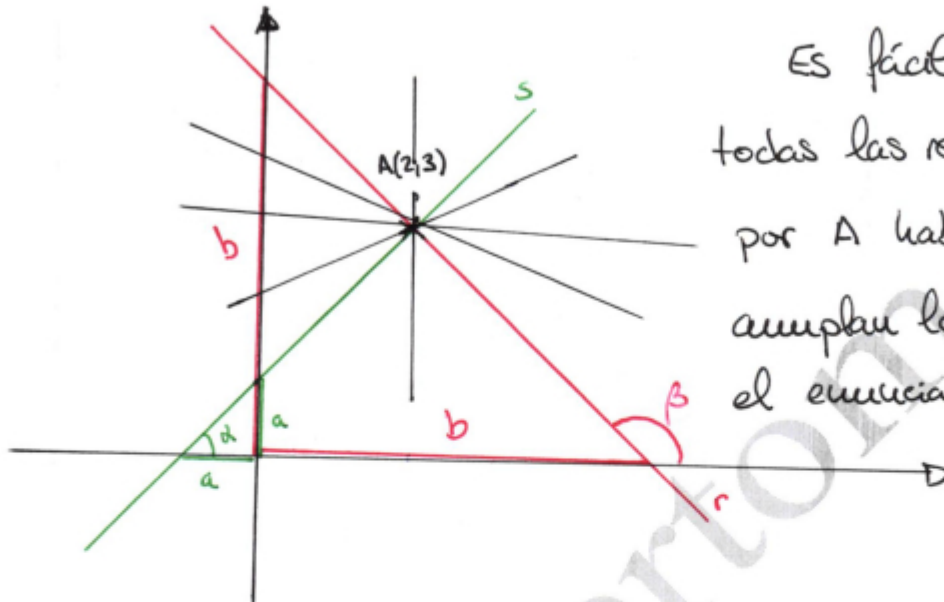
$$s: y = mx + n \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + n \xRightarrow{A(3,4)} 4 = \frac{1}{3} \cdot 3 + n \Rightarrow n = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{s: y = \frac{1}{3}x + 3}$$

$$s': y = mx + n \Rightarrow y = -3x + n \xRightarrow{A(3,4)} 4 = -3 \cdot 3 + n \Rightarrow n = 13$$

$$\Rightarrow \boxed{s': y = -3x + 13}$$

- 65) De todas las rectas que pasan por el punto $A(2,3)$, calcula la ecuación de aquellas que al cortar a los ejes coordenados determinan segmentos de igual longitud.



Es fácil razonar que de todas las rectas que pasan por A habrá dos que cumplan lo que nos dice el enunciado.

Al determinar segmentos iguales

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow m_s = 1$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{b}{b} = -1 \Rightarrow m_r = -1$$

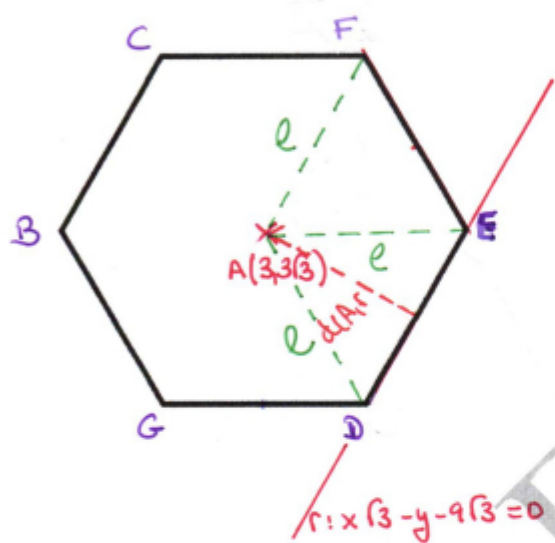
$$\Rightarrow s: y = mx + n \Rightarrow y = x + n \xRightarrow{A(2,3)} 3 = 2 + n \Rightarrow n = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{s: y = x + 1}$$

$$\Rightarrow r: y = mx + n \Rightarrow y = -x + n \xRightarrow{A(2,3)} 3 = -2 + n \Rightarrow n = 5$$

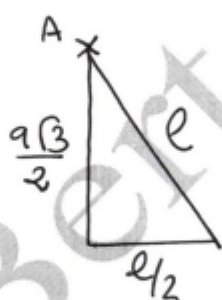
$$\Rightarrow \boxed{r: y = -x + 5}$$

- 66) El centro de un hexágono regular se encuentra en el punto $A(3, 3\sqrt{3})$ y uno de los lados se encuentra sobre la recta $r: x\sqrt{3} - y - 9\sqrt{3} = 0$. Calcula las coordenadas de todos los vértices del hexágono y su área.



$$d(A, r) = \frac{|3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Ahora tenemos



$$\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$\frac{81 \cdot 3}{4} + \frac{l^2}{4} = l^2$$

$$\frac{81 \cdot 3}{4} = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow l = 9$$

El punto $D \in r$ tiene la forma $D(x, x\sqrt{3} - 9\sqrt{3})$

La distancia de A a D es $|\overline{AD}|$ y sabemos que esa

distancia es $l = 9$. Así:

$$\overline{AD} = (x, x\sqrt{3} - 9\sqrt{3}) - (3, 3\sqrt{3}) = (x-3, x\sqrt{3} - 12\sqrt{3}) = (x-3, \sqrt{3}(x-12))$$

$$|\overline{AD}| = 9 \Rightarrow \left(\sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{3}(x-12))^2} \right)^2 = (9)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 3(x^2 - 24x + 144) = 81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 78x + 441 = 81 \Rightarrow 4x^2 - 78x + 360 = 0$$

$$x = \frac{78 \pm \sqrt{6084 - 5760}}{8} = \frac{78 \pm \sqrt{324}}{8} = \frac{78 \pm 18}{8} \begin{cases} \rightarrow x = \frac{15}{2} \\ \rightarrow x = 12 \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{15}{2} \Rightarrow D\left(\frac{15}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(x, 3(x-4))$$

$$\rightarrow x = 12 \Rightarrow E(12, 3\sqrt{3})$$

El punto A es el punto medio del segmento $\overline{CD}$

$$(3, 3\sqrt{3}) = \left(\frac{c_x + 15/2}{2}, \frac{c_y - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} \right)$$

$$\hookrightarrow 3 = \frac{c_x + \frac{15}{2}}{2} \Rightarrow c_x = -\frac{3}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \hookrightarrow 3\sqrt{3} = \frac{c_y - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow c_y = \frac{15\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} C = \left(-\frac{3}{2}, \frac{15\sqrt{3}}{2} \right)$$

El punto A es el punto medio del segmento $\overline{BE}$

$$(3, 3\sqrt{3}) = \left(\frac{b_x + 12}{2}, \frac{b_y + 3\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\hookrightarrow 3 = \frac{b_x + 12}{2} \Rightarrow b_x = -6 \quad \left. \begin{array}{l} \hookrightarrow 3\sqrt{3} = \frac{b_y + 3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b_y = 3\sqrt{3} \end{array} \right\} B(-6, 3\sqrt{3})$$

Para determinar F podemos razonar que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$

$$\overrightarrow{AF} = (f_x, f_y) - (3, 3\sqrt{3}) = (f_x - 3, f_y - 3\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{DE} = (12, 3\sqrt{3}) - \left(\frac{15}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$$

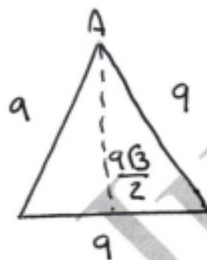
$$\Rightarrow \begin{cases} f_x - 3 = \frac{9}{2} \Rightarrow f_x = \frac{15}{2} \\ f_y - 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f_y = \frac{15\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{F\left(\frac{15}{2}, \frac{15\sqrt{3}}{2}\right)}$$

El punto A es el punto medio del segmento $\overline{GF}$

$$(3, 3\sqrt{3}) = \left(\frac{g_x + 15/2}{2}, \frac{g_y + \frac{15\sqrt{3}}{2}}{2}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} \hookrightarrow 3 &= \frac{g_x + 15/2}{2} \Rightarrow g_x = -3/2 \\ \hookrightarrow 3\sqrt{3} &= \frac{g_y + \frac{15\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow g_y = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{G\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Para el área del hexágono:



$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{9 \cdot 9\sqrt{3}/2}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4} \mu^2$$

$$\Rightarrow A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_{\text{triángulo}} = 6 \cdot \frac{81\sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{2} \mu^2$$

