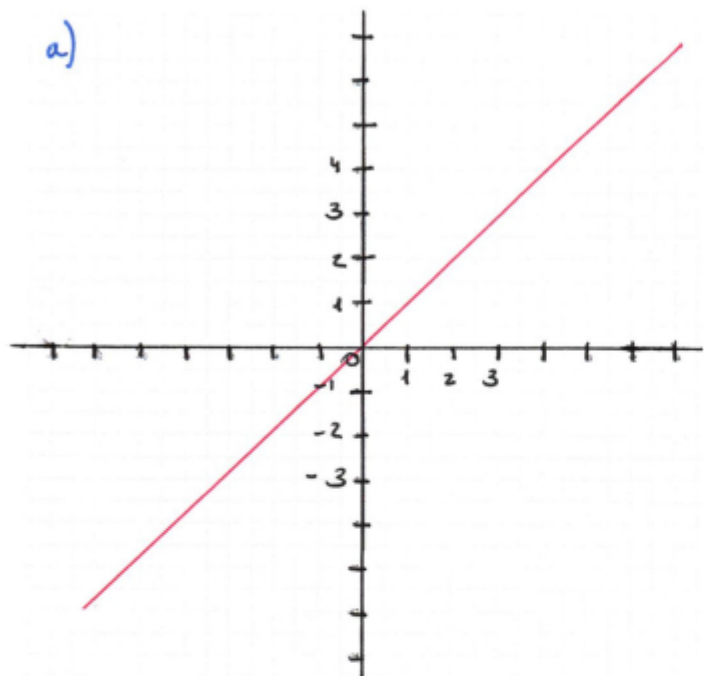


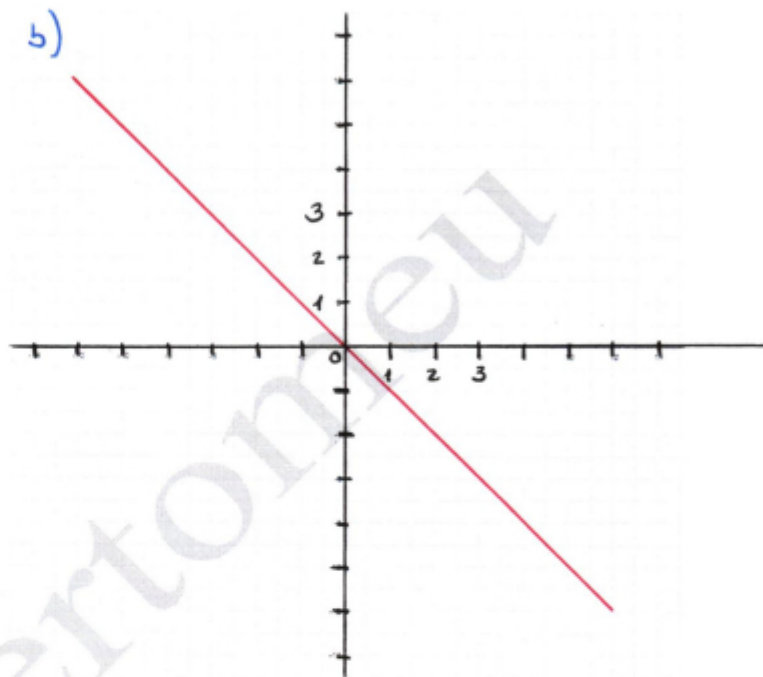
① A continuación tienes las gráficas de algunas funciones.

Evalúa $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en cada una de ellas:

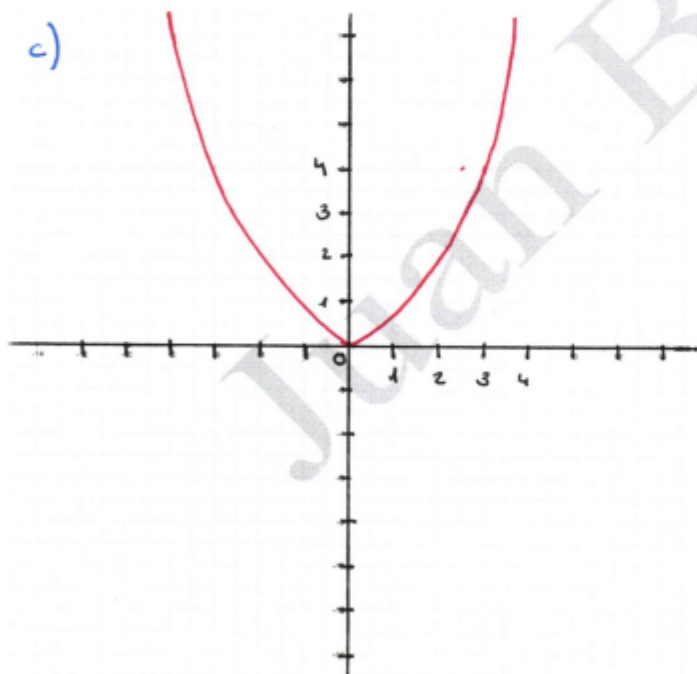
a)



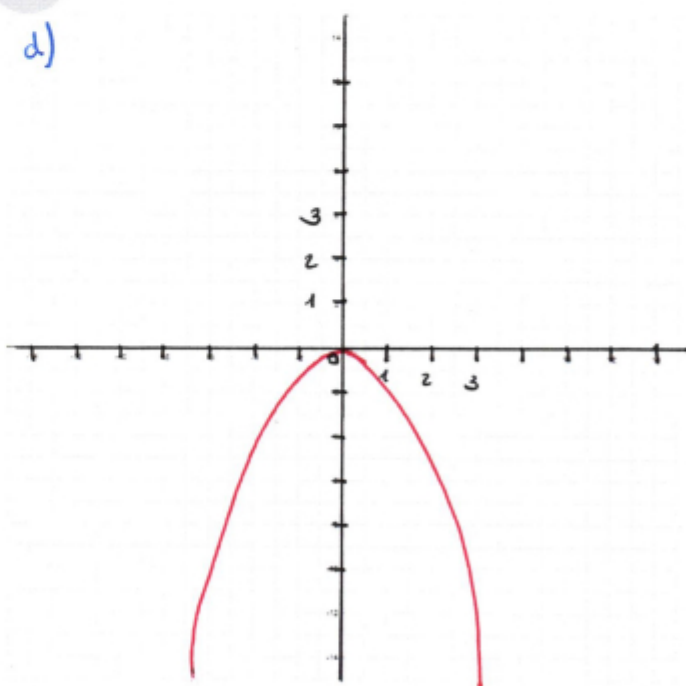
b)



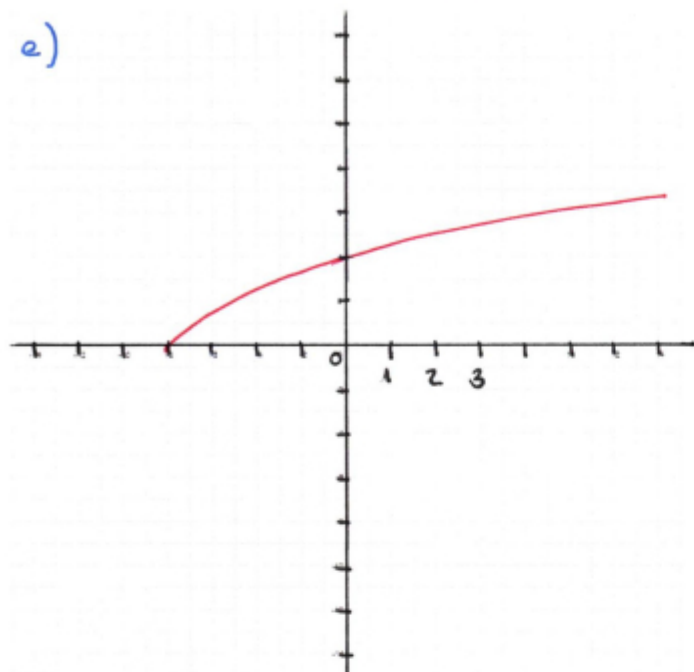
c)



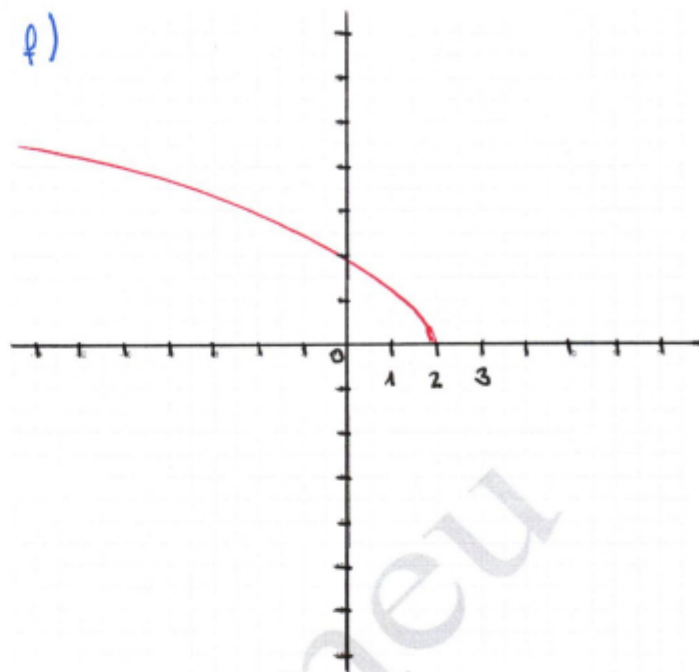
d)



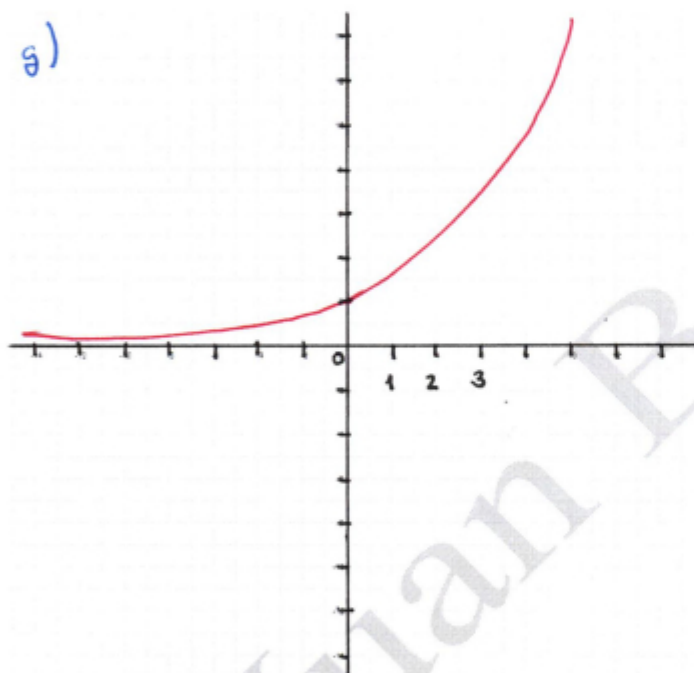
e)



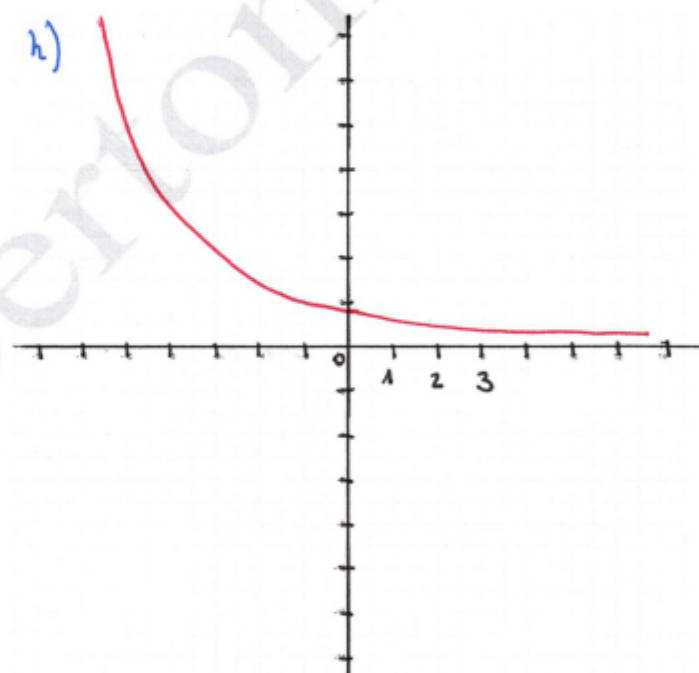
f)



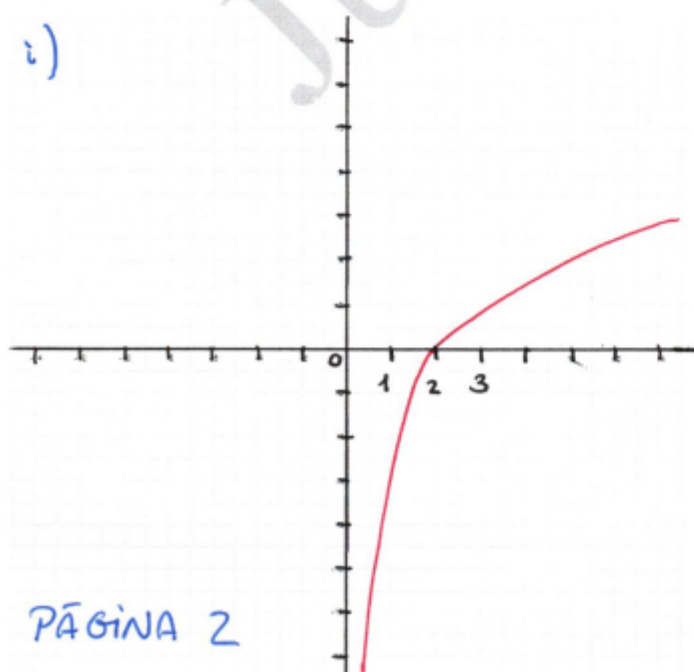
g)



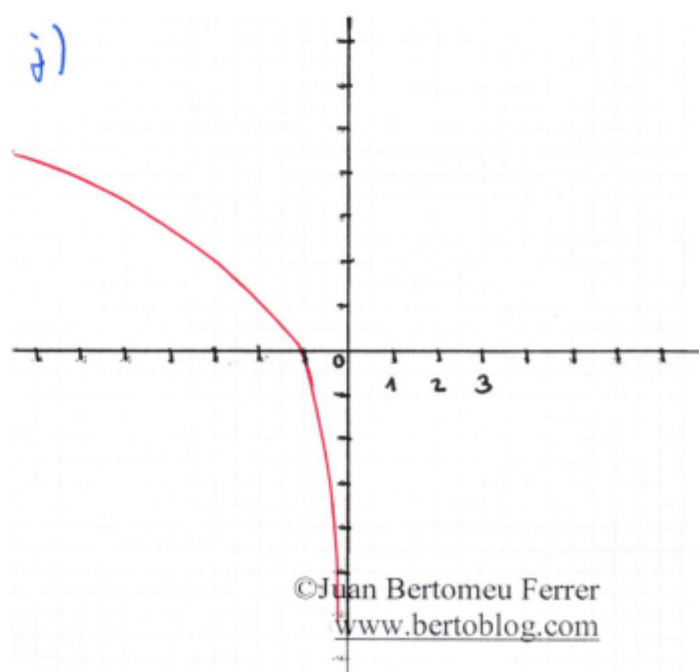
h)



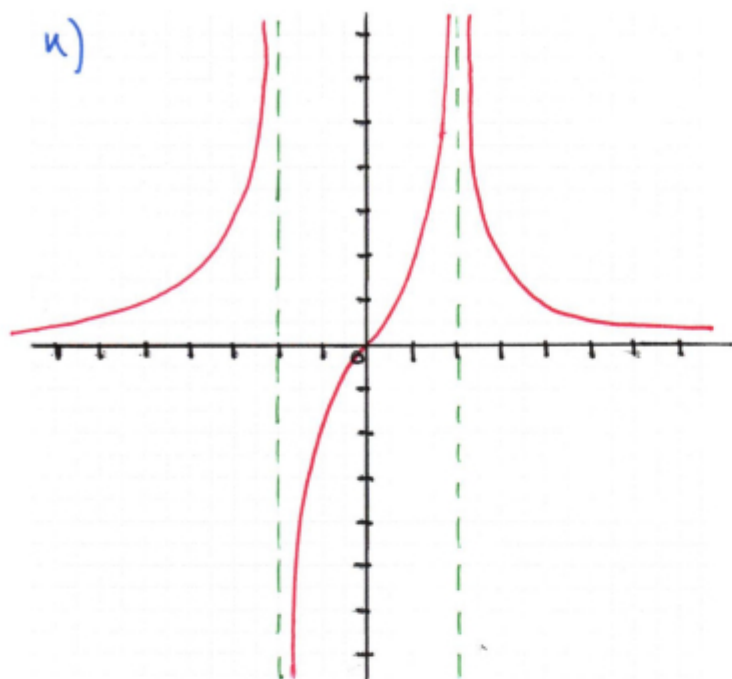
i)



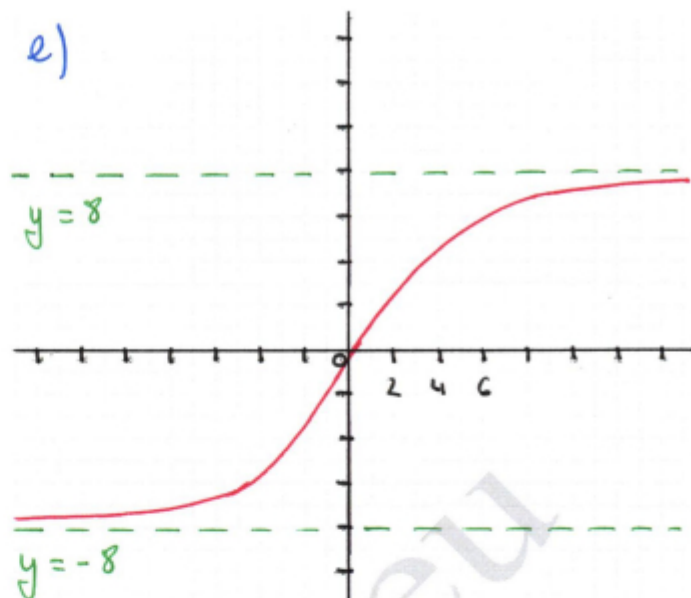
j)



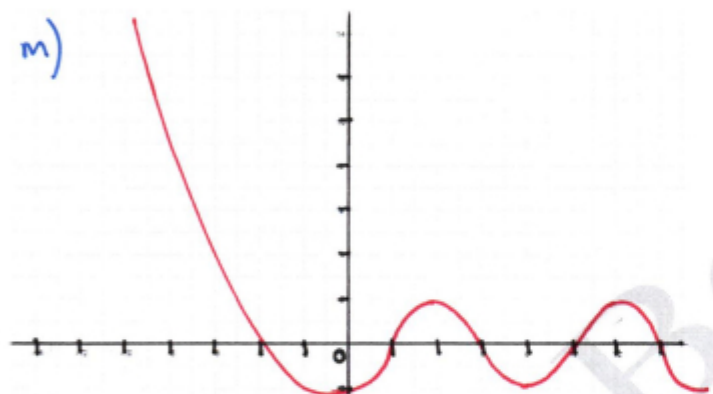
k)



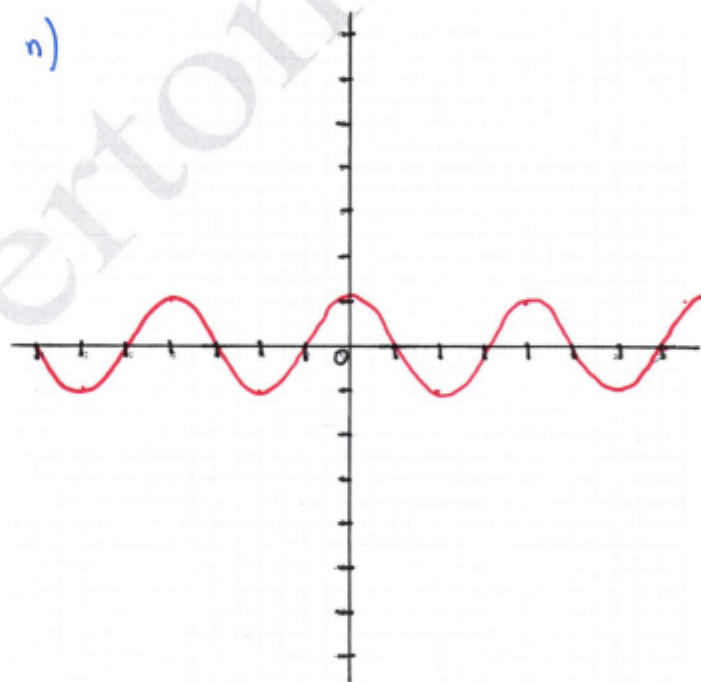
e)



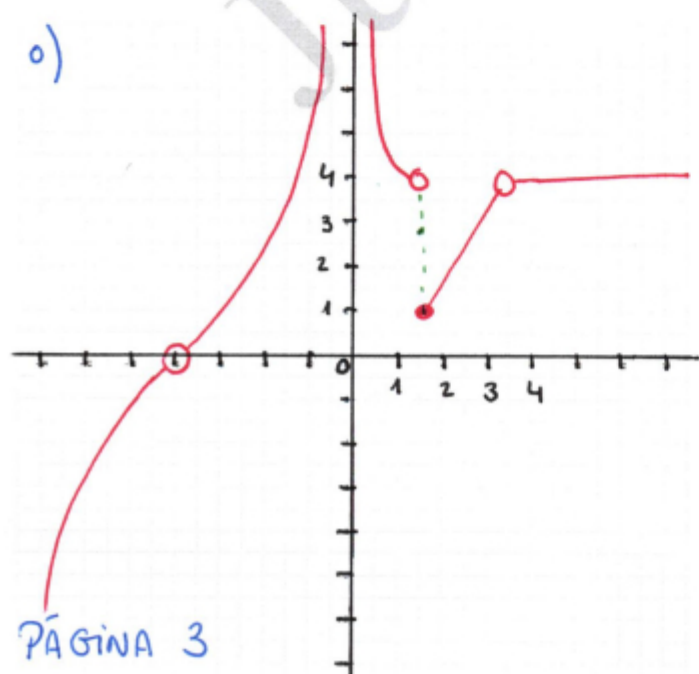
m)



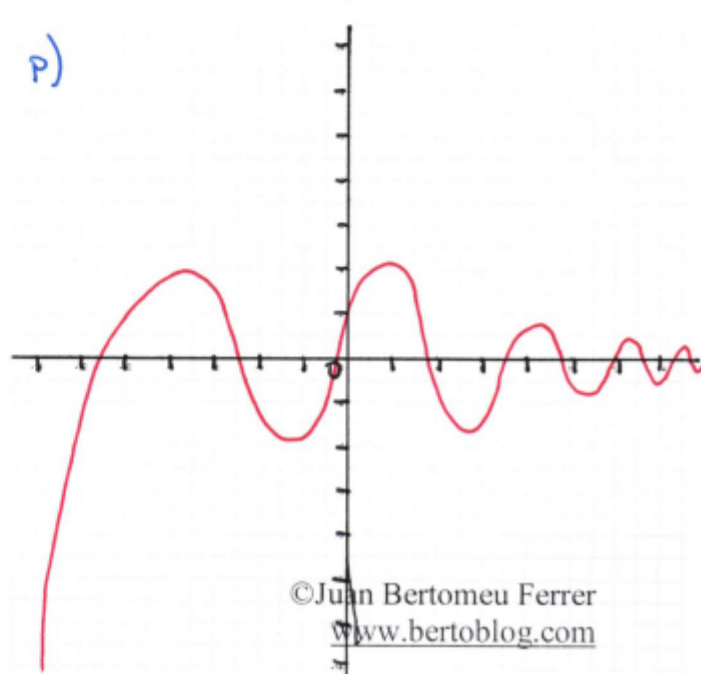
n)



o)



p)



$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty ; \nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$f) \nexists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty ; \nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$j) \nexists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 8 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -8$$

$$m) \nexists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$n) \nexists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$p) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

② Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, calcula:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = [1 - \infty] = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = [1 \cdot (-\infty)] = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{g(x)} = \left[\sqrt[3]{-\infty} \right] = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = [1 - (-\infty)] = +\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{g(x)} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{g(x)}$$

③ Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -5$, calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x)) = [\infty - 5] = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = [\infty - (-5)] = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{g(x)} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{g(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]^{g(x)} = [\infty^{-5}] = \left[\frac{1}{\infty^5} \right] = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$

④ Si $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 2$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = -3$, calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (u(x) + v(x)) = 2 + (-3) = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{v(x)}{u(x)} = \frac{-3}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{v(x)} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{v(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) \cdot v(x) = 2 \cdot (-3) = -6$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$

⑤ Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = e^2$ y $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3$, calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = e^2 - 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - g(x)) = e^2 - (-3) = e^2 + 3$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x)) = -3 \cdot e^2$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{e^2}{3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^{g(x)} = (e^2)^{-3} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(f(x)) = \ln(e^2) = 2$

⑥ Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^7 = [\infty^7] = \infty$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 = [(-\infty)^7] = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[7]{x} = [\sqrt[7]{\infty}] = \infty$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[7]{x} = [\sqrt[7]{-\infty}] = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^7} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$; f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^7} = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0$

⑦ Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} 7^x = [7^\infty] = \infty$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7^x = [7^{-\infty}] = \left[\frac{1}{7^\infty}\right] = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{7})^x = [(\sqrt{7})^\infty] = \infty$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{7})^x = [(\sqrt{7})^{-\infty}] = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} 7^{1/x} = [7^{1/\infty}] = 7^0 = 1$; f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7^{1/x} = 7^0 = 1$

⑧ Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = [2^\infty] = \infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = [2^{-\infty}] = \left[\frac{1}{2^\infty}\right] = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^\infty\right] = 0$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}\right] = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} -3^x = [- (3^\infty)] = -\infty$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3^x = [- (3^{-\infty})] = 0$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4^{-x} = [4^{-\infty}] = 0$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{-x} = [4^{-(-\infty)}] = [4^\infty] = \infty$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2(x) = [\log_2(\infty)] = \infty$ j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_2(x) \Rightarrow \nexists$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2)^x \Rightarrow \nexists$

⑨ Ordena de mayor a menor los órdenes de magnitud de los siguientes infinitos:

$$\log_2(x); \log_5(x); x^2; \sqrt{x}; 3x^5; 4^x; 3^x$$

El orden de magnitud de estos infinitos es:

$$4^x > 3^x > 3x^5 > x^2 > \sqrt{x} > \log_2(x) > \log_5(x)$$

⑩ Utilizando el orden de magnitud de los infinitos del ejercicio anterior, calcula SIN EFECTUAR NINGUNA OPERACIÓN los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2(x)}{\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{4^x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_5(x)}{\log_2(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{3^x}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x}{\sqrt{x}}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x})$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_5(x) - 3^x)$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4^x - 3^x)$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 - \log_2(x))$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_5(x) - \log_2(x))$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - 3x^5)$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^2 - \sqrt{x}}$

n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 3x^5}{\log_2(x)}$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5}{x^2} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{4^x} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{\log_2(x)} = +\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{3^x} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x}) = +\infty$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} (\log_5(x) - 3^x) = -\infty$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} (4^x - 3^x) = +\infty$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 - \log_2(x)) = +\infty$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} (\log_5(x) - \log_2(x)) = -\infty$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - 3x^5) = -\infty$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^2 - \sqrt{x}} = +\infty$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 3x^5}{\log_2(x)} = -\infty$$

11) Resuelve los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{x^2}$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2 - x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - x^3}{x+8}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - x^4}{2^x + e^x}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2^x}{e^x}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{x^3 + \sqrt{x}}$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{4^x}$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{3x^2 + \ln x}$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2}{\sqrt{x} - 3x^3}$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$

n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 8}}{\sqrt[3]{-8x^2 + 5x}}$

o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{3^x + x}$

p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{2x^2 + 3}}$

q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^2 + 8} + \log_2(x)}$

r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 4^x}{x + 4^{x+1}}$

s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + \sqrt{x^2 + 8}}{\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 - 5}}$

t) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt[3]{2x+1})$

u) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2^x)$

v) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x})$

w) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - 2^x)$

x) $\lim_{x \rightarrow \infty} (5^x - \sqrt[3]{x^3 - 2})$

y) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \log_5 x^4)$

z) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - x^6)$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 8}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - x^3}{x + 8} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - x^4}{2^x + e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{e^x} = +\infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2^x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{e^x} = 0$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{x^3 + \sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{4^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{4^x} = 0$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{3x^2 + \ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2}{\sqrt{x} - 3x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3}}{-3\cancel{x^3}} = -\frac{1}{3}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2-1} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+8}}{\sqrt[3]{-8x^2+5x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{-8} \cdot \cancel{\sqrt[3]{x^2}}} = -\frac{1}{2}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{3^x + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{3^x} = 1$$

$$p) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{2x^2+3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+8} + \log_2(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{x}} = 2$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 4^x}{x + 4^{x+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{4^x}}{\cancel{4^x} \cdot 4} = \frac{1}{4}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x) + \sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8} + \sqrt{x^2-5}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - \sqrt[3]{2x+1}) = +\infty$$

$$u) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$$

$$x) \lim_{x \rightarrow \infty} (5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}) = +\infty$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}) = +\infty$$

$$y) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \log_5 x^4) = +\infty$$

$$w) \lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - 2^x) = +\infty$$

$$z) \lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - x^6) = +\infty$$

12) Completa $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\boxed{}}{2x^3 - x + 12}$ escribiendo en el numerador

una función de modo que el resultado sea:

a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 4; d) 0

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 8}{2x^3 - x + 12} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4}{2x^3 - x + 12} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x}{2} = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + \sqrt{x}}{2x^3 - x + 12} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3}{2x^3} = \frac{8}{2} = 4$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 5}{2x^3 - x + 12} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

* Ejercicio de respuesta abierta.

13) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 7)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{2x^2 + 3x - 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{10}}{(x+2)^{10}}$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^5 - x^2}{2x^6 + 1} - \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 1}{x^3} \cdot \frac{4x^4}{2x^4 + 3} \right)$ j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2 + 7}{2x}\right)$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x^2 + 1}{x^2 + x + 2}}$ l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right)$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3(1-x)}{2x^4 - x - 1} + \frac{4}{x^2} \right)$ n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{2x^4 + 1} + \frac{-x^3}{3x^3 + x + 1} \right)$

o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2x^3 + 1}{2x^3 + x}\right)$ p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}$

q) $\lim_{x \rightarrow \infty} 9^{\frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3}}$ r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{x+1}{x^2}}$ s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2}\right)^{\frac{x+1}{x^2}}$

t) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{-x-5} - \frac{2x^2}{x+2} \right)$ u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{3x-2}$

$$v) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-3}{(0.3)^x}$$

$$w) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

$$x) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+5} \right)^x$$

$$y) \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{3x^2-6}{3x^2} \right)$$

$$z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{x-2} \right)^x$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 7 \right) = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \right)^x = +\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^x = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{2x^2+3x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{2x^2} = 0$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{10}}{(x+2)^{10}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{10} = 1^{10} = 1$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^5-x^2}{2x^6+1} - \frac{3x^2-1}{x^2+1} \right) = 0 - 3 = -3$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2-1}{x^3} \cdot \frac{4x^4}{2x^4+3} \right) = 0 \cdot 2 = 0$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2+7}{2x} \right) = \ln(\infty) = \infty$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+x+2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x^2}{x^2}} = \sqrt{3}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3(1-x)}{2x^4-x-1} + \frac{4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-x^4}{2x^4-x-1} + \frac{4}{x^2} \right) = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4+1}{2x^4+1} + \frac{-x^3}{3x^3+x+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2x^3+1}{2x^3+x} \right) = \ln 1 = 0$$

$$p) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2}{x} \right) \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} =$$

$$= (-\infty) \cdot 1 = -\infty$$

$$q) \lim_{x \rightarrow \infty} 9^{\frac{2x^2+1}{x^2-3}} = 9^2 = 81$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10} \right)^{\frac{x+1}{x^2}} = \left(\frac{1}{10} \right)^0 = 1$$

$$s) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+1}{x^2} \right)^{\frac{x+1}{x^2}} = 2^0 = 1$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{-x-5} - \frac{2x^2}{x+2} \right) = -1 - \infty = -\infty$$

$$u) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2} \right)^x \cdot \frac{1}{3x-2} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5/2)^x}{3x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = +\infty$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-3}{(0.3)^x} = \left[\frac{-\infty}{0^+} \right] = -\infty$$

$$w) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$x) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+5} \right)^x = 0^\infty = 0$$

$$y) \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{3x^2-6}{3x^2} \right) = \log(1) = 0$$

$$z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{x-2} \right)^x = [(-1)^\infty] \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{x-2} \right)^x$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^4+3x-1}}{3x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^4}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cancel{x} \sqrt[3]{x}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt[3]{x}}{3x} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{\sqrt[3]{-3x^3+5x^2+7x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}}{\sqrt[3]{-3} \cdot \cancel{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-3}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^2}{x+1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1)(x+1) - x^2 \cdot x}{x(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} + x^2 + x + 1 - \cancel{x^3}}{x^2+x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x^2}{3x-2} - \frac{-3x^2}{x-4} \right) = [-\infty + \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-2x^2)(x-4) + 3x^2 \cdot (3x-2)}{(3x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4-2x^3+8x^2+9x^3-6x^2}{3x^2-12x-2x+8} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3+2x^2+x-4}{3x^2-14x+8} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3}{3x^2} = +\infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+2}{4x^2-x-1} - \frac{x^3+2x+1}{x^2+1} \right) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3+2)(x^2+1) - (x^3+2x+1) \cdot (4x^2-x-1)}{(4x^2-x-1)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5+2x^2+x^3+2 - (4x^5+8x^3+4x^2-x^4-2x^2-x-x^3-2x-1)}{4x^4+4x^2-x^3-x-x^2-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^5+x^4-6x^3+3x+3}{4x^4-x^3+3x^2-x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^5}{4x^4} = -\infty$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x-2} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x-2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x-2})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2-x}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = 0$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{x^2-1}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - \sqrt{x^2-1})(2x + \sqrt{x^2-1})}{(2x + \sqrt{x^2-1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)^2 - (\sqrt{x^2-1})^2}{2x + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x^2 + 1}{2x + \sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{2x+\sqrt{x^2-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{3x} = +\infty$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x+1} - x) = -\infty \quad \text{0/0!! No hay indeterminación!!}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x-1} - \sqrt{x^2+1}) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x-1} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+4x-1} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+4x-1} + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x-1})^2 - (\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+4x-1} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-2}{\sqrt{x^2+4x-1} + \sqrt{x^2+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} (4x - \sqrt{x^3+5}) = -\infty \quad \text{0/0!! No hay indeterminación!!}$$

15) Calcula estos límites cuando $x \rightarrow -\infty$ transformándolas previamente en límites $x \rightarrow +\infty$.

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + 2x}{6x-3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4-6x+2}{3x^4+x-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^3-5x+3}}{x^2-2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+3}}{3x-2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2} \right)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+ax} - x) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax} - x)(\sqrt{x^2+ax} + x)}{(\sqrt{x^2+ax} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+ax} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2+ax} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{a}{2}$$

$\uparrow$
 $a \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+bx-3} - 2x) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2+bx-3} - 2x)(\sqrt{4x^2+bx-3} + 2x)}{(\sqrt{4x^2+bx-3} + 2x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2+bx-3})^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2+bx-3} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx-3}{\sqrt{4x^2+bx-3} + 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b\cancel{x}}{4\cancel{x}} = \frac{b}{4}$$

$\uparrow$
 $b \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{b}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2+7} - cx) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2+7} - cx)(\sqrt{9x^2+7} + cx)}{(\sqrt{9x^2+7} + cx)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2+7})^2 - (cx)^2}{\sqrt{9x^2+7} + cx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2+7 - c^2x^2}{\sqrt{9x^2+7} + cx} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(9-c^2)x^2+7}{\sqrt{9x^2+7} + cx} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(9-c^2) \cdot x^2}{(3+c) \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3+c)(3-c)x}{(3+c)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (3-c) \cdot x$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow \infty} (3-c) \cdot x = 0 \Rightarrow \boxed{c=3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{dx^2+x-5} - 2x) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{dx^2+x-5} - 2x)(\sqrt{dx^2+x-5} + 2x)}{\sqrt{dx^2+x-5} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{dx^2+x-5})^2 - (2x)^2}{\sqrt{dx^2+x-5} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dx^2+x-5-4x^2}{\sqrt{dx^2+x-5} + 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(d-4) \cdot x^2}{(2+\sqrt{d}) \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(d-4) \cdot x}{2+\sqrt{d}} \Rightarrow \boxed{\text{Si } d > 4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(d-4) \cdot x}{2+\sqrt{d}} = +\infty$$

①7) Determina los valores de "a" y "b" para que se cumpla

que $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2+3} - \sqrt{bx^2-x}) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2+3} - \sqrt{bx^2-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{ax^2+3} - \sqrt{bx^2-x}) \cdot (\sqrt{ax^2+3} + \sqrt{bx^2-x})}{(\sqrt{ax^2+3} + \sqrt{bx^2-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{ax^2+3})^2 - (\sqrt{bx^2-x})^2}{\sqrt{ax^2+3} + \sqrt{bx^2-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-b)x^2 + x + 3}{\sqrt{ax^2+3} + \sqrt{bx^2-x}}$$

$$\xrightarrow{\uparrow \text{Si } a=b} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{\sqrt{ax^2+3} + \sqrt{bx^2-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(a+b)x} = \frac{1}{a+b}$$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} \nearrow a=b \\ \searrow \frac{1}{a+b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a=b=1 \end{cases}$

①8) Estudia en función de los valores de los parámetros "a" y "b", los posibles valores de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2-1} - ax)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{5x^2+2x-1} - 3x)$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2-1} - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2-1} - ax) \cdot (\sqrt{4x^2-1} + ax)}{\sqrt{4x^2-1} + ax} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2-1})^2 - (ax)^2}{\sqrt{4x^2-1} + ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1 - a^2x^2}{\sqrt{4x^2-1} + ax} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4-a^2)x^2 - 1}{\sqrt{4x^2-1} + ax} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4-a^2) \cdot x^2}{(2+a) \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2+a)(2-a) \cdot x}{(2+a)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2-a) \cdot x$$

Por lo tanto

Si $a < 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2-1} - ax) = +\infty$

Si $a = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2-1} - ax) = 0$

Si $a > 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2-1} - ax) = -\infty$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{bx^2+2x-1} - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{bx^2+2x-1} - 3x) \cdot (\sqrt{bx^2+2x-1} + 3x)}{(\sqrt{bx^2+2x-1} + 3x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{bx^2+2x-1})^2 - (3x)^2}{\sqrt{bx^2+2x-1} + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b-9)x^2 + 2x - 1}{\sqrt{bx^2+2x-1} + 3x}$$

y distinguiremos los casos:

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{4x-1}{4x} \right)^{3x+2} = [1^\infty] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) \left(2 - \frac{4x-1}{4x} - 1 \right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) \cdot \left(1 - \frac{4x-1}{4x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) \left(\frac{4x - 4x + 1}{4x} \right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{4x}} = e^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{e^3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^{3x+1} = [1^\infty] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+1) \left(\frac{x}{x+3} - 1 \right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+1) \left(\frac{x - x - 3}{x+3} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x-3}{x+3}} = e^{-9} = \frac{1}{e^9}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)^{x-1} = [1^\infty] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) \left(\frac{x^2+1}{x^2} - 1 \right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) \cdot \left(\frac{x^2+1-x^2}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2}} = e^0 = 1$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1} \right)^{x+6} = [1^\infty] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x+6) \cdot \left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1} - 1 \right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x+6) \cdot \left(\frac{x^2-x+2-x^2-1}{x^2+1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x+6) \cdot \frac{-x+1}{x^2+1}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2-5x+6}{x^2+1}} = e^{-1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{2x}} = 1^0 = 1$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2} \right)^{x^2-3x} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\infty} = 0$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{2+3x} \right)^{3x^2} = [1^{\infty}] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 \cdot \left(\frac{3x-1}{2+3x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 \cdot \left(\frac{3x-1-2-3x}{2+3x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x^2}{2+3x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{x^2}{x^2+1} \right)^{\frac{x^2}{x-1}} = [1^{\infty}] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} \cdot \left(2 - \frac{x^2}{x^2+1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3-x^2+x-1}} = e^0 = 1$$

20) Resuelve los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4-6x+1}{5x^3+3x^2} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4-6x+1}{-5x^3+3x^2} \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2-3x}{x^3+1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4-6x+2}{3x^4+x-1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^2 \cdot (x-1) \cdot x}{x^3 - (x+3)^3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^2 x}{x^3-10x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3-5x+3}{x^2-2x}}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-5x}}{3x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} \quad k) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 12x + 9}{\sqrt[3]{x^5 + 5x - 2}} \quad l) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + x}{x}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sqrt{6 + x}}{2x + 4} \quad n) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + \sqrt{3x - 2}}{2x}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + 5}{x + 2} - \frac{4x^3 - x}{x - 2} \right) \quad p) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x}{2} \right)$$

$$q) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 5}{2} - \frac{x^2 - 2}{x} \right) \quad r) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 5)^{x^2 - 5x + 1}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 5}{2x + 1} \right)^x \quad t) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{2x - 3} \right)^{x^2 + x} \quad u) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{1 + 2x^2}{2x - 1} \right)$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{1 + 4x}) \quad w) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x)$$

$$x) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x) \quad y) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{x^2}{x-1}} \quad z) \lim_{x \rightarrow \infty} (0.7)^{\frac{x^2}{x-1}}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x + 1}{5x^3 + 3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{5} \cdot x = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x + 1}{-5x^3 + 3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4}{-5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{3}{5} \cdot x = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 3x}{x^3 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{5x^4}}{\cancel{3x^4}} = \frac{5}{3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^2 \cdot (x-1) \cdot x}{x^3 - (x+3)^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(9x^2+6x+1) \cdot (x^2-x)}{\cancel{x^3} - (\cancel{x^3} + 9x^2 + 27x - 27)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^4 - 9x^3 + 6x^3 - 6x^2 + x^2 - x}{-9x^2 - 27x - 27} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x}{-9x^2 - 27x - 27} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{9x^4}^2}{\cancel{-9x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^2 \cdot x}{x^3 - 10x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + 6x^2 + x}{x^3 - 10x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{9x^3}}{\cancel{x^3}} = 9$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{3x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8 \cdot \sqrt[3]{x^3}}}{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{3x}} = \frac{2}{3}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{2x}} = \frac{1}{2}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x^2}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = +\infty$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}) \quad n) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} \quad o) \lim_{x \rightarrow \infty} (0.3)^x$$

$$p) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)^x \quad q) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{x+1} \right)^x \quad r) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x-4} \right)^{3x-6}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x-4} \right)^{\frac{1}{3x-6}} \quad t) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^{1+x}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{(1-x)^2} \right)^{\frac{x^2+3}{x-1}} \quad v) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - x) \quad w) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x+3}$$

$$x) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2x^3+1} \quad y) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2-4x}) \quad z) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2-4x})$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^2}{3x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2+6x+1}{3x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2}{3x^2} = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x}+4)^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(2x+1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x^2+3x+1 - (x^3-3x^2+3x-1)}{4x^2-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+2}{4x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{4x^2} = \frac{3}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x}}{1+x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} + 2x}{\sqrt{x^3} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3} + 2x}{\sqrt{x^3} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}} = 1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{2x^2-1}{x^2-1} \right) = 0 - 2 = -2$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1-3x^2}{x-2} \right) = [\infty - (-\infty)] = [\infty + \infty] = +\infty$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x-1} - \frac{x}{2} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x(2x-1)}{2(2x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + x}{4x - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}}{4\cancel{x}} = \frac{1}{4}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{x}{\sqrt{x}+1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x}+1) - x(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{x} + x - \cancel{x}\sqrt{x} + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x) \cdot (\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - x) \cdot (\sqrt{x^2+2x} + x)}{\sqrt{x^2+2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}) = +\infty \quad \text{No hay indeterminación !!}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} (0.3)^x = [(0.3)^\infty] = 0$$

$$p) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)^x = [(\infty)^\infty] = +\infty$$

$$u) \lim_{x \rightarrow -\infty} |x^3| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |(-x)^3| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |-x^3| = |- \infty| = +\infty$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}) \cdot (\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x})^2 - (\sqrt{x^2-x})^2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$$w) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + x} - x \right) = -\infty$$

$$x) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{-x} = \left[\frac{\ln 1}{-\infty} \right] = 0$$

$$y) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x} = -1$$

$$z) \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(1+x) - \ln(x)] = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(f(x)) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\right)$$

23) Determina el valor del parámetro "m" para que se cumplan las siguientes igualdades:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5}) = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 4x} - 3x + m) = \frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{mx + 2x^2} \right)^{x+2} = \frac{1}{e}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 3}{2 + 5x} \right)^{\frac{x^2 - 2}{8 + mx}} = \frac{7}{10}$$

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5}) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5}) \cdot (2x^2 + \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5})}{2x^2 + \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2)^2 - (\sqrt{4x^4 + mx^2 - 5})^2}{2x^2 + \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - (4x^4 + mx^2 - 5)}{2x^2 + \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-mx^2 - 5}{2x^2 + \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5}} \stackrel{m \neq 0}{=} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-mx^2}{4x^2} = -\frac{m}{4} \\ &\Rightarrow -\frac{m}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{m = -8} \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2+4x} - 3x+m) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2+4x} - (3x-m)) \cdot (\sqrt{9x^2+4x} + (3x-m))}{\sqrt{9x^2+4x} + (3x-m)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2+4x})^2 - (3x-m)^2}{\sqrt{9x^2+4x} + (3x-m)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2+4x - (9x^2-6mx+m^2)}{\sqrt{9x^2+4x} + (3x-m)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4+6m)x - m^2}{\sqrt{9x^2+4x} + 3x-m} \underset{\substack{\uparrow \\ 4+6m \neq 0}}{=} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4+6m) \cdot \cancel{x}}{\cancel{6x}} = \frac{4+6m}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{4+6m}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4+6m = 3 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{6}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3}{mx+2x^2} \right)^{x+2} = \left[\frac{1}{1} \right]^{\infty} = e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \cdot \left(\frac{2x^2+3}{mx+2x^2} - 1 \right) =$$

$$= e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \cdot \left(\frac{2x^2+3-mx-2x^2}{mx+2x^2} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-mx^2+3x-2mx+6}{mx+2x^2} =$$

$$= e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-m \cancel{x^2}}{\cancel{2x^2}} = e^{-m/2}$$

$$\Rightarrow e^{-m/2} = \frac{1}{e} \Rightarrow \cancel{e^{-m/2}} = \cancel{e^{-1}} \Rightarrow -m/2 = -1 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

$$\Rightarrow f(x) = |x+2| - |x-2| = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ 2x & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 = -4$$

$$b) f(x) = x - |3-2x|$$

$$3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{ccc} 3-2x & & 2x-3 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & \text{---} & \\ & \frac{3}{2} & \\ x - (3-2x) & & x - (2x-3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3x-3 & & -x+3 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-3 & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \\ -x+3 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

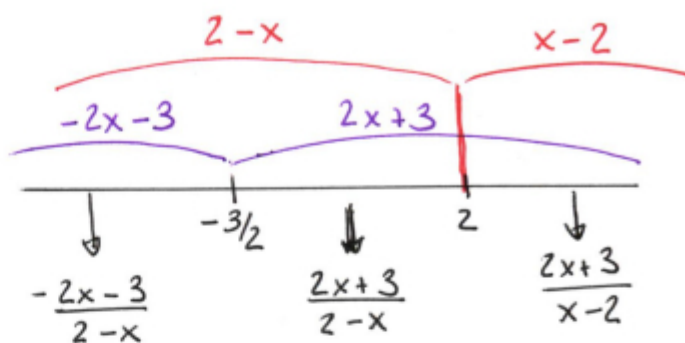
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x+3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x-3) = -\infty$$

$$c) f(x) = \left| \frac{2x+3}{x-2} \right|$$

$$2x+3=0 \Rightarrow x=-3/2$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$



$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x-2} & \text{si } x < -3/2 \\ \frac{2x+3}{2-x} & \text{si } -3/2 \leq x < 2 \\ \frac{2x+3}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

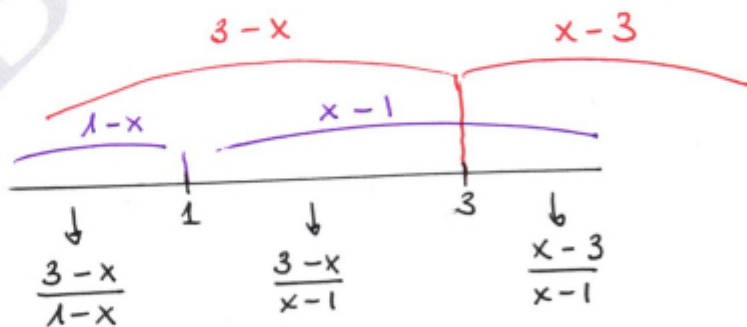
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x+3}{-x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 2$$

$$d) f(x) = \left| \frac{x-3}{1-x} \right|$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$

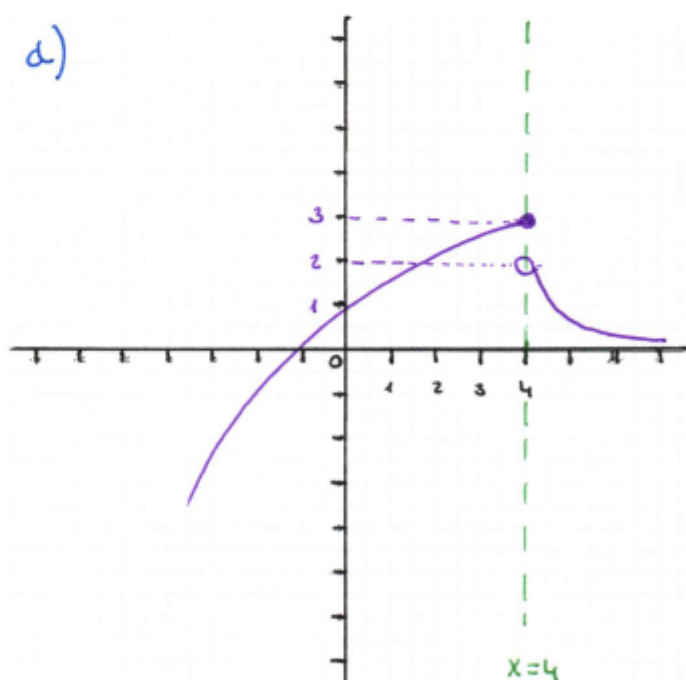
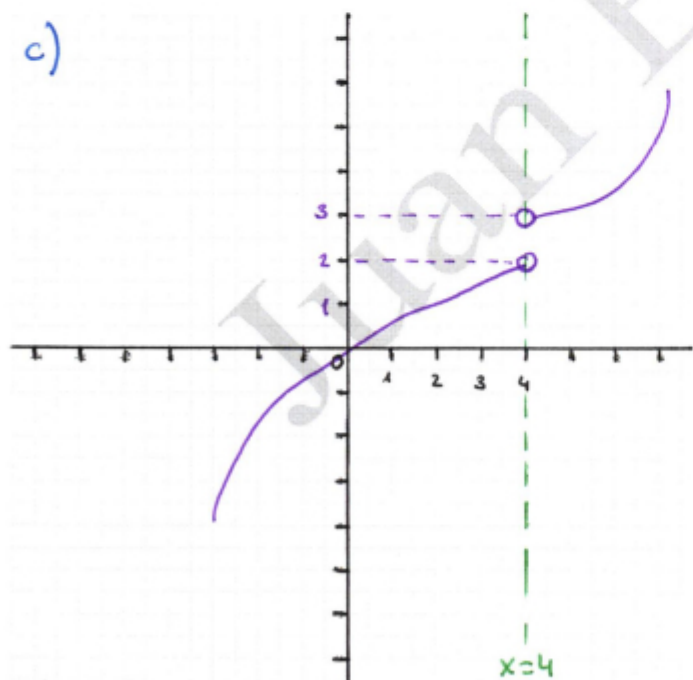
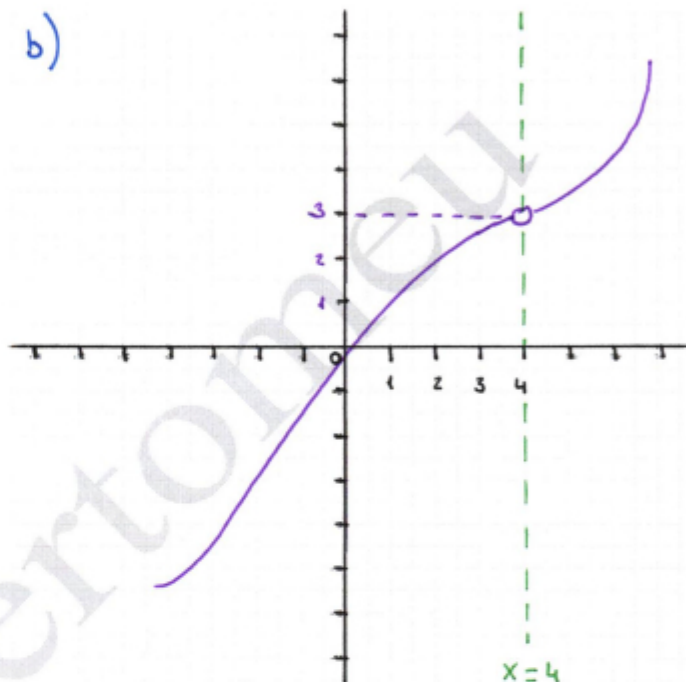
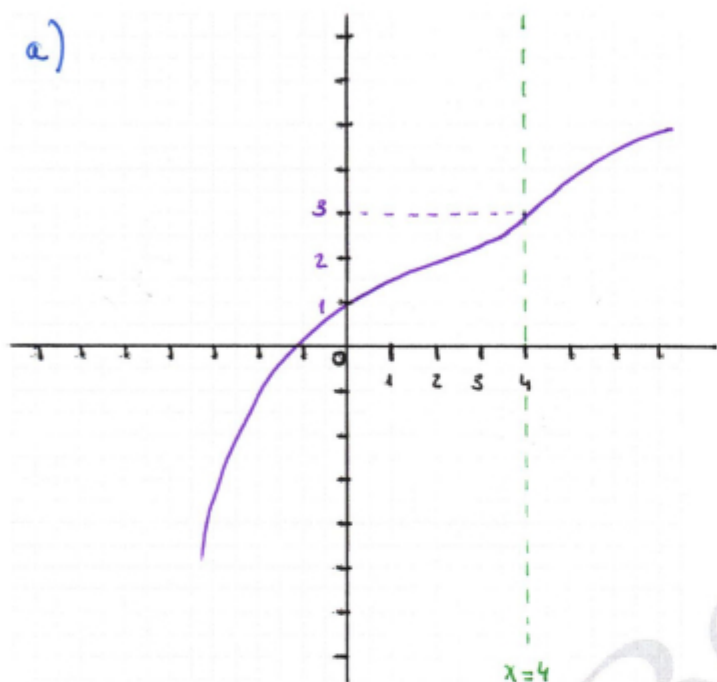


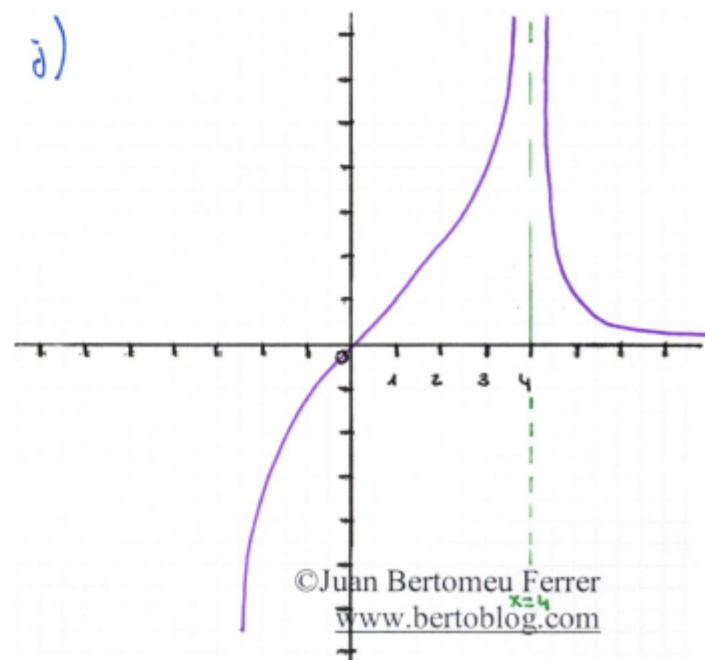
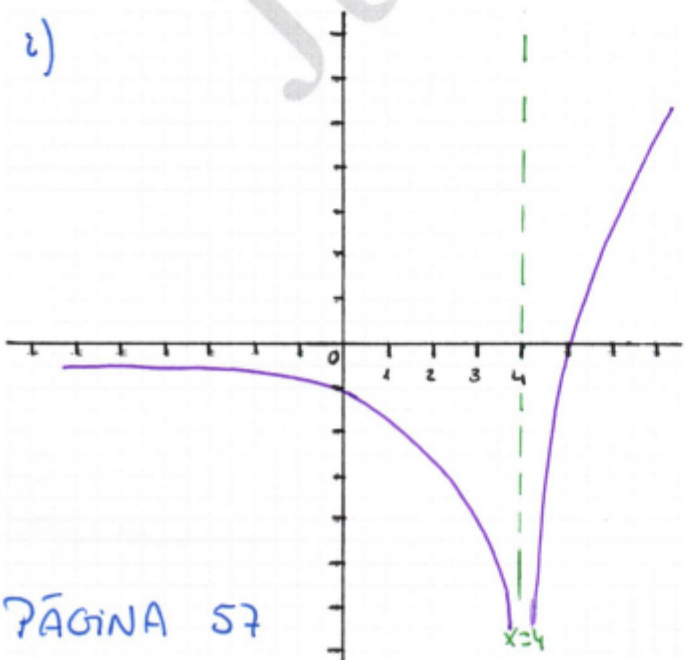
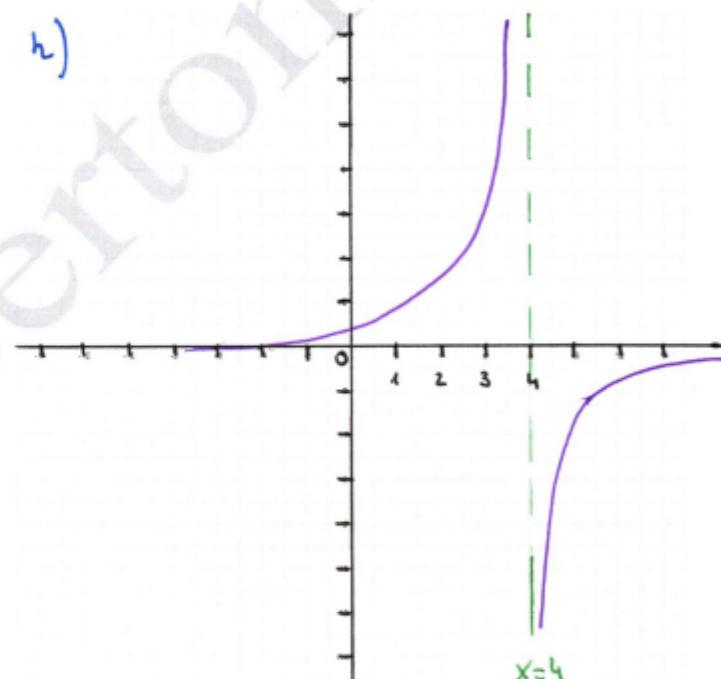
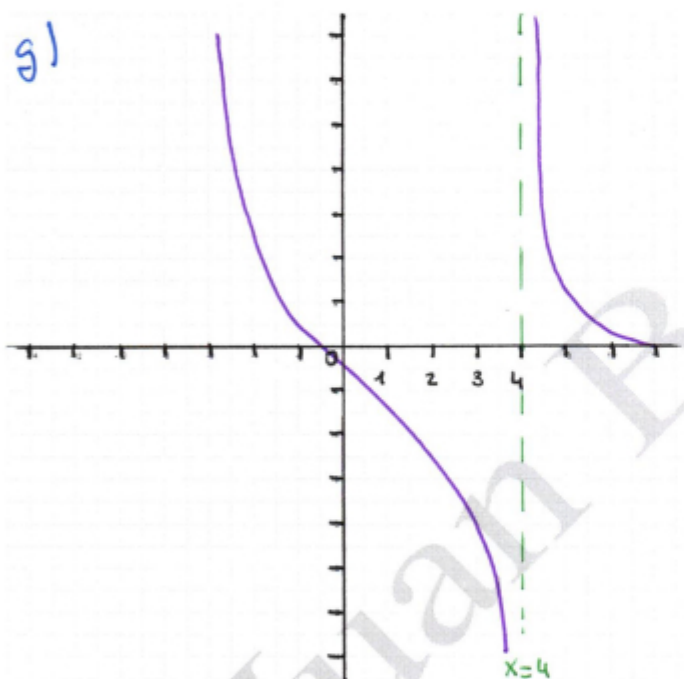
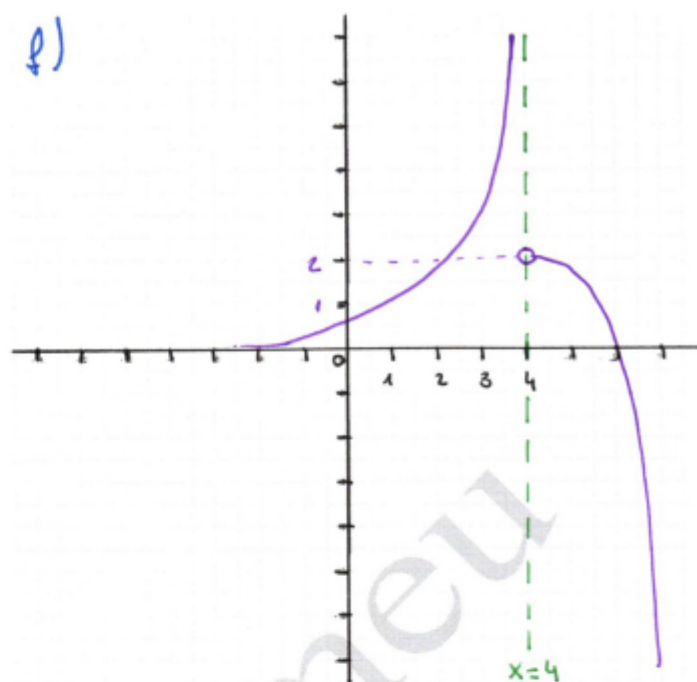
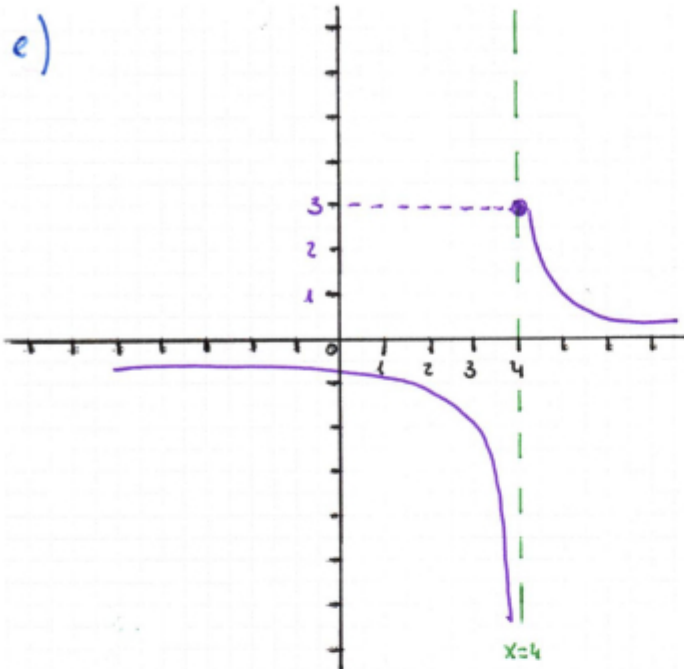
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{3-x}{x-1} & \text{si } 1 < x < 3 \\ \frac{x-3}{x-1} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x}{1+x} = 1$$

26) A continuación se dan las gráficas de algunas funciones en las que debes evaluar $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ en cada una de ellas.





a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$; b) $\nexists \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

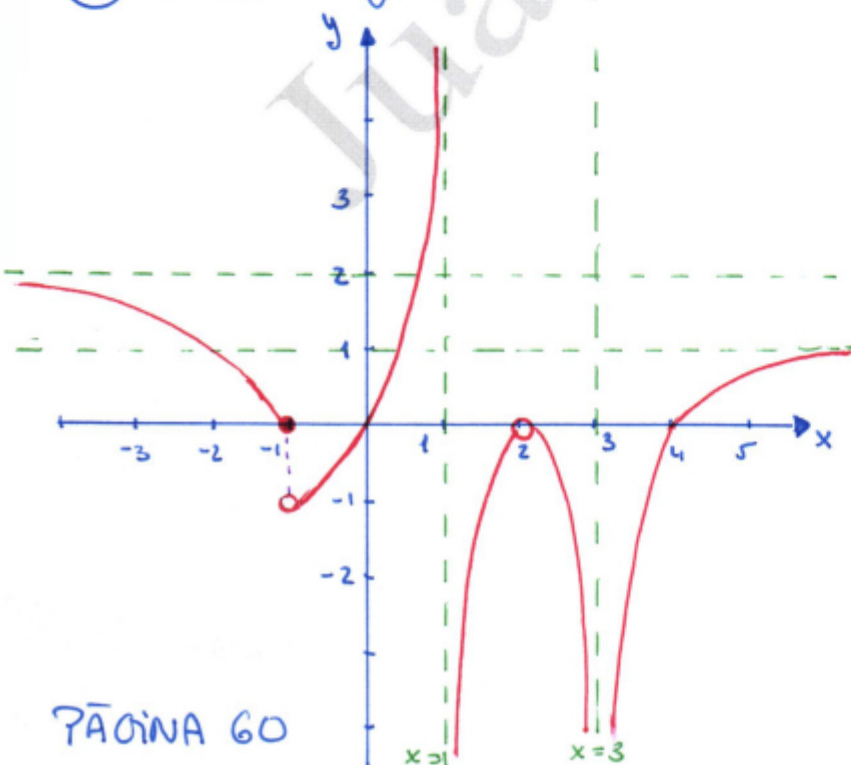
c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

f) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$; g) $\nexists \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

28) Dada la gráfica de $f(x)$, calcula los límites que se indican:



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

29) Calcular el valor de los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x+1) \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{3+x} \quad c) \lim_{x \rightarrow -5} (x^2+1)^{x+5}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2} \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \quad f) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2-3x+5}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1/10} \log x \quad h) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} \quad i) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+3)^x$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x+1) = 7 \quad ; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{3+x} = 2^3 = 8$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -5} (x^2+1)^{x+5} = 26^0 = 1 \quad ; \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2} = -\frac{3}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 1 - 1 = 0 \quad ; \quad f) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2-3x+5} = \sqrt{3}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1/10} \log x = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+3)^x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

30) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2 - 2x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{1+e^x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{1+e^{1/x}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}}{1-2^x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{\ln(x+1)}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5-x}{\sin(x)}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} = \left[\frac{3}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5}{x} = \left[\frac{-5}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-5}{x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x^2} = \left[\frac{5}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{x^2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x^2} = +\infty$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{\ln(x+1)} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{\ln(x+1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{\ln(x+1)} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{\ln(x+1)}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5-x}{\operatorname{sen}(x)} = \left[\frac{5}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5-x}{\operatorname{sen}(x)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5-x}{\operatorname{sen}(x)} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5-x}{\operatorname{sen}(x)}$$

31) Resuelve los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{3x+3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+2x}{x^2-3x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-5x+1}{x^3+2x^2-3x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3+2x^2-8x-8}{x^2+x-6}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-5x+2}{x^2+2x} - \frac{x^3+2x+1}{x^3+x} \right) \quad h) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right]$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^2+4x+4}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+4x+3}{x+3}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+3}{x^3} - \frac{1}{x} \right)$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x-5}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-7x+6}{x-1}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2-2x}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-3x^2}{x^2-x}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2+15x}{x^3-3x^2}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{1-x}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+2x+1}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-4x^2+1}{x^2-1}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2+3x}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}$$

$$w) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{2x^2-8x+8}$$

$$x) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{1-x}$$

$$y) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}$$

$$z) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{3x+3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}}{3\cancel{(x+1)}} = \frac{1}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+2x}{x^2-3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(2x+2)}{\cancel{x}(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+2}{x-3} = -\frac{2}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcircled{*} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & & -1 & 3 & -5 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -6 & -7 \\ -1 & & -1 & +7 \\ \hline & 1 & -7 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x^2-3x+5)}{\cancel{(x+1)} \cdot (x-7)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x+5}{x-7} = -\frac{9}{8}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + 2x^2 - 8x - 8}{x^2 + x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcircled{*} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 2 & -8 & -8 \\ 2 & & 4 & 12 & 8 \\ \hline & 2 & 6 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (2x^2 + 6x + 4)}{(x-2) \cdot (x+3)} = \frac{24}{5}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = [\infty - \infty] = \textcircled{*} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + 2x = x(x+2) \\ x^3 + x = x(x^2 + 1) \end{array} \right\} \text{m.c.m} = x(x+2)(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 5x + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x + 1) \cdot (x+2)}{x(x+2)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - (x^4 + 2x^2 + x + 2x^3 + 4x + 2)}{x(x+2)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(-7x^2 + x - 10)}{\cancel{x} \cdot (x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7x^2 + x - 10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right] = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - (x-1)}{x(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \left[\frac{2}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right] = +\infty$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^2+4x+4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \circledast \Rightarrow$$

$$3x+6 = 3(x+2) \quad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 4 \\ -2 & & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \circledast = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{3(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{x+2} = \left[\frac{3}{0} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{x+2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3}{x+2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^2+4x+4}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = * \Rightarrow$$

$$1 \mid \begin{array}{rrr} 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 \\ & 2 & 0 \end{array}$$

$$1 \mid \begin{array}{rrr} 2 & -2 & 0 \\ & 2 & 0 \\ \hline & 2 & 0 \\ & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow * = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x+2)}{\cancel{(x-1)} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x-3)}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 15x}{x^3 - 3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(5x+15)}{\cancel{x}(x^2-3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+15}{x^2-3x} =$$

$$= \left[\frac{15}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5x+15}{x^2-3x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x+15}{x^2-3x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 15x}{x^3 - 3x^2}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{1-x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)}{(1-x) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 4}{(1-x) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (-1)}{\cancel{(1-x)} \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{x+3} + 2} =$$

$$= -\frac{1}{4}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+2x+1} = \left[\frac{0}{0} \right] = (*) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+2x+1}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = \left[\frac{0}{0} \right] = (*) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-4x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{-1}{0} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3-4x^2+1}{x^2-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3-4x^2+1}{x^2-1} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-4x^2+1}{x^2-1}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2+3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{x}(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{3}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8} = \left[\frac{0}{0} \right] = (*) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 12 & 8 \\ -2 & & -2 & -8 & -8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -4 & 8 \\ -2 & & -2 & +8 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2+4x+4)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2-4x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4} = \frac{0}{16} = 0$$

$$w) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{2x^2-8x+8} = \left[\frac{0}{0} \right] = (*) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & & 2 & -2 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -8 & 8 \\ 2 & & 4 & -8 \\ \hline & 2 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x^2-x)}{\cancel{(x-2)} \cdot (2x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x}{2x-4} = \left[\frac{2}{0} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-x}{2x-4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-x}{2x-4} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{2x^2-8x+8}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+2} - (x-2)}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x^2}{x^2-4} \right)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) \quad h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}} - 2 \right) \cdot \frac{1}{x} \right] \quad j) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{6}{\sqrt{x^2+4}} - 3 \right) \right]$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+3^{1/x}}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{4x^2-1}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x+6}{x^2-36}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-4x+3}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x^2}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-8x+15}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{4-\sqrt{10+x}}{2-\sqrt{10-x}}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$$

$$w) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$x) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3-x}{\sqrt{x-3}}$$

$$y) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}$$

$$z) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2-4} \right)^{\frac{1}{x+2}}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 + x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcircled{*}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & & 2 & 6 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+3x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x+2}{x+3} = \frac{12}{5}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcircled{*}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -2 & & -2 & +4 & +6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & & -2 & -2 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2 - 2x - 3)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2 + x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x} = \frac{5}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x^3 - 3x^2 - 4x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcircled{*}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 12 & 0 \\ 4 & & 4 & -12 & 0 \\ \hline & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 4 & & 4 & 4 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x^2-3x)}{\cancel{(x-4)}(x^2+x)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{19-x} - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (\sqrt{19-x} + 4)}{(\sqrt{19-x} - 4) \cdot (\sqrt{19-x} + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (\sqrt{19-x} + 4)}{(\sqrt{19-x})^2 - 4^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\overset{(-1)}{\cancel{(x-3)}} \cdot (\sqrt{19-x} + 4)}{\cancel{(3-x)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (-1) \cdot (\sqrt{19-x} + 4) = -8$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+2} - (x-2)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x^2}{x^2-4} \right) = [\infty - \infty] = \oplus \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x-2 = (x-2) \\ x^2-4 = (x-2)(x+2) \end{array} \right\} \text{m.c.m} = (x-2) \cdot (x+2)$$

$$\Rightarrow \oplus = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+2) - x^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2}}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x^2-4} =$$

$$= \left[\frac{4}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{x^2-4} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x^2}{x^2-4} \right)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) = [\infty - \infty] = \textcircled{*} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x-1 = (x-1) \\ x^2-1 = (x-1) \cdot (x+1) \end{array} \right\} \text{m.c.m} = (x-1) \cdot (x+1)$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot (x+1) - 1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})}{x \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}} - 2 \right) \cdot \frac{1}{x} \right] = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{2-2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \right) \cdot \frac{1}{x} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-2\sqrt{x+1})(2+2\sqrt{x+1})}{x \cdot \sqrt{x+1} \cdot (2+2\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-4(x+1)}{x \cdot \sqrt{x+1} \cdot (2+2\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{x \cdot \sqrt{x+1} \cdot (2+2\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{\sqrt{x+1} \cdot (2+2\sqrt{x+1})} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x+6}{x^2-36} = \left[\frac{12}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{x+6}{x^2-36} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x+6}{x^2-36} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x+6}{x^2-36}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 8$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-4x+3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcircled{*} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & 3 \\ 3 & & 3 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcircled{*} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+4) = 12$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = \left[\frac{2}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x^2} = \left[\frac{5}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{x^2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x^2} = +\infty$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 8x + 15} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcircled{*} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & -10 \\ 5 & & 5 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -8 & 15 \\ 5 & & 5 & -15 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x+2)}{\cancel{(x-5)}(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+2}{x-3} = \frac{7}{2}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{4 - \sqrt{10+x}}{2 - \sqrt{10-x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(4 - \sqrt{10+x}) \cdot (4 + \sqrt{10+x}) \cdot (2 + \sqrt{10-x})}{(2 - \sqrt{10-x}) \cdot (2 + \sqrt{10-x}) \cdot (4 + \sqrt{10+x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(4^2 - (\sqrt{10+x})^2) \cdot (2 + \sqrt{10-x})}{(2^2 - (\sqrt{10-x})^2) \cdot (4 + \sqrt{10+x})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\overset{(-1)}{\cancel{(6-x)}} \cdot (2 + \sqrt{10-x})}{\cancel{(x-6)} \cdot (4 + \sqrt{10+x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(-1) \cdot (2 + \sqrt{10-x})}{4 + \sqrt{10+x}} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}) \cdot (\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{4x \cdot (\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x})^2 - (\sqrt{4-x})^2}{4x \cdot (\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(2+x) \cdot \sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2} \cdot \sqrt{4-x^2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(2+x) \cdot \sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(2+x) \cdot \sqrt{4-x^2}}{(2+x)(2-x)} = \frac{0}{4} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3-x}{\sqrt{x-3}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3-x) \cdot \sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3-x) \sqrt{x-3}}{(x-3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3^+} -\sqrt{x-3} = 0
 \end{aligned}$$

$$y) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x-2}} = \left[\frac{0}{0} \right] = (*) \quad 2 \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -2 \\ & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (*) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+1) \cdot \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+1) \cdot \sqrt{x-2}}{(x-2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) \cdot \sqrt{x-2} = 3 \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} 2^{2x/x-3} = \left[2^{\frac{6}{0}} \right]$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3} = \left[\frac{6}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3} = +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} 2^{2x/x-3} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} 2^{2x/x-3} = 2^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} 2^{2x/x-3} = 2^{+\infty} = \infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} 2^{2x/x-3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5x-25) \cdot (\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}-2) \cdot (\sqrt{x-1}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5(x-5) \cdot (\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1})^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 \cancel{(x-5)} \cdot (\sqrt{x-1}+2)}{\cancel{(x-5)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} 5(\sqrt{x-1}+2) = 20$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{2-x}-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \cdot (\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \cdot (\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x})^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(1-x)} \cdot (\sqrt{2-x}+1)}{\cancel{(1-x)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{2-x}+1) = 2$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{\sqrt{2x - 6} - 4} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{2x+1} - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16) \cdot (\sqrt{2x+1} + 3)}{(\sqrt{2x+1} - 3)(\sqrt{2x+1} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)(\sqrt{2x+1} + 3)}{(\sqrt{2x+1})^2 - 3^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)(\sqrt{2x+1} + 3)}{2x - 8} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(\cancel{x-4})(\sqrt{2x+1} + 3)}{2(\cancel{x-4})} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+4}{2} \right) \cdot (\sqrt{2x+1} + 3) = 24$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)(\sqrt{2x+5} + 3)}{(\sqrt{2x+5} - 3)(\sqrt{2x+5} + 3)(\sqrt{x+2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[(\sqrt{x+2})^2 - 2^2] \cdot (\sqrt{2x+5} + 3)}{[(\sqrt{2x+5})^2 - 3^2] \cdot (\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (\sqrt{2x+5} + 3)}{(2x-4) \cdot (\sqrt{x+2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\cancel{x-2}) \cdot (\sqrt{2x+5} + 3)}{2(\cancel{x-2})(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} + 3}{2(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-x^2}{\sqrt{x+1}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(1+x)(1-x) \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(\cancel{1+x})(1-x) \cdot \sqrt{x+1}}{(\cancel{x+1})} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x) \cdot \sqrt{x+1} = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 j) \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{13-4x} - \sqrt{28+x}}{\sqrt{x+3}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(\sqrt{13-4x} - \sqrt{28+x})(\sqrt{13-4x} + \sqrt{28+x})}{\sqrt{x+3} \cdot (\sqrt{13-4x} + \sqrt{28+x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(\sqrt{13-4x})^2 - (\sqrt{28+x})^2}{\sqrt{x+3} \cdot (\sqrt{13-4x} + \sqrt{28+x})} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(-15 - 5x) \cdot \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x+3} \cdot (\sqrt{13-4x} + \sqrt{28+x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-5(3+x) \cdot \sqrt{x+3}}{(x+3) \cdot (\sqrt{13-4x} + \sqrt{28+x})} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-5\sqrt{x+3}}{\sqrt{13-4x} + \sqrt{28+x}} = 0
 \end{aligned}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}} = \left[\frac{0}{0} \right] = (*) \quad \begin{array}{r|rr} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ \hline 1 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 (*) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[3]{x-1}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2} \cdot \sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[6]{(x-2)^7}}{(x-2) \cdot \sqrt[3]{x-1}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot \sqrt[6]{x-2}}{\cancel{(x-2)} \cdot \sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{0}{1} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[6]{x^7}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x} \sqrt[6]{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[6]{x} = 0
 \end{aligned}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 - (2+x)}{2(2+x)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+x)} = -\frac{1}{4}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-4x+3} \right) = [\infty - \infty] = (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-3 = (x-3) \\ x^2-4x+3 = (x-3)(x-1) \end{array} \right\} \text{m.c.m} = (x-3)(x-1)$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)^2 - (x+5)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x+1-x-5}{(x-3)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x+1)} = \left[\frac{-4}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x+1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x+1)} = -\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-4x+3} \right)$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-2x^2+x}{2x^3-x^2-4x+3} = \left[\frac{0}{0} \right] = (*) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -1 & -4 & 3 \\ & & 2 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-x)}{(x-1)(2x^2+x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{2x^2+x-3} = \left[\frac{0}{0} \right] = (*) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & \\ 1 & & 1 & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -3 & \\ 1 & & 2 & 3 & \\ \hline & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot x}{\cancel{(x-1)} \cdot (2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2x+3} = \frac{1}{5}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$w) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9) \cdot (\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3) \cdot (\sqrt{x}+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\cancel{(x-9)} \cdot (\sqrt{x}+3)}{\cancel{(x-9)}} = \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x}+3) = 6$$

$$x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3}{x^3-2x^4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{5x^3}}{\cancel{x^3}(1-2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{1-2x} = 5$$

$$y) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2)^{1/x} = [1^\infty] = e$$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \cdot (1+x)}{\cancel{x}} = e \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = e^1 = e$$

$$z) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{2/x} = [1^\infty] = e$$

$$= e^3$$

34) Calcula el valor de "a" y los límites indicados sabiendo que dichos límites existen y son finitos:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - ax + 3}{x - 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{ax+6}}{x-2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - ax + 3}{x - 3} = \left[\frac{12 - 3a}{0} \right] \rightarrow \text{La única forma en que el límite pueda ser finito sea que } 12 - 3a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1) = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{ax+6}}{x-2} = \left[\frac{2 - \sqrt{2a+6}}{0} \right] \rightarrow \text{La única forma de que este límite sea finito es que } 2 - \sqrt{2a+6} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a+6} = 2$$

$$\Rightarrow 2a+6 = 4 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x-2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}) \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})}{(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{6-x})^2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} = \left[\frac{-a+2}{0} \right] \rightarrow$ La única forma de que este límite sea finito es que $-a+2=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = (*) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & & -2 & -1 & +3 \\ \hline & 2 & 1 & -3 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 2 \\ -1 & & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2+x-3)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+x-3}{x+2} = -2$$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16} = \left[\frac{14-2a}{0} \right] \rightarrow$ La única forma de que este límite sea finito es que $14-2a=0 \Rightarrow \boxed{a=7}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16} = \left[\frac{0}{0} \right] = (*) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 2 & & 2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -4 & 16 \\ 2 & & 2 & -4 & -16 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 \end{array}$$

36) Resuelve los siguientes límites teniendo en cuenta que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 1$$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{sen}(3x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \cdot 3 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \right) \cdot 3 =$
 $= 1 \cdot 3 = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{sen}(3x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{\cos(5x)}}{\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(3x)} \cdot \frac{1}{\cos(5x)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} \cdot 5x \cdot \frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)} \cdot \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{\cos(5x)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x \cos(5x)} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \cdot (1 + \cos(x))}{x(1 + \cos(x))} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x(1 + \cos(x))} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \cos(x)} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x \cdot \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} =$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} =$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

Nota! → Ampliaremos el cálculo de límites con funciones trigonométricas cuando estudiemos la REGLA DE L'HÔPITAL

37) Resuelve los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\cos x - 3 \operatorname{sen} x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x \cdot \operatorname{sen} x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^3 x$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\cos x - 3 \operatorname{sen} x} = \left[\sqrt{\cos \pi - 3 \operatorname{sen} \pi} \right] = \left[\sqrt{-1} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\cos x - 3 \operatorname{sen} x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x \cdot \operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}}{\frac{1}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}}}{\frac{1}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^3 x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x \cdot \cos x)^3 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \cos x \right)^3 = \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{sen} x)^3 = \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^3 = 1^3 = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\operatorname{sen}^2(x)} [\operatorname{tg}^2 x + 1]}{\cancel{\operatorname{sen}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 1) = 1 \cdot (0 + 1) = 1$$

39) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, calcula

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 1) = 5$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

40) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$, calcula

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

(41) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ 4\sqrt{x} + 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$, calcula

a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x - 1) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} (3x - 1) = 11 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} (4\sqrt{x} + 3) = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 11$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3x-1) = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (4\sqrt{x}+3) = \infty$$

42) Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$, expresala como una función a trozos para calcular después $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x} = -1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

④3 Localiza y clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 5x$

b) $f(x) = \frac{5}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{3x-6}{x^2-2x+1}$

d) $f(x) = \frac{x^2-x}{2x^2+4x-6}$

e) $f(x) = \frac{6x}{x^2-2x+3}$

f) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-2x-3}$

g) $f(x) = \frac{2x^2+4x+6}{x^2-x}$

h) $f(x) = \sqrt{x^2-3x}$

i) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$

j) $f(x) = e^{x^2+3}$

k) $f(x) = 2^{\frac{3+x}{x-1}}$

l) $f(x) = \ln(x-2)$

a) $f(x) = x^2 - 5x \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

$\hookrightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{5}{x-2}$; $x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{x-2} = \left[\frac{5}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{x-2} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{x-2}$$

$\Rightarrow x=2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

$$e) f(x) = \frac{6x}{x^2 - 2x + 3} ; x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}$$

$$f) f(x) = \frac{2x+2}{x^2-2x-3} ; x^2-2x-3=0 \begin{cases} \rightarrow x=-1 \\ \rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

$f(x)$ presenta discontinuidades en $x=-1$ y $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

$x=-1$ es una discontinuidad EVITABLE

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{8}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+2}{x^2-2x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+2}{x^2-2x-3} = +\infty \end{cases}$$

$x=3$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

$$g) f(x) = \frac{2x^2+4x+6}{x^2-x} ; x^2-x=0 ; x(x-1)=0 \begin{cases} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$f(x)$ presenta discontinuidades en $x=0$ y en $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 - x} = \left[\frac{6}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 - x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 - x} = -\infty \end{cases}$$

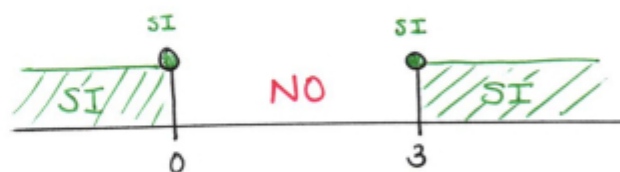
$x=0$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 - x} = \left[\frac{12}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 - x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 - x} = +\infty \end{cases}$$

$x=1$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$; $x^2 - 3x \geq 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= 0 && x = 0 \\ x(x-3) &= 0 && x = 3 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$$

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

Es continua en su dominio y no presenta discontinuidades en su dominio.

$$i) f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} \quad ; \quad x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} = +\infty \end{cases}$$

$x=2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

$$j) f(x) = e^{x^2+3} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

$$k) f(x) = 2^{\frac{3+x}{x-1}} \quad ; \quad x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2^{\frac{3+x}{x-1}} = \left[2^{\frac{4}{0}} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3+x}{x-1} = \left[\frac{4}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3+x}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3+x}{x-1} = +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} 2^{\frac{3+x}{x-1}} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{\frac{3+x}{x-1}} = 2^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{\frac{3+x}{x-1}} = 2^{+\infty} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=1$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

$$l) f(x) = \ln(x-2); \quad x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\text{Dom}(f(x)) = (2, +\infty)$$

$f(x)$ es continua en $(2, +\infty)$.

Es continua en su dominio y no presenta discontinuidades en su dominio.

④ Localiza y clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{1}{2-2^{1/x}}$$

$$b) f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{3-x}\right)$$

$$c) f(x) = \sqrt[5]{e^{-x+2}}$$

$$d) f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$e) f(x) = \frac{x-1}{\ln(x)-2}$$

$$g) f(x) = \frac{1}{\ln|x-1|}$$

$$h) f(x) = \frac{x^2 - e^2}{\ln(x) - 1}$$

$$i) f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{8-2^{1/x}}$$

$$j) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-2}$$

$$k) f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$$

$$l) f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$m) f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$n) f(x) = \ln|x|$$

$$o) f(x) = 2x \cdot |x^2 - 9|$$

$$p) f(x) = \frac{5x}{2 - \sqrt{x-3}}$$

$$b) f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{3-x}\right) ; \frac{x+2}{3-x} > 0$$

$$x+2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$3-x = 0 \rightarrow x = 3$$



$$\text{Dom}(f(x)) = (-2, 3)$$

$f(x)$ es continua en su dominio y no presenta discontinuidades.

$$c) f(x) = \sqrt[5]{e^{-x+2}} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$f(x)$ no presenta discontinuidades

$$d) f(x) = \frac{x}{\ln x} \rightarrow \begin{cases} \ln x \rightarrow x > 0 \\ \frac{x}{\ln x} \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = e^0 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Dom}(f(x)) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 1$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

$$e) f(x) = \frac{x-1}{\ln(x)-2} \rightarrow \begin{cases} \ln(x) \rightarrow x > 0 \\ \frac{x-1}{\ln(x)-2} \rightarrow \ln(x)-2=0 \Rightarrow x=e^2 \end{cases}$$

$$\text{Dom}(f(x)) = (0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=e^2$

$$\lim_{x \rightarrow e^2} \frac{x-1}{\ln(x)-2} = \left[\frac{e^2-1}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow e^2^-} \frac{x-1}{\ln(x)-2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow e^2^+} \frac{x-1}{\ln(x)-2} = +\infty \end{cases}$$

$x=e^2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

$$g) f(x) = \frac{1}{\ln(|x-1|)} \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ \ln|x-1|=0 \Rightarrow |x-1|=1 \Rightarrow x-1=\pm 1 \begin{cases} \nearrow x=0 \\ \searrow x=2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$$

$f(x)$ presenta discontinuidades en $x=0$, en $x=1$, y en $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln|x-1|} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\ln|x-1|} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln|x-1|} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=0$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln(|x-1|)} = \left[\frac{1}{-\infty} \right] = 0$$

$\Rightarrow x=1$ es una discontinuidad EVITABLE

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\ln(|x-1|)} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\ln|x-1|} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\ln|x-1|} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

$$h) f(x) = \frac{x^2 - e^2}{\ln(x) - 1} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (0, e) \cup (e, +\infty)$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=e$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^2 - e^2}{\ln(x) - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow e} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow e} 2x^2 = 2e^2$$

Nota $\rightarrow$ Para resolver el límite anterior hemos aplicado la REGLA DE L'HÔPITAL que no se verá hasta que lleguemos a derivadas. Mientras tanto, puedes calcular dicho límite utilizando tu calculadora dando valores muy próximos a $x=e$

$$n) f(x) = \ln|x| ; x=0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$\Rightarrow f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = [\ln 0] = -\infty$$

$\Rightarrow x=0$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

$$o) f(x) = 2x \cdot |x^2 - 9| ; \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y no presenta discontinuidades

$$p) f(x) = \frac{5x}{2 - \sqrt{x-3}} \rightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \rightarrow x > 3 \\ 2 - \sqrt{x-3} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [3, 7) \cup (7, +\infty)$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=7$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{5x}{2 - \sqrt{x-3}} = \left[\frac{35}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{5x}{2 - \sqrt{x-3}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{5x}{2 - \sqrt{x-3}} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=7$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

45) Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < 2 \\ 6-x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

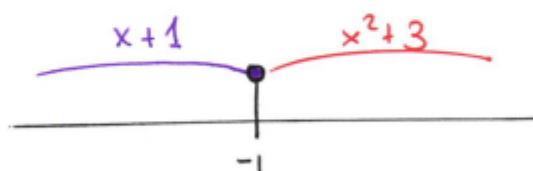
$$e) f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$g) f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$h) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 3 \\ x^2-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$



Si $x < -1$ $\Rightarrow f(x) = x+1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua $(-\infty, -1)$

Si $x > -1$ $\Rightarrow f(x) = x^2+3 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-1, +\infty)$

$$\boxed{\text{Si } x = -1}$$

$$f(-1) = -1 + 1 = 0$$

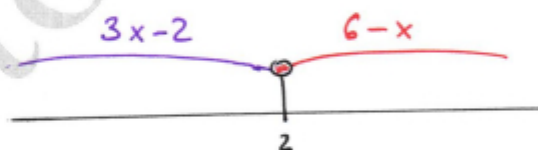
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2+3) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$\Rightarrow$ En $x = -1$ tenemos una discontinuidad de SALTO FINITO.

En Resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < 2 \\ 6-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



$$\boxed{\text{Si } x < 2} \Rightarrow f(x) = 3x-2 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 2)$

$$\boxed{\text{Si } x > 2} \Rightarrow f(x) = 6-x \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, +\infty)$

$$\boxed{\text{Si } x = 2}$$

$$f(2) = 6 - 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x-2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (6-x) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

$$\boxed{\text{Si } x < 0} \Rightarrow f(x) = -x \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

$$\boxed{\text{Si } x > 0} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \text{Continua en } [0, +\infty)$$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, +\infty)$

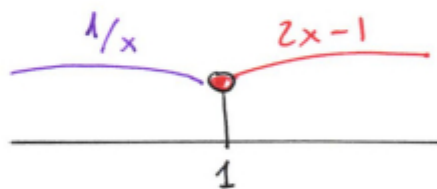
$$\boxed{\text{Si } x = 0}$$

$\nexists f(0)$ ($f(x)$ no está definida en $x=0$!!)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ En $x=0$ hay una discontinuidad EVITABLE.

$$f) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



$$\boxed{\text{Si } x < 1} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R} - \{0\}$$

$\hookrightarrow$ Esta discontinuidad SI que nos afecta pues $x=0$ efectivamente está en el "trozo" que estamos estudiando ahora ($x < 1$)

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right.$$

$\Rightarrow x=0$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

Si $x > 1$ $\Rightarrow f(x) = 2x - 1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(1, +\infty)$

Si $x = 1$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

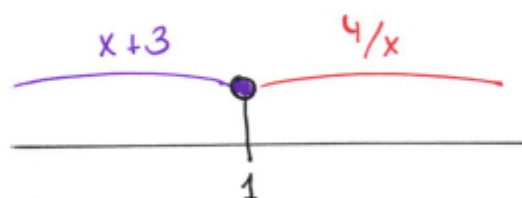
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 1$

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

g) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$



Si $x < 1$ $\Rightarrow f(x) = x + 3 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 1)$

Si $x > 1$ $\Rightarrow f(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$\hookrightarrow$ Esta discontinuidad NO nos afecta pues $x = 0$ no está en el "trozo" que estamos estudiando ahora ($x > 1$)

$\hookrightarrow$ Continua en $(1, +\infty)$

Si $x = 1$

$$f(1) = 1 + 3 = 4$$

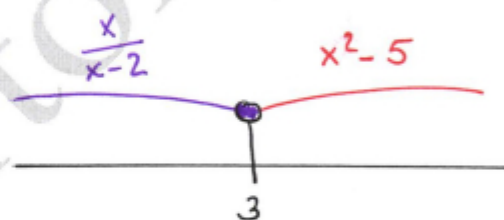
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+3) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{x} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 1$

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

$$h) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 3 \\ x^2 - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



Si $x < 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x-2} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

→ Esta discontinuidad SI que nos afecta pues $x=2$ efectivamente está en el "trozo" que estamos estudiando ahora ($x < 3$)

→ Continua en $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \left[\frac{2}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

$$\boxed{\text{Si } x < 0} \Rightarrow f(x) = \frac{4}{x-4} \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R} - \{4\}$$

→ Esta discontinuidad NO nos afecta pues $x=4$ no está en el "trozo" que estamos estudiando ahora ($x < 0$)

→ Continua en $(-\infty, 0)$

$$\boxed{\text{Si } 0 < x < 3} \Rightarrow f(x) = x-1 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

→ Continua en $(0, 3)$

$$\boxed{\text{Si } x > 3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-3} \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R} - \{3\}$$

↑
NO AFECTA

→ Continua en $(3, +\infty)$

$$\boxed{\text{Si } x = 0}$$

$\nexists f(0)$ ($f(x)$ no está definida en $x=0$!!)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x-4} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x-1 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

$\Rightarrow x=0$ es una discontinuidad EVITABLE

$$\boxed{\text{Si } x = 3}$$

$$f(3) = 3-1 = 2$$

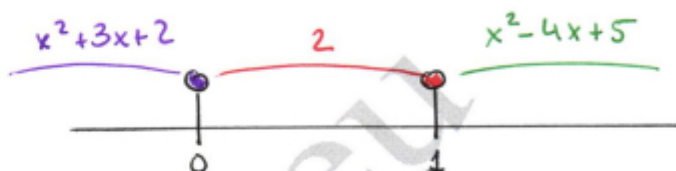
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \end{array} \right\} \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$\Rightarrow x = 3$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Si $x < 0$ $\Rightarrow f(x) = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua $(-\infty, 0)$

Si $0 < x < 1$ $\Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua $(0, 1)$

Si $x > 1$ $\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua $(1, +\infty)$

Si $x = 0$

$$f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 3x + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 = 2 \end{array} \right\} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 0$

$$\text{Si } x = 1$$

$$f(1) = 2$$

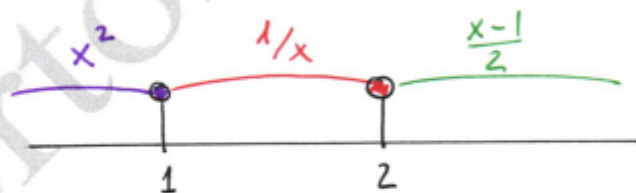
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 4x + 5) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$\text{Como } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

$$d) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



$$\text{Si } x < 1 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow \text{Continua } (-\infty, 1)$$

$$\text{Si } 1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R} - \{0\}$$

↑
NO AFECTA

$$\hookrightarrow \text{Continua en } (1, 2)$$

$$\text{Si } x > 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{2} \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow \text{Continua en } (2, +\infty)$$

Si $x = 1$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow$ continua en $x = 1$ Si $x = 2$

$$f(2) = \frac{1}{2}$$

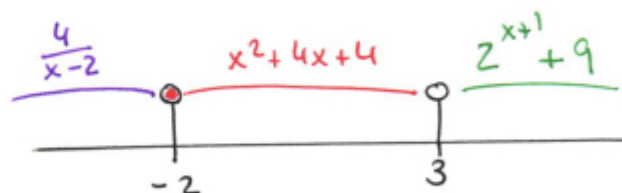
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$$

Como $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 2$

En resumen:

 $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-2} & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 4x + 4 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 2^{x+1} + 9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Si $x < -2 \Rightarrow f(x) = \frac{4}{x-2} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

NO AFECTA

$$\hookrightarrow \text{Continua en } (-\infty, -2)$$

$$\text{Si } -2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-2, 3)$

$$\text{Si } x > 3 \Rightarrow f(x) = 2^{x+1} + 9 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ Continua $(3, +\infty)$

$$\text{Si } x = -2$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4}{x-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + 4x + 4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$\Rightarrow x = -2$ es una discontinuidad de SALTO FINITO.

$$\text{Si } x = 3$$

$\nexists f(3)$ ($f(x)$ no está definida en $x = 3$!!)

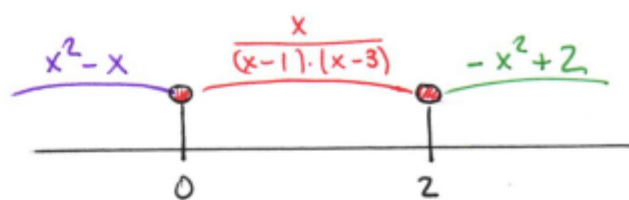
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + 4x + 4) = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} 2^{x+1} + 9 = 25 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 25$$

$\Rightarrow x = 3$ es una discontinuidad EVITABLE.

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$

$$f) f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{(x-1)(x-3)} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



Si $x < 0$ $\Rightarrow f(x) = x^2 - x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0 < x < 2$ $\Rightarrow f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-3)} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, 1) \cup (1, 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=1$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

Si $x > 2$ $\Rightarrow f(x) = -x^2 + 2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, +\infty)$

Si $x = 0$

$$f(0) = \frac{0}{(0-1)(0-3)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x=0$

Si $x = 2$

$$f(2) = \frac{2}{(2-1)(2-3)} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2+2) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$$

Como $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 2$

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

$$g) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 9x}{x^3 - 4x} & \text{si } x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^3 - 4x}; \quad x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow x^2 - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} \rightarrow x = -2 \\ \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

En $x = -2$

$\nexists f(-2)$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 9x}{x^3 - 4x} = \left[\frac{10}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 9x}{x^3 - 4x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 - 9x}{x^3 - 4x} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

Eu $x=0$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 4x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(x^2 - 9)}{\cancel{x}(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 9}{x - 4} = \frac{9}{4}$$

$\Rightarrow x=0$ es una discontinuidad EVITABLE.

Eu $x=2$

$$\nexists f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 9x}{x^3 - 4x} = \left[\frac{-10}{0} \right] \rightarrow$$

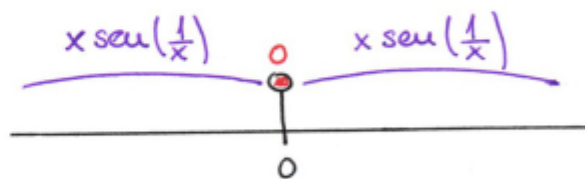
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 9x}{x^3 - 4x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 9x}{x^3 - 4x} = -\infty \end{array} \right.$$

$\Rightarrow x=2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

$$h) f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Eu $x=0$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = [0 \cdot \text{Acotada}] = 0$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x=0$

$\Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

$$i) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{4} - 8 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x^3} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Si $0 \leq x < 4$ $\Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{4} - 8 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $[0, 4)$

Si $x > 4$ $\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(4, +\infty)$

Si $x = 4$

$$f(4) = \frac{4^3}{4} - 8 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{x^3}{4} - 8 \right) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x^3} = 8 \end{array} \right\} \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 8$$

Como $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 4$

En resumen:

$f(x)$ es continua en $[0, +\infty)$

- (47) Determina los puntos en los que las siguientes funciones $f(x)$ presentan discontinuidades y, caso de ser posible, define una nueva función que contenga a $f(x)$ y sea continua en $\mathbb{R}$:

$$a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} \quad b) f(x) = \frac{18 - 6\sqrt{x+5}}{x-4} \quad c) f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{4x}$$

$$a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} \quad ; \quad 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcircled{*} \quad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overset{(-1)}{\cancel{(x-2)}}(x+1)}{\cancel{(2-x)}} = \lim_{x \rightarrow 2} [-1 \cdot (x+1)] = -3$$

$\Rightarrow x = 2$ es una discontinuidad EVITABLE.

Como $x = 2$ es discontinuidad EVITABLE, podemos definir una nueva función $g(x)$ que contenga a $f(x)$ y que no tenga esa discontinuidad en $x = 2$ según:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} & \text{si } x \neq 2 \\ -3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

En donde es fácil ver que, al ser $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$,

la nueva $g(x)$ será continua en $x = 2$, y por tanto en $\mathbb{R}$.

$$b) f(x) = \frac{18 - 6\sqrt{x+5}}{x-4} \rightarrow \begin{cases} x+5 > 0 \Rightarrow x > -5 \\ x-4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [-5, 4) \cup (4, +\infty)$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=4$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{18 - 6\sqrt{x+5}}{x-4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(18 - 6\sqrt{x+5})(18 + 6\sqrt{x+5})}{(x-4) \cdot (18 + 6\sqrt{x+5})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{18^2 - (6\sqrt{x+5})^2}{(x-4) \cdot (18 + 6\sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{324 - 36(x+5)}{(x-4) \cdot (18 + 6\sqrt{x+5})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{144 - 36x}{(x-4) \cdot (18 + 6\sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-36(x-4)}{(x-4)(18 + 6\sqrt{x+5})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-36}{18 + 6\sqrt{x+5}} = -1$$

$\Rightarrow x=4$ es una discontinuidad EVITABLE

Por otro lado, y dado que buscamos una nueva función que sea continua en $\mathbb{R}$, y no solo que evite la discontinuidad de $x=4$, veamos el valor que toma $f(x)$ en $x=-5$

$$f(-5) = \frac{18 - 6\sqrt{0}}{-5 - 4} = -2$$

Por tanto, es fácil ver que:

$$g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -5 \\ \frac{18-6\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{si } x \in [-5, 4) \cup (4, +\infty) \\ -1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

será continua en $\mathbb{R}$.

$$c) f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{4x}; \quad 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{4x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(3x^2 - 2x + 1)}{\cancel{x}4} = \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 2x + 1) = 1$$

$\Rightarrow x=0$ es una discontinuidad EVITABLE

Como $x=0$ es una discontinuidad EVITABLE, podremos definir una nueva función $g(x)$ que contenga a $f(x)$ y que no tenga esa discontinuidad en $x=0$ según:

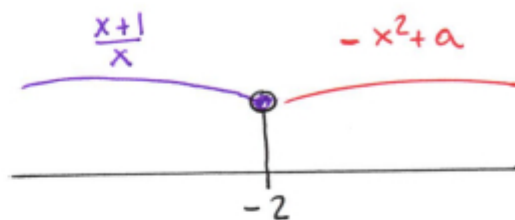
$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{4x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Donde es fácil ver que, al ser $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$, la nueva $g(x)$ será continua en $x=0$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

48) Calcula el valor de "a" para que $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2+a & \text{si } x > -2 \end{cases}$

sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2+a & \text{si } x > -2 \end{cases}$$



Si $x < -2 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ ↑ NO AFECTA

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -2)$

Si $x > -2 \Rightarrow f(x) = -x^2+a \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-2, +\infty)$

Si $x = -2$

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= \frac{-2+1}{-2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &\rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} -x^2+a = -4+a \end{cases} \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} = -4+a \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

$\Rightarrow$ Si $a = \frac{9}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{1}{2} = f(-2) \Rightarrow$ continua en $x = -2$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Si $a \neq \frac{9}{2} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ y $f(x)$ presentará una discontinuidad de salto finito en $x = -2$

49) Completa la definición de la siguiente función para que sea continua en $x=2$. ¿Es continua en $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ \boxed{} & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Será continua en $x=2$ si se verifica que $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Veamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-3} = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

con lo que si hacemos que sea $f(2) = -1$, la función será continua en $x=2$. Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{es continua en } x=2$$

Veamos que sucede en el resto de la recta real:

Si $x < 2 \rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 2)$

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = \frac{1}{x-3} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{3\}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, 3) \cup (3, +\infty)$

↑
SI QUE AFECTA

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=3$

50) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en función de los valores de los parámetros que aparecen:

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2+ax & \text{si } x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

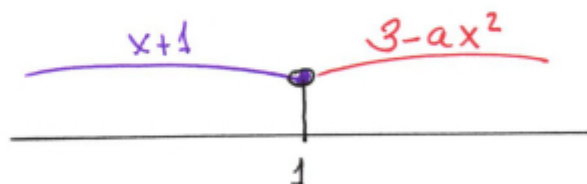
$$c) f(x) = \begin{cases} ax^2-2 & \text{si } x \leq -2 \\ a & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x \leq -1 \\ k & \text{si } -1 < x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x \neq 5 \\ p & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2+b & \text{si } x \leq 2 \\ a(x-3)^2+3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Si $x < 1 \rightarrow f(x) = x+1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 1)$

Si $x > 1 \rightarrow f(x) = 3-ax^2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(1, \infty)$

Si $x = 1$

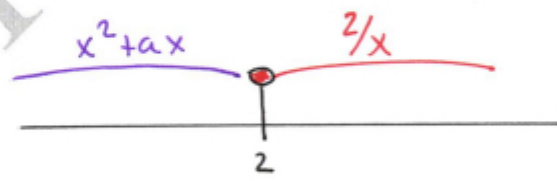
$$f(1) = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-ax^2) = 3-a \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 2 = 3-a \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{a=1} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Si $a = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1) \Rightarrow$ Continua en $x=1$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Si $a \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y $f(x)$ presentará una discontinuidad de salto finito en $x=1$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$



Si $x < 2$ $\rightarrow f(x) = x^2 + ax \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 2)$

Si $x > 2$ $\rightarrow f(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$\uparrow$ NO AFECTA

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, +\infty)$

$$\text{Si } x = 2$$

$$f(2) = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + ax = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x} = 1 \end{array} \right\} \quad 4 + 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

$\Rightarrow$ Si $a = -\frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 = f(2) \Rightarrow$ Continua en $x = 2$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Si $a \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y $f(x)$ presentará una discontinuidad de salto finito en $x = 2$

$$c) f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ a & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$\text{Si } x < -2 \rightarrow f(x) = ax^2 - 2 \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -2)$

$\text{Si } -2 < x < 2 \rightarrow f(x) = a \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-2, 2)$

$\text{Si } x > 2 \rightarrow f(x) = x \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, +\infty)$

Si $x = -2$

$$f(-2) = a \cdot (-2)^2 - 2 = 4a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} (ax^2 - 2) = 4a - 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} a = a \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 4a - 2 = a \Rightarrow 3a = 2 \\ \Rightarrow a = 2/3 \end{array} \right\}$$

Si $x = 2$

$$f(2) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} a = a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2$$

$\Rightarrow$ Si $a = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{2}{3} = f(-2)$ y es continua en $x = -2$

pero $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y presenta discontinuidad de salto

finito en $x = 2$

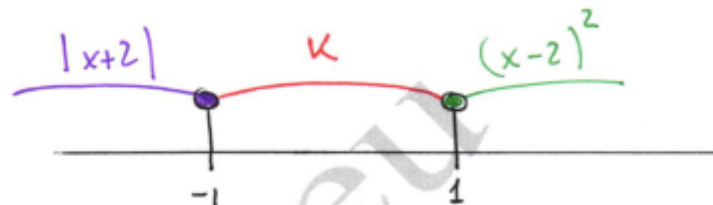
$\Rightarrow$ Si $a = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 = f(2)$ y es continua en $x = 2$

pero $\nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ y presenta discontinuidad de salto

finito en $x = -2$.

$\Rightarrow$ Si $a \neq \frac{2}{3} \wedge a \neq 2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ni $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y presenta discontinuidades de salto finito tanto en $x = -2$ como en $x = 2$.

$$d) f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x \leq -1 \\ \kappa & \text{si } -1 < x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Si $x < -1 \rightarrow f(x) = |x+2| \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -1)$

Si $-1 < x < 1 \rightarrow f(x) = \kappa \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-1, 1)$

Si $x > 1 \rightarrow f(x) = (x-2)^2 \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(1, +\infty)$

Si $x = -1$

$$f(-1) = |-1+2| = |1| = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \kappa = \kappa \end{array} \right\} \quad \kappa = 1$$

Si $x = 1$

$$f(1) = (1-2)^2 = (-1)^2 = 1$$

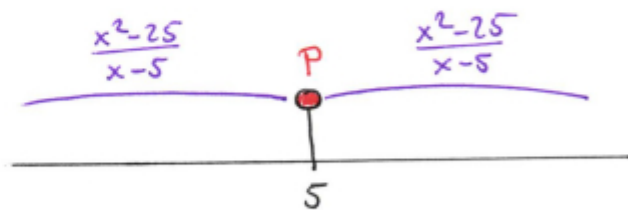
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} K = K \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2)^2 = 1 \end{array} \right\} \quad K = 1$$

$$\Rightarrow \text{Si } K = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 = f(-1) \Rightarrow \text{Continua en } x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1) \Rightarrow \text{Continua en } x = 1 \end{array} \right.$$

└─ Continua en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Si $K \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ y $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y habrá discontinuidades de salto finito tanto en $x = -1$ como en $x = 1$.

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x \neq 5 \\ p & \text{si } x = 5 \end{cases}$$



Si $x \neq 5 \rightarrow f(x) = \frac{x^2-25}{x-5} \rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R} - \{5\}$

NO AFECTA

└─ Continua en $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$

$$\text{Si } x = 5$$

$$f(5) = p$$

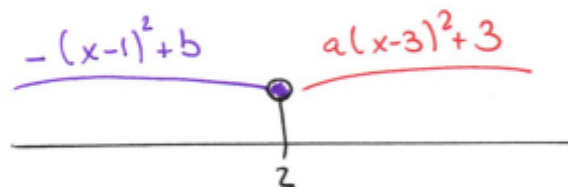
$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x+5) \cdot \cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10$$

Si $p = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) \Rightarrow$ Continua en $x = 5$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

Si $p \neq 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10 \neq f(5) \Rightarrow f(x)$ presentará una discontinuidad evitable en $x = 5$

$$f) f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b & \text{si } x \leq 2 \\ a(x-3)^2 + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



Si $x < 2 \rightarrow f(x) = -(x-1)^2 + b \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$.

$\hookrightarrow$ Continua $(-\infty, 2)$

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = a(x-3)^2 + 3 \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$.

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, +\infty)$

Si $x = 2$

$$f(2) = -(2-1)^2 + b = b-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x-1)^2 + b = b-1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} a(x-3)^2 + 3 = a+3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a+3 = b-1 \Rightarrow \\ \Rightarrow a-b = -4 \end{array}$$

Si $a-b = -4 \Rightarrow$ Continua en $x=2$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a-b \neq -4 \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x=2$.

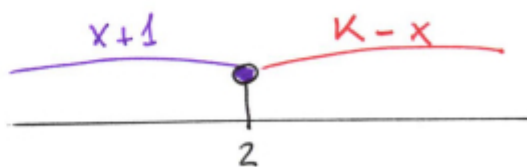
⑤ Calcular el valor de "K" para que las siguientes funciones sean continuas en $\mathbb{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ K-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+K & \text{si } x \leq 0 \\ x^2-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x+K & \text{si } x < -1 \\ -Kx-2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ K-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$



Si $x < 2 \rightarrow f(x) = x+1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 2)$

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = k - x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, +\infty)$

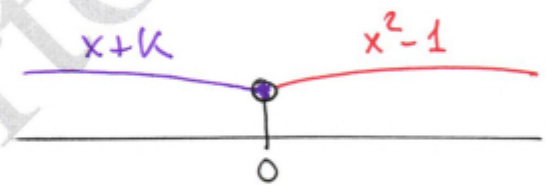
Si $x = 2$

$$f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (k-x) = k-2 \end{array} \right\} \quad k-2 = 3 \Rightarrow \boxed{k=5}$$

Si $k=5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow$ Continua en $x=2$ y por tanto en $\mathbb{R}$

$$b) f(x) = \begin{cases} x+k & \text{si } x \leq 0 \\ x^2-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Si $x < 0 \rightarrow f(x) = x+k \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $x > 0 \rightarrow f(x) = x^2-1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, +\infty)$

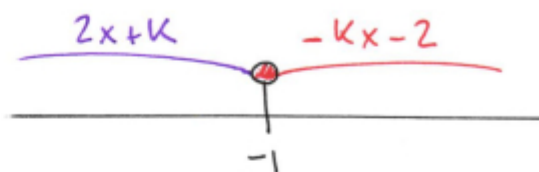
Si $x = 0$

$$f(0) = 0 + k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+k) = k \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2-1) = -1 \end{array} \right\} \quad \boxed{k = -1}$$

Si $k = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$ Continua en $x=0$ y por tanto en $\mathbb{R}$

$$c) f(x) = \begin{cases} 2x+k & \text{si } x < -1 \\ -kx-2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$



Si $x < -1$ $\rightarrow f(x) = 2x+k \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua $(-\infty, -1)$

Si $x > -1$ $\rightarrow f(x) = -kx-2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-1, +\infty)$

Si $x = -1$

$$f(-1) = -k \cdot (-1) - 2 = k - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x+k) = k-2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (-kx-2) = k-2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = k-2$$

Como $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $f(x)$ será continua en $x = -1$ y

por tanto en $\mathbb{R}$ para cualquier valor del parámetro " k "

52) Determina el valor de los parámetros sabiendo que las siguientes funciones son continuas en $\mathbb{R}$.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ x-6 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \sec x & \text{si } x < 0 \\ mx+n & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} -\frac{a}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 1+ax & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{(1-\cos x) \cdot \sec x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} x^3+5x+\frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \sec(kx)+(k-1) \cdot \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

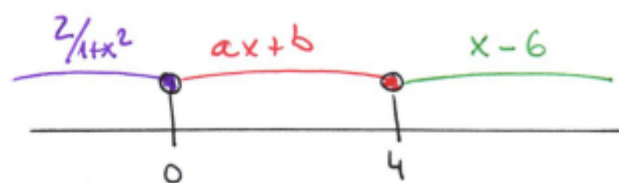
$$g) f(x) = \begin{cases} ax^2+b & \text{si } x < 0 \\ x-a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{x}+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$h) f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2+2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2+b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

$$i) f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$j) f(x) = \begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x \leq -1 \\ x^3-a & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ bx-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ x-6 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$



Si $x < 0 \rightarrow f(x) = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0 < x < 4 \rightarrow f(x) = ax+b \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, 4)$

Si $x > 4 \rightarrow f(x) = x-6 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(4, +\infty)$

Si $x = 0$

$$f(0) = \frac{2}{1+0^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{1+x^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} ax+b = b \end{cases} \quad b=2$$

Si $b=2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$ Continua en $x=0$

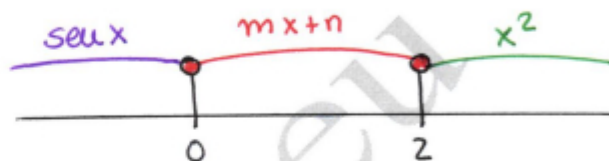
Si $x = 4$

$f(4) = 4a+b = 4a+2$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} ax+b = 4a+2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} x-6 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a+2 = -2 \Rightarrow a = -1$$

$\Rightarrow$ Si $a = -1$ y $b = 2 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

$$b) f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ mx+n & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



Si $x < 0 \rightarrow f(x) = \text{sen } x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0 < x < 2 \rightarrow f(x) = mx+n \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, 2)$

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, +\infty)$

Si $x = 0$

$$f(0) = m \cdot 0 + n = n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sen } x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} mx+n = n \end{array} \right\} \quad n=0$$

Si $x = 2$

$$f(2) = m \cdot 2 + n = 2m + n$$

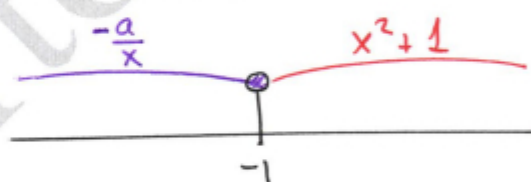
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} mx + n = 2m + n \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4 \end{array} \right\} \quad 2m + n = 4$$

Para que sea continua en $\mathbb{R}$ se debe verificar que:

$$\left. \begin{array}{l} 2m + n = 4 \\ n = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

$\Rightarrow$ Si $m = 2$ y $n = 0 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

$$c) f(x) = \begin{cases} -\frac{a}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$



Si $x < -1 \rightarrow f(x) = -\frac{a}{x} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

NO AFECTA

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -1)$

Si $x > -1 \rightarrow f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-1, +\infty)$

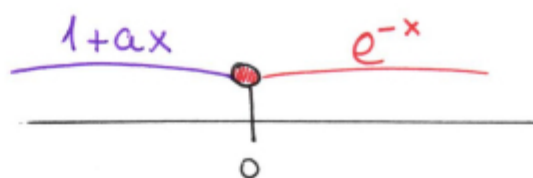
Si $x = -1$

$$f(-1) = \frac{-a}{-1} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{a}{x} = a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 1 = 2 \end{array} \right\} \quad a = 2$$

$\Rightarrow$ Si $a = 2$ $f(x)$ es continua en $x = -1$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

$$d) f(x) = \begin{cases} 1+ax & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Si $x < 0 \rightarrow f(x) = 1+ax \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $x > 0 \rightarrow f(x) = e^{-x} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, +\infty)$

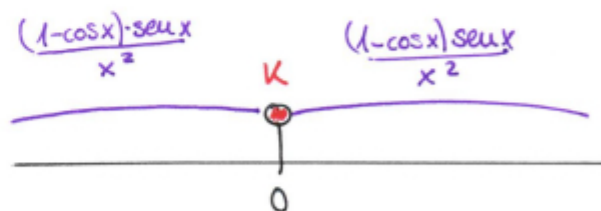
Si $x = 0$

$$f(0) = e^{-0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+ax) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, $f(x)$ será continua en $x=0$ y por tanto en $\mathbb{R}$ para cualquier valor del parámetro "a"

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{(1-\cos x) \cdot \operatorname{sen} x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Si $x \neq 0 \rightarrow f(x) = \frac{(1-\cos x) \operatorname{sen} x}{x^2} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

↑
NO AFECTA

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Si $x = 0$

$$f(0) = K$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot \operatorname{sen} x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

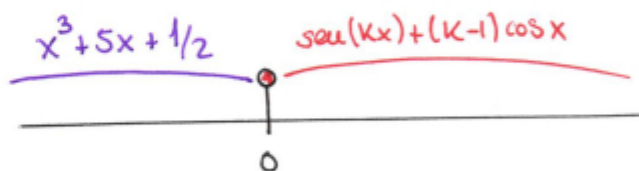
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ Si $K = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)$ será continua en $x = 0$
y por tanto en $\mathbb{R}$

$$f) f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \operatorname{sen}(Kx) + (K-1) \cdot \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Si $x < 0 \rightarrow f(x) = x^3 + 5x + \frac{1}{2} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua $(-\infty, 0)$

Si $x > 0 \rightarrow f(x) = \operatorname{sen}(Kx) + (K-1) \cos x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, +\infty)$

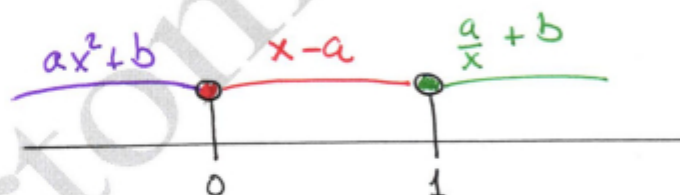
Si $x = 0$

$$f(0) = \sin(0) + (k-1) \cdot \cos 0 = k-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 5x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(kx) + (k-1)\cos x) = k-1 \end{array} \right\} \quad k-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

Si $k = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)$ será continua en $x=0$ y por tanto en $\mathbb{R}$

$$g) f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{x} + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Si $x < 0 \rightarrow f(x) = ax^2 + b \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0 < x < 1 \rightarrow f(x) = x - a \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, 1)$

Si $x > 1 \rightarrow f(x) = \frac{a}{x} + b \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$\uparrow$ NO AFECTA

$\hookrightarrow$ Continua en $(1, +\infty)$

Si $x=0$

$$f(0) = 0 - a = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - a) = -a \end{array} \right\} \quad b = -a \Rightarrow a + b = 0$$

Si $x=1$

$$f(1) = \frac{a}{1} + b = a + b$$

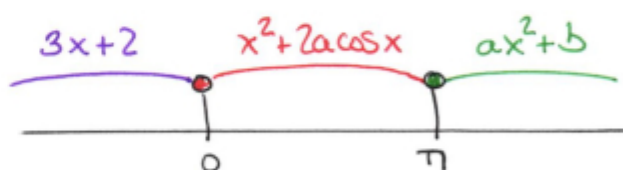
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - a) = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{a}{x} + b \right) = a + b \end{array} \right\} \quad 1 - a = a + b \Rightarrow 2a + b = 1$$

Para que sea continua en $\mathbb{R}$, se debe verificar que:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{array} \right\} E_2 - E_1 \rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -a = -1$$

$\Rightarrow$ Si $a=1$ y $b=-1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

$$h) f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$



Si $x < 0 \Rightarrow f(x) = 3x + 2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0 < x < \pi \Rightarrow f(x) = x^2 + 2a \cos x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, \pi)$

Si $x > \pi$ $\rightarrow f(x) = ax^2 + b \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(\pi, +\infty)$

Si $x = 0$

$$f(0) = 0^2 + 2a \cdot \cos 0 = 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x+2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2a \cos x) = 2a \end{array} \right\} \quad 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

Si $x = \pi$

$$f(\pi) = a \cdot \pi^2 + b$$

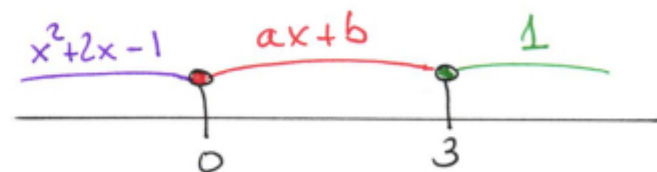
$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pi^-} (x^2 + 2a \cos x) = \pi^2 - 2a \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} (ax^2 + b) = a\pi^2 + b \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \pi^2 - 2a = a\pi^2 + b \Rightarrow \\ \Rightarrow a(\pi^2 + 2) + b = \pi^2 \end{array}$$

Para que sea continua en $\mathbb{R}$ se debe verificar que:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ a(\pi^2 + 2) + b = \pi^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi^2 + 2 + b = \pi^2 \Rightarrow b = -2$$

$\Rightarrow$ Si $a = 1$ y $b = -2 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

$$i) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



$$\text{Si } x < 0 \rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow \text{Continua en } (-\infty, 0)$$

$$\text{Si } 0 < x < 3 \rightarrow f(x) = ax + b \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow \text{Continua en } (0, 3)$$

$$\text{Si } x > 3 \rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow \text{Continua en } (3, +\infty)$$

$$\text{Si } x = 0$$

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \end{array} \right\} b = -1$$

$$\text{Si } x = 3$$

$$f(3) = 1$$

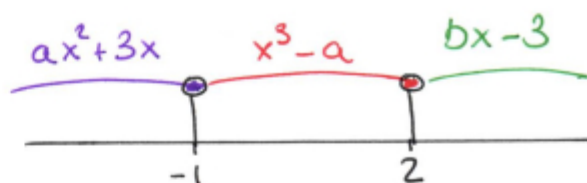
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax + b) = 3a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1 \end{array} \right\} 3a + b = 1$$

Para que sea continua en $\mathbb{R}$ se debe verificar que:

$$\left. \begin{array}{l} b = -1 \\ 3a + b = 1 \end{array} \right\} \rightarrow 3a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2/3$$

$$\Rightarrow \text{Si } a = \frac{2}{3} \text{ y } b = -1 \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}$$

$$j) f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - a & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ bx - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



Si $x < -1 \rightarrow f(x) = ax^2 + 3x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -1)$

Si $-1 < x < 2 \rightarrow f(x) = x^3 - a \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-1, 2)$

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = bx - 3 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, +\infty)$

Si $x = -1$

$$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2 + 3x) = a - 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - a) = -1 - a \end{array} \right\} \begin{array}{l} a - 3 = -1 - a \Rightarrow 2a = 2 \\ \Rightarrow a = 1 \end{array}$$

Si $x = 2$

$$f(2) = 2^3 - a = 8 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - a) = 8 - a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx - 3) = 2b - 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 - a = 2b - 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow a + 2b = 11 \end{array}$$

Para que sea continua en $\mathbb{R}$ se debe verificar que:

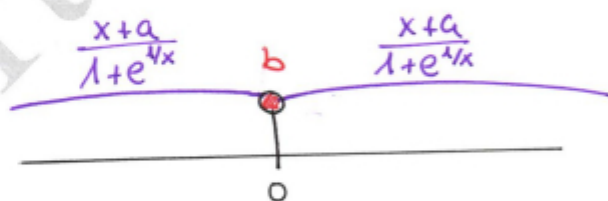
$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ a + 2b = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

$\Rightarrow$ Si $a = 1$ y $b = 5 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

53) Estudia la continuidad de la siguiente función según los valores de los números reales "a" y "b":

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Si $x \neq 0 \rightarrow f(x) = \frac{x+a}{1+e^{1/x}} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ ↑ NO AFECTA

Si $x = 0$

$$f(0) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+a}{1+e^{1/x}} = \left[\frac{a}{1+e^{1/0}} \right] = (*) \Rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+a}{1+e^{1/x}} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+a}{1+e^{1/x}} = \left[\frac{a}{1+e^{-\infty}} \right] = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+a}{1+e^{1/x}} = \left[\frac{a}{1+e^{\infty}} \right] = \left[\frac{a}{\infty} \right] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Si } a=0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Es decir:

Si $a=0$ $\begin{cases} b=0 \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=0 \text{ y en } \mathbb{R}. \\ b \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) \rightarrow \text{Discontinuidad EVITABLE en } x=0 \end{cases}$

Si $a \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \text{Discontinuidad de SALTO FINITO en } x=0 \quad \forall b \in \mathbb{R}.$

54) Estudia la continuidad de las siguientes funciones según los valores del número real "a":

$$a) f(x) = \begin{cases} 2 + a \cdot \ln(x) & \text{si } x > 1 \\ 3 - ax & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 3x + a & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 3a^x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{12}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 2 + a \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{-x} + 6x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \cos(x-4) & \text{si } x \leq 4 \\ 2^{x-2a} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$g) f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & \text{si } x \leq a \\ 5 & \text{si } x > a \end{cases}$$

$$h) f(x) = \begin{cases} | -1 + 2x | & \text{si } x < 3 \\ a^x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$i) f(x) = \begin{cases} | 3x - 4 | & \text{si } x < 2 \\ a^x - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

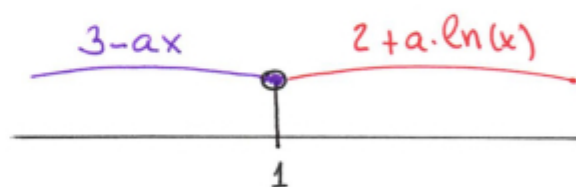
$$j) f(x) = \begin{cases} | 4 - 5x | & \text{si } x < 1 \\ | a - 2 | & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$k) f(x) = \begin{cases} | x - 4 | & \text{si } x < a \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > a \end{cases}$$

$$l) f(x) = \begin{cases} \sec^2 x & \text{si } x \leq a \\ x - \cos^2 x & \text{si } x > a \end{cases}$$

$$m) f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

$$a) f(x) = \begin{cases} 2 + a \cdot \ln(x) & \text{si } x > 1 \\ 3 - ax & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$



Si $x < 1 \Rightarrow f(x) = 3 - ax \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 1)$

Si $x > 1 \Rightarrow f(x) = 2 + a \cdot \ln(x) \Rightarrow$ Continua en $(0, +\infty)$

$\hookrightarrow$ Continua en $(1, +\infty)$

Si $x = 1$

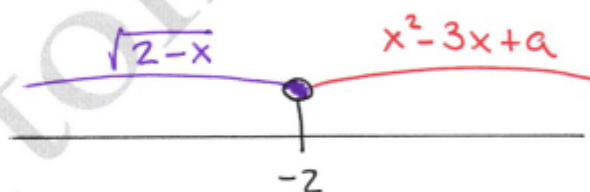
$$f(1) = 3 - a \cdot 1 = 3 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - ax) = 3 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + a \cdot \ln(x)) = 2 \end{array} \right\} \quad 3 - a = 2 \Rightarrow a = 1$$

Si $a = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow$ Continua en $x = 1$, y por tanto en $\mathbb{R}$.

Si $a \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x = 1$

$$b) f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 3x + a & \text{si } x > -2 \end{cases}$$



Si $x < -2 \rightarrow f(x) = \sqrt{2-x} \Rightarrow$ Continua en $(-\infty, -2]$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -2)$

Si $x > -2 \rightarrow f(x) = x^2 - 3x + a \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-2, +\infty)$

Si $x = -2$

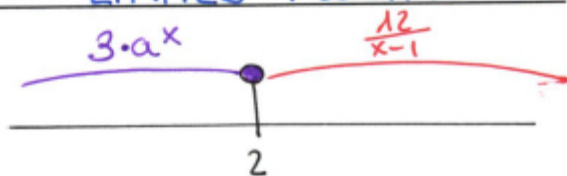
$$f(-2) = \sqrt{2 - (-2)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{2-x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - 3x + a) = 10 + a \end{array} \right\} \quad 10 + a = 2 \Rightarrow a = -8$$

$\Rightarrow$ Si $a = -8 \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = -2$ y por tanto en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Si $a \neq -8 \Rightarrow$ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x = -2$

$$c) f(x) = \begin{cases} 3 \cdot a^x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{12}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



Si $x < 2 \rightarrow f(x) = 3 \cdot a^x \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 2)$

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = \frac{12}{x-1} \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

↑ NO AFECTA

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, +\infty)$

Si $x = 2$

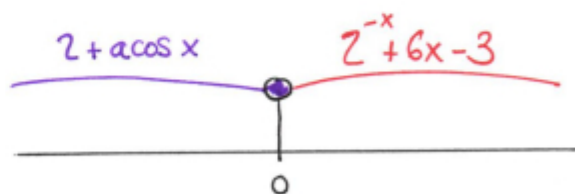
$$f(2) = 3a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} 3a^x = 3a^2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{12}{x-1} = 12 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 3a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 4 \\ \begin{array}{l} \nearrow a = -2 \\ \searrow a = +2 \end{array} \end{array} \right.$$

Si $a = -2$ o $a = 2 \Rightarrow$ Continua en $x = 2$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x = 2$

$$d) f(x) = \begin{cases} 2 + a \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{-x} + 6x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



$\text{Si } x < 0 \rightarrow f(x) = 2 + a \cdot \cos x \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \text{Continua en } (-\infty, 0)$

$\text{Si } x > 0 \rightarrow f(x) = 2^{-x} + 6x - 3 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \text{Continua en } (0, +\infty)$

$\text{Si } x = 0$

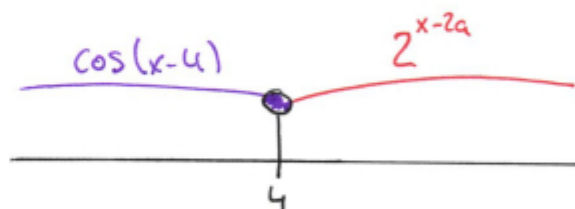
$f(0) = 2 + a \cdot \cos 0 = 2 + a$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + a \cos x) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (2^{-x} + 6x - 3) = -2 \end{array} \right\} \quad 2 + a = -2 \Rightarrow a = -4$$

Si $a = -4 \Rightarrow$ Continua en $x = 0$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq -4 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} \cos(x-4) & \text{si } x \leq 4 \\ 2^{x-2a} & \text{si } x > 4 \end{cases}$



$\text{Si } x < 4 \rightarrow f(x) = \cos(x-4) \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \text{Continua en } (-\infty, 4)$

$\text{Si } x > 4 \rightarrow f(x) = 2^{x-2a} \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \text{Continua en } (4, +\infty)$

$$\text{Si } x = 4$$

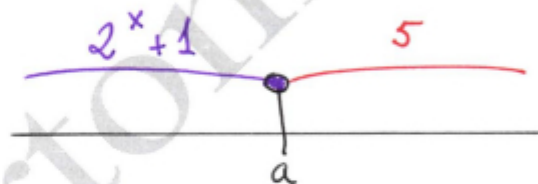
$$f(4) = \cos(4-4) = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} \cos(x-4) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} 2^{x-2a} = 2^{4-2a} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 2^{4-2a} = 1 \Rightarrow 2^{4-2a} = 2^0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4-2a = 0 \Rightarrow a = 2 \end{array}$$

Si $a = 2 \Rightarrow$ Continua en $x = 4$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq 2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x = 4$

$$g) f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & \text{si } x \leq a \\ 5 & \text{si } x > a \end{cases}$$



$$\text{Si } x < a \rightarrow f(x) = 2^x + 1 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, a)$

$$\text{Si } x > a \rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ Continua en $(a, +\infty)$

$$\text{Si } x = a$$

$$f(a) = 2^a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^-} (2^x + 1) = 2^a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} 5 = 5 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 2^a + 1 = 5 \Rightarrow 2^a = 4 \Rightarrow 2^a = 2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a = 2 \end{array}$$

Si $a = 2 \Rightarrow$ Continua en $x = 2$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq 2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x = a$

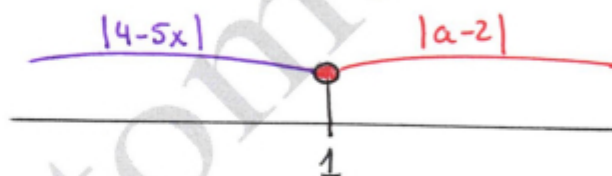
Si $x = 2$

$$f(2) = a^2 - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} |3x-4| = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} a^x - x = a^2 - 2 \end{array} \right\} \quad a^2 - 2 = 2 \Rightarrow a^2 = 4 \quad \begin{array}{l} \nearrow a = -2 \\ \searrow a = +2 \end{array}$$

Si $a = -2$ o $a = +2 \Rightarrow$ Continua en $x = 2$ y por tanto en $\mathbb{R}$ Si $a \neq -2$ y $a \neq 2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x = 2$

$$j) f(x) = \begin{cases} |4-5x| & \text{si } x < 1 \\ |a-2| & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $x < 1 \rightarrow f(x) = |4-5x| \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$ $\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 1)$ Si $x > 1 \rightarrow f(x) = |a-2| \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$ $\hookrightarrow$ Continua en $(1, +\infty)$ Si $x = 1$

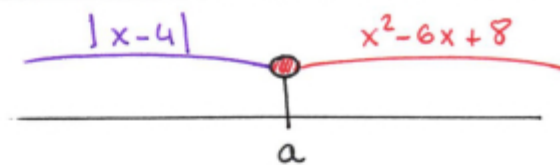
$$f(1) = |a-2|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} |4-5x| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} |a-2| = |a-2| \end{array} \right\} \quad |a-2| = 1 \Rightarrow a-2 = \pm 1$$

$$\begin{array}{l} \nearrow a-2 = 1 \Rightarrow a = 3 \\ \searrow a-2 = -1 \Rightarrow a = 1 \end{array}$$

Si $a = 1$ o $a = 3 \Rightarrow$ Continua en $x = 1$ y por tanto en $\mathbb{R}$ Si $a \neq 1$ y $a \neq 3 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x = 1$

$$k) f(x) = \begin{cases} |x-4| & \text{si } x < a \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > a \end{cases}$$



Si $x < a \rightarrow f(x) = |x-4| \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, a)$

Si $x > a \rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(a, +\infty)$

Si $x = a$

$$f(a) = a^2 - 6a + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^-} |x-4| = |a-4| \\ \lim_{x \rightarrow a^+} (x^2 - 6x + 8) = a^2 - 6a + 8 \end{array} \right\} \quad |a-4| = a^2 - 6a + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 4 = \pm(a^2 - 6a + 8)$$

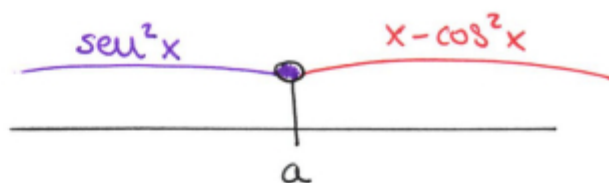
$$\hookrightarrow a - 4 = a^2 - 6a + 8 \Rightarrow a^2 - 7a + 12 = 0 \quad \begin{cases} a = 3 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow a - 4 = -a^2 + 6a - 8 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

Si $a = 1$ o $a = 3$ o $a = 4 \Rightarrow$ Continua en $x = a$, y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 3$ y $a \neq 4 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x = a$

$$e) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & \text{si } x \leq a \\ x - \cos^2 x & \text{si } x > a \end{cases}$$



(Si $x < a$) $\rightarrow f(x) = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, a)$

(Si $x > a$) $\rightarrow f(x) = x - \cos^2 x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(a, +\infty)$

(Si $x = a$)

$$f(a) = \operatorname{sen}^2(a)$$

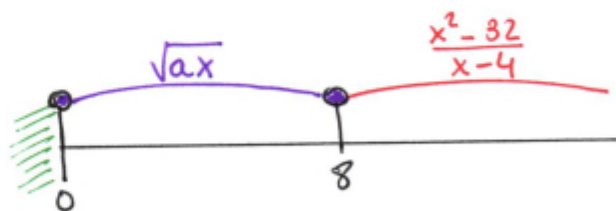
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2(a) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} (x - \cos^2 x) = a - \cos^2(a) \end{cases} \quad \operatorname{sen}^2(a) = a - \cos^2(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2(a) = a - \cos^2(a) \Rightarrow a = 1$$

Si $a = 1 \Rightarrow$ Continua en $x = 1$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x = a$

$$m) f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$$



(Si $0 \leq x < 8$) $\rightarrow f(x) = \sqrt{ax} \Rightarrow$ Continua en $[0, +\infty)$ si $a > 0$

$\hookrightarrow$ Continua en $[0, 8)$ si $a > 0$

(Si $x > 8$) $\rightarrow f(x) = \frac{x^2-32}{x-4} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{4\}$ ↑ NO AFECTA

$\hookrightarrow$ Continua en $(8, +\infty)$

(Si $x = 8$)

$$f(8) = \sqrt{a \cdot 8} = 2\sqrt{2a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 8^-} \sqrt{ax} = 2\sqrt{2a} \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{x^2-32}{x-4} = \frac{32}{4} = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{2a} = 8 \Rightarrow \sqrt{2a} = 4 \\ \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \end{array} \right.$$

Si $a = 8 \Rightarrow$ Continua en $x = 8$ y por tanto en $[0, +\infty)$

Si $a \in [0, 8) \cup (8, +\infty) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 8} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x = 8$

Si $a < 0 \Rightarrow \nexists f(x)$ en $[0, 8]$ y $f(x)$ es continua en $(8, +\infty)$

(55) Estudia la continuidad de las siguientes funciones en función de los parámetros "a" y "b".

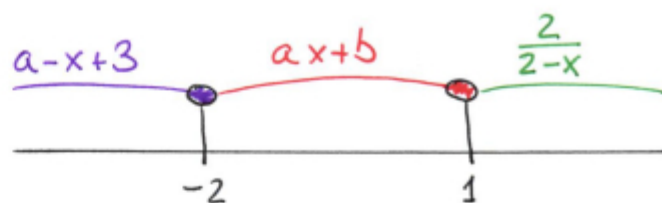
$$a) f(x) = \begin{cases} a-x+3 & \text{si } x \leq -2 \\ ax+b & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ \frac{2}{2-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} ax+3 & \text{si } x \leq -1 \\ bx^2+5 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2\sqrt{x+3}+a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2+2x+3 & \text{si } x \leq 0 \\ a \sin x + b & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ (x-\pi)^2+a & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2+bx & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2^x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$a) f(x) = \begin{cases} a-x+3 & \text{si } x \leq -2 \\ ax+b & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ \frac{2}{2-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Si $x < -2$ $\rightarrow f(x) = a-x+3 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -2)$

Si $-2 < x < 1$ $\rightarrow f(x) = ax+b \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-2, 1)$

Si $x > 1$ $\rightarrow f(x) = \frac{2}{2-x} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

$\uparrow$ SI QUE AFECTA

$\hookrightarrow$ Continua en $(1, 2) \cup (2, +\infty)$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{2-x} = \left[\frac{2}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{2-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{2-x} = -\infty \end{cases}$$

$x=2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

Si $x = -2$

$$f(-2) = a - (-2) + 3 = a + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} (a-x+3) = a+5 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (ax+b) = -2a+b \end{cases} \quad \begin{cases} a+5 = -2a+b \Rightarrow \\ -3a+b = 5 \end{cases}$$

$$\text{Si } x = 1$$

$$f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{2-x} = 2 \end{array} \right\} \quad a+b = 2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3a+b=5 \\ a+b=2 \end{array} \right\} E_2 - E_1 \rightarrow 4a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{11}{4}$$

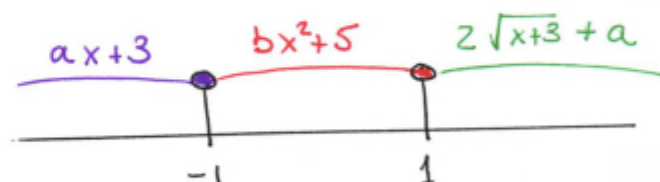
Si $a = -\frac{3}{4}$ y $b = \frac{11}{4} \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

Si $-3a+b=5$ y $a+b \neq 2 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$

Si $-3a+b \neq 5$ y $a+b=2 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Si $-3a+b \neq 5$ y $a+b \neq 2 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1, -2, 2\}$

$$b) f(x) = \begin{cases} ax+3 & \text{si } x \leq -1 \\ bx^2+5 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2\sqrt{x+3} + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



$\text{Si } x < -1 \rightarrow f(x) = ax+3 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -1)$

$\text{Si } -1 < x < 1 \rightarrow f(x) = bx^2+5 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-1, 1)$

Si $x > 1 \rightarrow f(x) = 2\sqrt{x+3} + a \Rightarrow$ Continua en $[-3, +\infty)$
 $\hookrightarrow$ Continua $(1, +\infty)$

Si $x = -1$

$$f(-1) = a \cdot (-1) + 3 = 3 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax+3) = 3-a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (bx^2+5) = b+5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3-a = b+5 \Rightarrow \\ \Rightarrow a+b = -2 \end{array}$$

Si $x = 1$

$$f(1) = b \cdot 1 + 5 = b+5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} bx^2+5 = b+5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{x+3} + a = a+4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a+4 = b+5 \Rightarrow \\ \Rightarrow a-b = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+b = -2 \\ a-b = 1 \end{array} \right\} E_1 + E_2 \rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

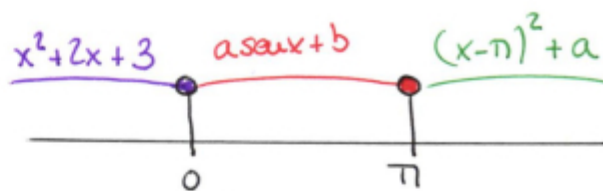
Si $a = -\frac{1}{2}$ y $b = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

Si $a+b = -2$ y $a-b \neq 1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

Si $a+b \neq -2$ y $a-b = 1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

Si $a+b \neq -2$ y $a-b \neq 1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ a \cdot \sec x + b & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ (x - \pi)^2 + a & \text{si } x > \pi \end{cases}$$



(Si $x < 0$) $\rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

(Si $0 < x < \pi$) $\rightarrow f(x) = a \sec x + b \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, \pi)$

(Si $x > \pi$) $\rightarrow f(x) = (x - \pi)^2 + a \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(\pi, +\infty)$

(Si $x = 0$)

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x + 3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (a \sec x + b) = b \end{array} \right\} \quad b = 3$$

(Si $x = \pi$)

$$f(\pi) = a \cdot \sec(\pi) + b = b$$

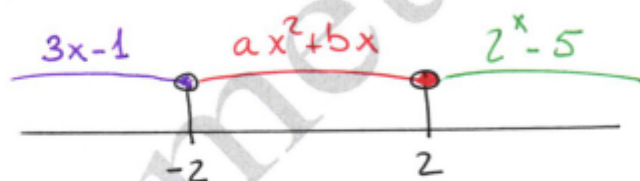
$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pi^-} (a \sec x + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} (x - \pi)^2 + a = a \end{array} \right\} \quad a = b$$

Por tanto

Si $b = 3$ $\begin{cases} a = 3 \rightarrow f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} \\ a \neq 3 \rightarrow f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{\pi\} \end{cases}$

Si $b \neq 3$ $\begin{cases} a = b \rightarrow f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0\} \\ a \neq b \rightarrow f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0, \pi\} \end{cases}$

$$d) f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2+bx & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2^x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



$(\text{Si } x < -2) \rightarrow f(x) = 3x-1 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \text{Continua en } (-\infty, -2)$

$(\text{Si } -2 < x < 2) \rightarrow f(x) = ax^2+bx \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \text{Continua en } (-2, 2)$

$(\text{Si } x > 2) \rightarrow f(x) = 2^x-5 \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \text{Continua en } (2, +\infty)$

$(\text{Si } x = -2)$

$$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 1 = -7$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x-1) = -7 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (ax^2+bx) = 4a-2b \end{array} \right\} \quad 4a-2b = -7$$

$$\text{Si } x = 2$$

$$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 4a + 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 + bx = 4a + 2b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} 2^x - 5 = -1 \end{array} \right\} \quad 4a + 2b = -1$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4a - 2b = -7 \\ 4a + 2b = -1 \end{array} \right\} \quad E_1 + E_2 \rightarrow 8a = -8 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

Si $a = -1$ y $b = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

Si $4a - 2b = -7$ y $4a + 2b \neq -1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

Si $4a - 2b \neq -7$ y $4a + 2b = -1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$

Si $4a - 2b \neq -7$ y $4a + 2b \neq -1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

56) Estudia y clasifica las discontinuidades que presenta la función $f(x) = \frac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$ según los valores de "m".

$$f(x) = \frac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9} ; \quad x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \begin{cases} \rightarrow x = -3 \\ \rightarrow x = +3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

$f(x)$ presenta discontinuidades en $x = -3$ y en $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9} = \left[\frac{9m - 18}{0} \right] \quad \rightarrow 9m - 18 = 0 \Rightarrow m = 2$$

↳ Si $m = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcircled{*} \quad -3 \left| \begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 0 & 9 \\ & -3 & 3 & -9 \\ \hline 1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right. \quad -3 \left| \begin{array}{rrr} 1 & 0 & -9 \\ & -3 & +9 \\ \hline 1 & -3 & 0 \end{array} \right.$$

$$\textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x^2 - x + 3)}{\cancel{(x+3)}(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 3}{x-3} = \frac{-15}{6}$$

$\Rightarrow x = -3$ es discontinuidad EVITABLE

↳ Si $m \neq 2$:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9} = \left[\frac{9m - 18}{0} \right] \Rightarrow x = -3 \text{ es discontinuidad de SALTO INFINITO}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9} = \left[\frac{9m + 36}{0} \right] \quad \rightarrow 9m + 36 = 0 \Rightarrow m = -4$$

↳ Si $m = -4$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcircled{*} \quad 3 \left| \begin{array}{rrrr} 1 & -4 & 0 & 9 \\ & 3 & -3 & -9 \\ \hline 1 & -1 & -3 & 0 \end{array} \right.$$

$$\textcircled{*} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x^2 - x - 3)}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 3}{x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x = 3$ es discontinuidad EVITABLE

↳ Si $m \neq -4$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9} = \left[\frac{9m + 36}{0} \right] \Rightarrow x = 3 \text{ es discontinuidad de SALTO INFINITO}$$

En resumen:

Si $m \neq -4$ y $m \neq 2 \Rightarrow$ Discontinuidades de salto infinito en $x = -3$ y en $x = 3$

Si $m = 2 \Rightarrow$ Discontinuidad evitable en $x = -3$ y de salto infinito en $x = 3$

Si $m = 4 \Rightarrow$ Discontinuidad de salto infinito en $x = -3$ y evitable en $x = 3$.

⑤⑦ Estudia la continuidad de la función real de variable real $f(x) = \frac{x^m + 1}{x^m - 1}$ donde "m" es un entero positivo.

$$f(x) = \frac{x^m + 1}{x^m - 1} ; \quad x^m - 1 = 0 \Rightarrow x^m = 1$$

$\Rightarrow$ Si m es par:

$$x^m = 1 \begin{cases} \rightarrow x = -1 \\ \rightarrow x = +1 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$f(x)$ presentará discontinuidades en $x = -1$ y en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^m + 1}{x^m - 1} = \left[\frac{2}{0} \right] \Rightarrow x = -1 \text{ discontinuidad de salto infinito}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m + 1}{x^m - 1} = \left[\frac{2}{0} \right] \Rightarrow x = 1 \text{ discontinuidad de salto infinito}$$

$\Rightarrow$ Si m es impar:

$$x^m = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$f(x)$ presentará una discontinuidad en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m + 1}{x^m - 1} = \left[\frac{2}{0} \right] \Rightarrow x = 1 \text{ discontinuidad de salto infinito.}$$

(58) Demuestra que la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $(1, 2)$

la función $f(x) = x^3 - 3x - 1$ es continua en $\mathbb{R}$, y por tanto también lo será en el intervalo $[1, 2]$

Además:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 1 = -3 \\ f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$$

Por el **TEOREMA DE BOLZANO**, podemos asegurar que existe al menos un punto $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 3x - 1 = 0$ en $c \in (1, 2)$ como queríamos demostrar.

59) Dada la función $f(x) = \sqrt{x} + \ln(x) - 2$, demuestra que existe "a" tal que $(a, 0)$ es un punto de la función.

Si $(a, 0)$ es un punto de la función entonces $f(a) = 0$

La función $f(a) = \sqrt{a} + \ln(a) - 2$ es continua $\forall a \in (0, +\infty)$

Busquemos un intervalo en que $f(a)$ cambie de signo:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1} + \ln(1) - 2 = -1 \\ f(2) = \sqrt{2} + \ln(2) - 2 = 0.1074 \end{array} \right\} f(1) \cdot f(2) < 0$$

Acabamos de ver que al ser continua $f(a)$ en $(0, +\infty)$ lo será también en $[1, 2]$. En ese intervalo, $f(a)$ cambia de signo y, por el **TEOREMA DE BOLZANO**, existirá un punto $a \in (1, 2)$ tal que $f(a) = 0$, como queríamos demostrar.

60) Prueba que la función $f(x) = x^2 - 1 - \sqrt{x}$ corta al menos en un punto al eje OX. Sitúa ese punto en un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$.

La función $f(x) = x^2 - 1 - \sqrt{x}$ es continua $\forall x \in [0, +\infty)$

Busquemos un intervalo en que $f(x)$ cambie de signo:

$$f(0) = 0^2 - 1 - \sqrt{0} = -1$$

$$f(1) = 1^2 - 1 - \sqrt{1} = -1$$

$$f(2) = 2^2 - 1 - \sqrt{2} = 1.586$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^2 - 1 - \sqrt{1} = -1 \\ f(2) = 2^2 - 1 - \sqrt{2} = 1.586 \end{array} \right\} f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow \exists x \in (1, 2) / f(x) = 0$$

↑
Bolzano

$$f(1.5) = 1.5^2 - 1 - \sqrt{1.5} = 0.02 \Rightarrow \exists x \in (1, 1.5) / f(x) = 0$$

$$f(1.25) = 1.25^2 - 1 - \sqrt{1.25} = -0.56 \Rightarrow \exists x \in (1.25, 1.5) / f(x) = 0$$

$f(x)$ corta al eje X ($f(x)=0$) en algún punto $x \in (1.25, 1.5)$ como queríamos demostrar.

61) Dadas las funciones $f(x) = 2\sin x$ y $g(x) = -3x + 1$, demostrar que se cortan al menos en un punto.

Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan cuando $f(x) = g(x)$

$$\Rightarrow 2\sin(x) = -3x + 1 \Rightarrow 2\sin(x) + 3x - 1 = 0$$

Sea $h(x) = 2\sin(x) + 3x - 1$. La función $h(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

Busquemos un intervalo en que $h(x)$ cambie de signo

$$h(0) = 2\sin(0) + 3 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 = 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5.71$$

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = -1 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 5.71 \end{array} \right\} h(0) \cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

$\Rightarrow$ La función $h(x)$ es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y en ese intervalo cambia de signo, por lo que, por el teorema de Bolzano, $h(x) = 0$ en algún $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Como $h(x)$ es $h(x) = f(x) - g(x)$, si $h(x) = 0$, entonces
 $f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow f(x)$ y $g(x)$ se cortan en
 algún $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ como queríamos demostrar.

62) Calcular de forma aproximada una solución positiva para la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ con tres decimales.

$f(x) = x^3 + x - 1$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

Bosquemos un intervalo en que $f(x)$ cambie de signo:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1 \\ f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1 \end{array} \right\} f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \exists x \in (0, 1) / f(x) = 0$$

↑
Bolzano

$$f(0'5) = 0'5^3 + 0'5 - 1 = -0'375 \Rightarrow \exists x \in (0'5, 1) / f(x) = 0$$

$$f(0'6) = -0'184 \Rightarrow \exists x \in (0'6, 1) / f(x) = 0$$

$$f(0'7) = 0'043 \Rightarrow \exists x \in (0'6, 0'7) / f(x) = 0$$

$$f(0'68) = -0'005 \Rightarrow \exists x \in (0'68, 0'7) / f(x) = 0$$

$$f(0'69) = 0'018 \Rightarrow \exists x \in (0'68, 0'69) / f(x) = 0$$

$$f(0'685) = 0'006 \Rightarrow \exists x \in (0'68, 0'685) / f(x) = 0$$

$$f(0'682) = -0'0007 \Rightarrow \exists x \in (0'682, 0'685) / f(x) = 0$$

$\Rightarrow x = 0'682$ es una solución APROXIMADA de $x^3 + x - 1 = 0$

⑥3 Demuestra que si una función es continua en el intervalo $[a, b]$ y existe un número K tal que $f(b) < K < f(a)$, entonces existe un número $c \in (a, b)$ / $f(c) = K$

Queremos demostrar que $f(x) = K$ en $x \in (a, b)$

Sea $g(x)$ la función $g(x) = f(x) - K$. Como $f(x)$ es continua en $[a, b]$, por el **álgebra de funciones continuas**, $g(x)$ también será continua en $[a, b]$. Veamos que ocurre con su signo:

$$g(x) = f(x) - K, \text{ continua en } [a, b]$$

$$g(a) = f(a) - K \Rightarrow \text{Como } K < f(a) \Rightarrow f(a) - K > 0 \Rightarrow g(a) > 0$$

$$g(b) = f(b) - K \Rightarrow \text{Como } f(b) < K \Rightarrow f(b) - K < 0 \Rightarrow g(b) < 0$$

$$\Rightarrow \text{Como } g(a) \cdot g(b) < 0 \xRightarrow{\text{Bolzano}} g(x) = 0 \text{ en } x \in (a, b)$$

$$\Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow f(x) - K = 0 \Rightarrow f(x) = K \text{ en } x \in (a, b)$$

como queríamos demostrar.

Nota: $\rightarrow$ Este ejercicio resulta ser la demostración del **TEOREMA DE DARBOUX** de los valores intermedios que no vemos en profundidad ya que siempre podremos aplicar el teorema de Bolzano.

⑥4) La función $f(x)$ proporciona los ingresos en miles de euros que se generan en #BertoBlog transcurridos " x " años:

$$f(x) = -2x^2 + 10x$$

Justificar que durante los 4 primeros años, en algún momento se llegaron a ingresar 10000 €.

$$f(x) = -2x^2 + 10x ; f(x) \text{ en miles de euros y } x \text{ en años } (x > 0!!)$$

Tenemos que justificar que algún momento $x \in (0, 4)$ se tuvo $f(x) = 10$

$$\Rightarrow -2x^2 + 10x = 10 \Rightarrow -2x^2 + 10x - 10 = 0$$

Sea $g(x) = -2x^2 + 10x - 10$. La función $g(x)$ es continua $\forall x \in [0, +\infty)$ y por tanto, también lo será en $[0, 4]$.

Además:

$$g(0) = -10$$

$$g(1) = -2$$

$$g(2) = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = -10 \\ g(1) = -2 \\ g(2) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow g(1) \cdot g(2) < 0 \xRightarrow{\text{Bolzano}} \exists x \in (1, 2) / g(x) = 0$$

$$\text{Como } g(x) = f(x) - 10, \text{ si } g(x) = 0 \Rightarrow f(x) - 10 = 0 \Rightarrow f(x) = 10$$

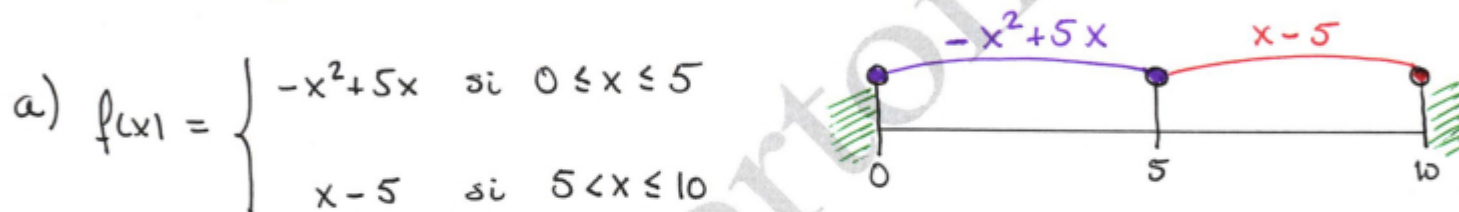
$$\Rightarrow f(x) = 10 \text{ en algún } x \in (1, 2), \text{ como queríamos demostrar}$$

(65) Estudia la continuidad y haz una representación gráfica de las funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$



Si $0 \leq x < 5 \rightarrow f(x) = -x^2 + 5x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $[0, 5)$

Si $5 < x \leq 10 \rightarrow f(x) = x - 5 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(5, 10]$

Si $x = 5$

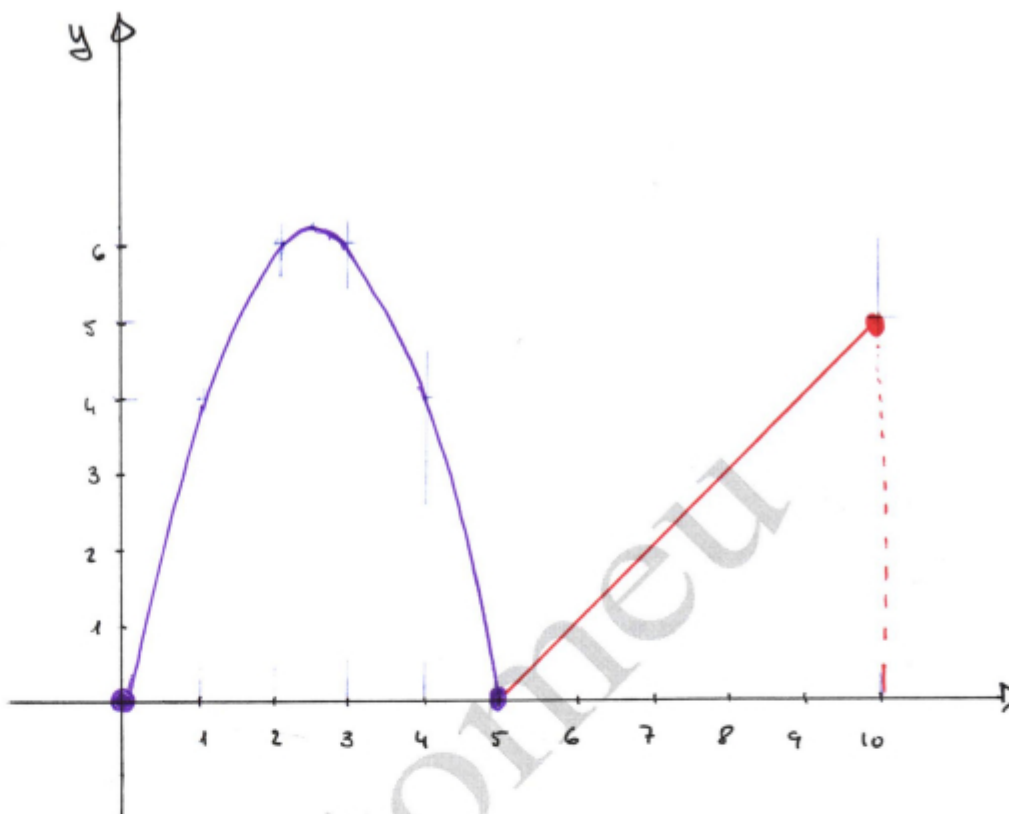
$$f(5) = -5^2 + 5 \cdot 5 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} (-x^2 + 5x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} (x - 5) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$$

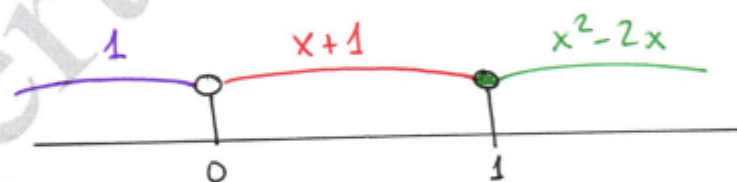
$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x = 5$, y por tanto en $[0, 10]$

Para representar, basta con hacer una tabla de valores.

x	$f(x) = -x^2 + 5x$
0	0 SI
1	4
2	6
3	6
4	4
5	0 SI
x	$f(x) = x - 5$
5	0 NO
10	5 SI



$$b) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2-2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Si $x < 0 \rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0 < x < 1 \rightarrow f(x) = x+1 \Rightarrow$ Continua en $(0, 1)$

Si $x > 1 \rightarrow f(x) = x^2-2x \Rightarrow$ Continua en $(1, +\infty)$

Si $x = 0$:

$$\nexists f(0); \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

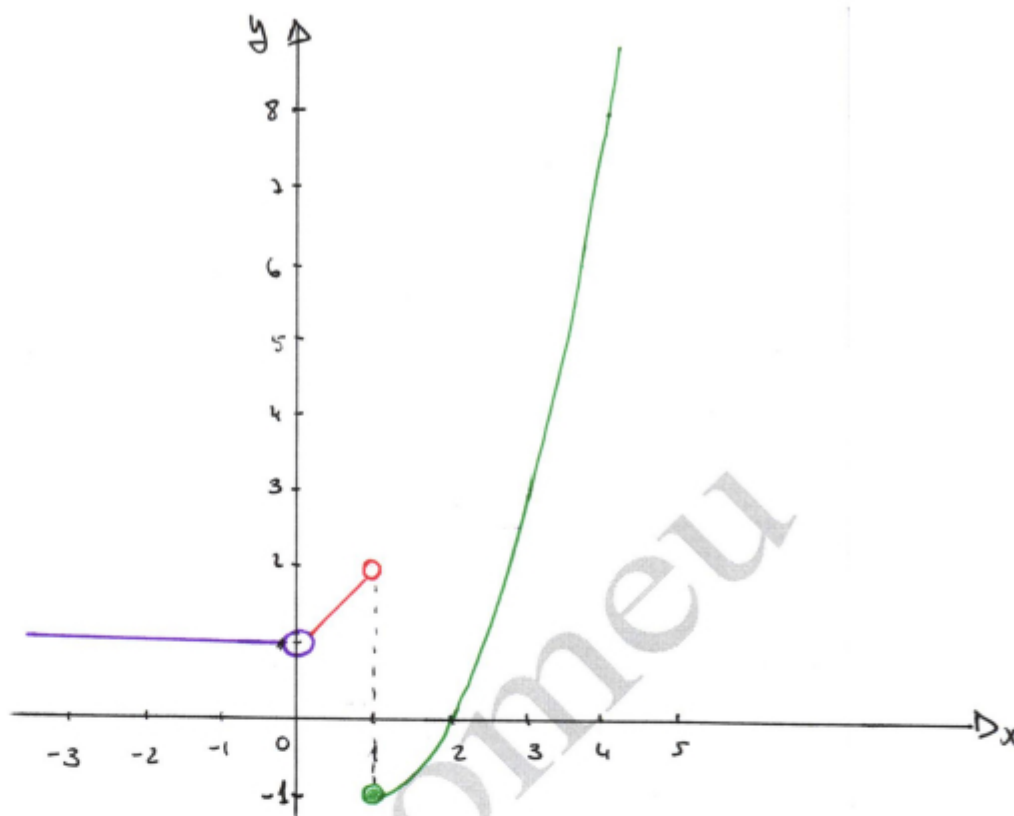
$\Rightarrow x = 0$ es una discontinuidad EVITABLE.

Si $x = 1$:

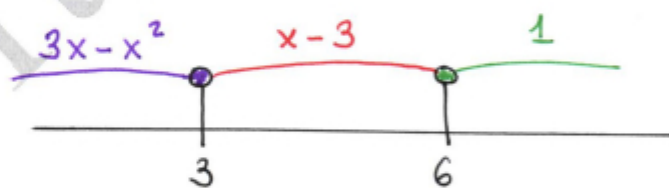
$$f(1) = 1-2 = -1; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2-2x) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$\Rightarrow x = 1$ discontinuidad de salto finito.

x	$f(x) = 1$
0	1 NO
x	$f(x) = x + 1$
0	1 NO
1	2 NO
x	$f(x) = x^2 - 2x$
1	-1 SI
2	0
3	3
4	8



$$c) f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$



Si $x < 3 \rightarrow f(x) = 3x - x^2 \rightarrow$ Continua en $(-\infty, 3)$

Si $3 < x < 6 \rightarrow f(x) = x - 3 \rightarrow$ Continua en $(3, 6)$

Si $x > 6 \rightarrow f(x) = 1 \rightarrow$ Continua en $(6, +\infty)$

Si $x = 3$

$$f(3) = 3 \cdot 3 - 3^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x - x^2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x = 3$

Si $x = 6$

$$f(6) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 6^-} (x-3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 6} f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 6$

x	$f(x) = 3x - x^2$
-3	-39
-2	-10
-1	-4
0	0
1	2
2	2
3	0 SI
x	$f(x) = x - 3$
3	0 NO
6	3 NO
x	$f(x) = 6$
1	6 SI

