1) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A+B$ g) $C-D$ m) $A\cdot B$ s) $4C$

b) $B+C$ h) $D-A$ n) $B\cdot A$ t) $-2D$

c) $C+D$ i) A^t o) $A\cdot C$ u) $B\cdot C$

d) $D+A$ j) B^t p) $A\cdot D$ v) $B\cdot D$

e) $A-B$ k) C^t q) $2A$ w) $C\cdot D$

f) $B-C$ l) D^t r) $-3B$ x) A^2

2) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A\cdot B$ b) $B\cdot A$ c) $(A\cdot B)^2$ d) $(B\cdot A)^t$

3) Dadas las matrices A y B del ejercicio anterior, ¿qué dimensiones debe tener la matriz M para que se pueda efectuar el producto $A \cdot M \cdot B$?

4) Si A es una matriz $A_{3\times 2}$, ¿qué dimensiones debe tener la matriz M para que $A^t \cdot M$ sea una matriz cuadrada?

5) Construye una matriz A cuadrada de orden 3 en la que sus elementos verifiquen $a_{ij} = i - j$. Comprueba que dicha matriz es antisimétrica.

6) Comprueba que las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ conmutan (es decir, verifican que $A \cdot B = B \cdot A$)

7) Encuentra la expresión general de todas las matrices que conmutan con la matriz A, siendo:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

8) Sea C el conjunto de todas las matrices de la forma $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que dos matrices de este conjunto siempre conmutan.

9) Sea M el conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2+b^2=1$. Demuestra que si multiplicamos dos matrices cualesquiera del conjunto M, la matriz producto que obtendremos también pertenecerá a M.

10) Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2 tales que el producto $A \cdot B$ es la matriz nula θ_{2x2}, ¿es cierto que al menos una de las dos matrices A o B tiene que ser la matriz nula?

11) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$, encontrar los valores de x e y para los cuales se verifica $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

12) Encuentra todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} -1 & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tales que A^2 sea la matriz unitaria de orden 2, I_{2x2}

13) Determina los valores de x, y, z para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, calcula los valores de x e y para que $A^2+x\cdot A+y\cdot I_{2x2}=\theta_{2x2}$

15) Calcula el valor de "x" para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 2 & -1\\ 1 & 0 & x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2x & -5\\ x & 2 & -1\end{pmatrix}$$

16) Determina todas las matrices A de orden 2 antisi-métricas que verifiquen la condición $A^4=16\cdot I$

17) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, calcula las matrices B tales que $A\cdot B=B\cdot A^t$

18) Halla todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $M^2-2M=3I$

19) Determina los valores de "m" para los cuales la matriz $X=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ verifique $X^2-4X+I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$

20) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$, calcula los valores de "m" y "n" para los que se cumple $(I+A)^3=mI+nA$

21) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix}$, averiguar razonadamente si existe algún valor de x para el que se verifique $A^2 = A$

22) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n. Sabiendo que $A^2 = A$ y que $B = 2A - I$, averiguar qué matriz es B^2

23) Encuentra todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que conmuten con la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De entre todas ellas, determina aquella cuya soma de los elementos de la diagonal principal sea 5 y donde $a_{11} = -a_{12}$

24) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{41}

25) De una matriz A sabemos que cumple que $A^2 = 2A - I$. Determina la expresión general de la potencia n-ésima de la matriz A

26) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

a) Comprueba que A y B conmutan

b) Calcula A^n y B^n

27) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

a) Calcula todas las matrices B que conmutan con A

b) Calcula A^n

28) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$, calcula:

a) Todas las matrices B que conmutan con A

b) A^4 y A^n

29) Considera las matrices $M=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$ y $V=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

a) Calcula M^n

b) Todas las matrices M que cumplan que $M^{100}=V$

30) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$, determina:

a) Las constantes m y n tales que $A^2=mA+nI$

b) La potencia A^5 utilizando exclusivamente la expresión calculada en el apartado anterior.

31) Una matriz cuadrada es NILPOTENTE de grado K si existe K para el cual A^K es la matriz nula, siendo $A^{K-1} \neq \theta$. Comprueba que la siguiente matriz es nilpotente y di de qué grado lo es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

32) Calcular por inducción A^n, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

33) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2, A^3, A^4 y A^5

b) Expresa A^{2n} en función de I

34) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Comprobar que $A^3 + I = \theta$

b) Calcular A^7 y A^{1000}

35) Calcular por inducción A^n siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

36) Encontrar por inducción completa la matriz A^n

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{N}$

37) Encontrar por inducción completa la matriz A^n

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

38) Calcula la inversa de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

39) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(A^2)^{-1} + (A^{-1})^2$

40) Calcular por el método de Gauss-Jordan la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

41) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1} y B^{-1}

b) Calcula $(A\cdot B)^{-1}$

c) Comprueba que $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

42) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ calcula:

a) A^{-1} y $(A^t)^{-1}$

b) Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

43) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que A^3 es la matriz nula

b) Demuestra que la matriz (A^2+A+I) y la matriz $(I-A)$ son inversas una de la otra

44) Determina todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que $A^{-1} = 2I - A$

45) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, y que la inversa de la matriz $A\cdot B$ es $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, determina la matriz B

46) Si una matriz cuadrada verifica que $A^2 = 2A + 3I$

a) obtener la expresión de A^{-1} en función de A y de I

b) obtener todas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que cumplen $A^2 = 2A + 3I$

47) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ a & b & c \end{pmatrix}$, calcula:

a) Las constantes a, b y c para que se cumpla que $A^t = A^{-1}$

b) La matriz A^4 para los valores de a, b y c obtenidos

48) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = 2I$

b) Calcula A^{-1}

c) Halla A^{12} y la inversa de A^{12}

49) Calcula el rango de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \end{pmatrix}$

50) Calcular en función de "t" el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & t \\ 4 & -2 & -6 & -8 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

51) Basándote en el estudio del rango de la matriz, averigua para qué valores de "t" existe la matriz inversa de A, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2t \end{pmatrix}$$

52) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de la matriz A^n. ¿Depende el rango de n?

53) Calcular los valores de a, b y c para que $rg(A) = 1$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ a & b+2 & 3 & -3c \end{pmatrix}$$

54) Dada una matriz diagonal A invertible, demostrar que A^{-1} es una matriz diagonal

55) Demostrar que si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} también es simétrica

56) Una matriz cuadrada A es INVOLUTIVA si se verifica que $A^2 = I$

a) Demuestra que si A es involutiva, entonces $A^{-1} = A$

b) Comprueba que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ es involutiva

57) Una matriz cuadrada A es IDEMPOTENTE si se verifica que $A^2 = A$.

Comprueba que $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ es idempotente. ¿Es invertible?

58) Una matriz cuadrada A es ORTOGONAL si se verifica que $A \cdot A^t = I$

a) Comprobar que si A es ortogonal entonces $A^{-1} = A^t$

b) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal

59) Dadas A y B dos matrices de orden "n" y ortogonales. Demuestra que la matriz producto $A \cdot B$ es también una matriz ortogonal.

60) Despeja la matriz X en las siguientes ecuaciones matriciales (suponer que existen todas las matrices inversas que necesites para despejar)

a) $AX = B$

b) $XA = B$

c) $XB + A = C^t$

d) $BX + 2X = A$

e) $A^{-1} \cdot X = A$

f) $AXA^{-1} = B + C$

g) $(A+B)X = C$

h) $AX + BX = CX + A^t$

61) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz X que verifica $AX = C^t + B$

62) Calcula la matriz X que verifica $AX - B = 2X$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

63) Resuelve la ecuación matricial $XA = XB - A^t$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

64) Encuentra la matriz X que verifica la ecuación

$AXA = 2BA$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

65) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra la inversa A^{-1}

b) utiliza A^{-1} para resolver la ecuación:

$$AX + C \cdot B^t = B \cdot B^t$$

66) Resuelve la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

67) Resuelve los sistemas de ecuaciones matriciales:

a) $$\left.\begin{aligned} 2A + 3B &= \begin{pmatrix} -4 & 3 & 21 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ A - 2B &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -7 & -1 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} 4X + 3Y &= \begin{pmatrix} -7 & 4 & -6 \\ 10 & -1 & 23 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y &= \begin{pmatrix} -18 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} 2A + 3B &= \begin{pmatrix} 11 & 0 & 10 \\ -8 & 7 & -1 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

68) Encuentra las matrices A y B que cumplen con el sistema de ecuaciones dado por:

$$\left.\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A^2 - AB + BA - B^2 &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

69) Sean A, B y C las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Encuentra las matrices X e Y que cumplen:

$$\left.\begin{aligned} AX + BY &= C \\ AX &= Y \end{aligned}\right\}$$

70) Encuentra una matriz X de orden 2 que cumpla

$A + X = AX + XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

71) Resuelve la ecuación matricial $XA + AX = B$

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 1 & -3 & -2\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A+B$	g) $C-D$	m) $A\cdot B$	s) $4C$
b) $B+C$	h) $D-A$	n) $B\cdot A$	t) $-2D$
c) $C+D$	i) A^t	o) $A\cdot C$	u) $B\cdot C$
d) $D+A$	j) B^t	p) $A\cdot D$	v) $B\cdot D$
e) $A-B$	k) C^t	q) $2A$	w) $C\cdot D$
f) $B-C$	l) D^t	r) $-3B$	x) A^2

a) $$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 1 & -3 & -2\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 10 & 1\\ 1 & -2 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) $$B+C=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 7 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

c) $C+D=\begin{pmatrix}4&1&2\\0&0&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&8&1\\0&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&9&3\\0&-1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$

d) $D+A=\begin{pmatrix}-2&8&1\\0&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&4&0\\1&-3&-2\\2&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&12&1\\1&-4&0\\3&0&5\end{pmatrix}$

e) $A-B=\begin{pmatrix}-1&4&0\\1&-3&-2\\2&0&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&6&1\\0&1&0\\1&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2&-1\\1&-4&-2\\1&0&9\end{pmatrix}$

f) $B-C=\begin{pmatrix}3&6&1\\0&1&0\\1&0&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&1&2\\0&0&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&5&-1\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$

g) $C-D=\begin{pmatrix}4&1&2\\0&0&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&8&1\\0&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-7&1\\0&1&-3\\0&0&-2\end{pmatrix}$

h) $D-A=\begin{pmatrix}-2&8&1\\0&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&4&0\\1&-3&-2\\2&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&1\\-1&2&4\\-1&0&-5\end{pmatrix}$

i) $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; j) $B^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

k) $C^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; l) $D^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

m) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 11 & 12 & -18 \end{pmatrix}$

n) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -7 \\ 1 & -3 & -2 \\ -9 & 4 & -20 \end{pmatrix}$

o) $A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 9 \\ 13 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

p) $A \cdot D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 7 \\ -4 & 11 & -5 \\ 1 & 16 & 2 \end{pmatrix}$

q) $2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 2 & -6 & -4 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

r) $-3B = -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -18 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

s) $4C = 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

t) $-2D = -2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -16 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

u) $B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

v) $B \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 18 & 15 \\ 0 & -1 & 2 \\ -6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

w) $C \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 31 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

x) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -16 & -8 \\ -8 & 13 & -4 \\ 8 & 8 & 25 \end{pmatrix}$

2) Dadas las matrices

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

calcula:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $(A \cdot B)^2$ d) $(B \cdot A)^t$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & -8 \\ -15 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

c) $(A \cdot B)^2 = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B) = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 9 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 9 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -104 & 156 \\ -117 & 13 \end{pmatrix}$

d) $(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -15 \\ 4 & -6 & 6 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

3) Dadas las matrices A y B del ejercicio anterior, ¿qué dimensiones debe tener la matriz M para que se pueda efectuar el producto A · M · B ?

Recuerda que el producto de dos matrices se puede efectuar cuando el número de columnas de la matriz que está escrita en primer lugar es igual al número de filas de la que está escrita en segundo lugar.

Tenemos las matrices:

$A_{2\times3}$ y $B_{3\times2}$. La matriz M es $M_{m\times n}$

Si debe existir la matriz producto A · M · B tendrá que ser:

$$\underbrace{A_{2\times3} \cdot M_{m}}_{m=3}{}_{\times} \underbrace{{}_{n} \cdot B_{3}}_{n=3}{}_{\times2} \Rightarrow M \text{ será } M_{3\times3}$$

Además, la matriz AMB será:

$$A_{2\times \underbrace{3 \cdot M_{3}}_{3=3} \times \underbrace{3 \cdot B_{3}}_{3=3} \times 2} = (AMB)_{2\times2}$$

Dimensiones resultado

4) Si A es una matriz $A_{3\times2}$, ¿qué dimensiones debe tener la matriz M para que $A^t \cdot M$ sea una matriz cuadrada?

Si A es una matriz $A_{3\times2}$, entonces A^t será una matriz $A^t_{2\times3}$

$$A^t_{2\times3} \cdot M_{m\times n} = (A^t \cdot M)_{2\times n}$$

$m=3$

Dimensiones resultado

Para que sea cuadrada debe ser $n=2$

$\Longrightarrow$ M debe ser una matriz $M_{3\times2}$

5) Construye una matriz A cuadrada de orden 3 en la que sus elementos verifiquen $a_{ij} = i - j$. Comprueba que dicha matriz es antisimétrica.

La matriz $A_{3\times3}$ pedida será:

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xRightarrow[a_{ij}=i-j]{} A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matriz se llama antisimétrica cuando coincide con la opuesta de su transpuesta. Veamos si la matriz calculada es antisimétrica:

$$-A^t = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Como $A = -A^t \Rightarrow A$ es antisimétrica

6) Comprueba que las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ conmutan (es decir, verifican que $A \cdot B = B \cdot A$)

$$\left.\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Como $AB = BA \Rightarrow$ A y B conmutan

7) Encuentra la expresión general de todas las matrices que conmutan con la matriz A, siendo:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Buscamos todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$. Así:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \cancel{a} + c = \cancel{a} \\ \cancel{b} + d = a + \cancel{b} \\ c = c \\ \cancel{d} = c + \cancel{d} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to c = 0 \\ \to a = d \ \forall b \\ \\ \to c = 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Buscamos todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$. Así:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & -a \\ 2d & -c \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} -c = 2b \\ -d = -a \\ 2a = 2d \\ 2b = -c \end{array}\right\} \begin{array}{l} c = -2b \\ a = d \end{array} \Longrightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a \end{pmatrix} \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Buscamos todas las matrices $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A\cdot B = B\cdot A$. Así:

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} \\ \\ B\cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b & 2b \\ 3c-d & 2d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \cancel{3a} = \cancel{3a}-b \\ 3b = 2b \\ -a+2c = 3c-d \\ -b+\cancel{2d} = \cancel{2d} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to b=0 \\ \to b=0 \\ \to a = d-c \quad \forall c,d\in\mathbb{R} \\ \to b = 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow B = \left\{\begin{pmatrix} d-c & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \forall c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

8) Sea C el conjunto de todas las matrices de la forma $C=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Demuestra que dos matrices de este conjunto siempre conmutan.

Sea C el conjunto de matrices $C=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \forall a,b\in\mathbb{R}\right\}$

Tomemos dos matrices cualesquiera del conjunto C:

Sean $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix}$ matrices de C.

Veamos si conmutan:

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz-yt & xt+yz \\ -yz-xt & -yt+xz \end{pmatrix}$$

$$Y \cdot X = \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zx-yt & zy+xt \\ -tx-zy & -ty+xz \end{pmatrix}$$

Como vemos $X \cdot Y = Y \cdot X \quad \forall X, Y \in C$ como queríamos demostrar

a) Sea M el conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2+b^2=1$. Demuestra que si multiplicamos dos matrices cualesquiera del conjunto M, la matriz producto que obtendremos también pertenecerá a M.

Sea el conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{con } a,b \in \mathbb{R} \;/\; a^2+b^2=1 \right\}$

Tomemos dos matrices $X, Y \in M$:

$$X \in M \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \;/\; x^2+y^2=1$$

$$Y \in M \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} z & -t \\ t & z \end{pmatrix} \;/\; z^2+t^2=1$$

Se trata de ver si la matriz producto $X\cdot Y$ también pertenece al conjunto M. Así:

$$X\cdot Y=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z & -t \\ t & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xz-yt & -xt-yz \\ yz+xt & -yt+xz \end{pmatrix}$$

Para que esta matriz $X\cdot Y$ pertenezca a M tendrá que verificarse que $(xz-yt)^2+(yz+xt)^2=1$. Veámoslo:

$$(xz-yt)^2+(yz+xt)^2=x^2z^2\cancel{-2xzyt}+y^2t^2+y^2z^2\cancel{+2xzyt}+x^2t^2=$$

$$=x^2z^2+y^2t^2+y^2z^2+x^2t^2=x^2(z^2+t^2)+y^2(z^2+t^2)=$$

$$\underset{\uparrow \atop z^2+t^2=1}{=}\;x^2\cdot 1+y^2\cdot 1=x^2+y^2\underset{\uparrow \atop x^2+y^2=1}{=}1$$

Efectivamente, si $X, Y\in M \Rightarrow (X\cdot Y)\in M$

10) Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2 tales que el producto $A\cdot B$ es la matriz nula O_{2x2}, ¿es cierto que al menos una de las dos matrices A o B tiene que ser la matriz nula?

Si $A\cdot B=O_{2x2}$, No es cierto que alguna de las dos matrices A o B deba ser la matriz nula. Para demostrar que algo no es cierto en matemáticas el mejor camino es buscar un contraejemplo. En este caso es muy fácil ver que:

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Theta_{2\times 2}$$

Donde puedes ver que ni A ni B son la matriz nula y la matriz producto A·B sí lo es.

11) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$, encontrar los valores de x e y para los cuales se verifica que $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-1 & x+y \\ -x-y & -1+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} x^2-1 = 3 \\ x+y = 1 \\ -x-y = -1 \\ y^2-1 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = -2, \; x = +2 \\ \rightarrow x+y = 1 \\ \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = -1, \; y = 1 \end{array}$$

De los valores de x, y calculados, los únicos que cumplen $x+y=1$ son $\boxed{x=2}$ e $\boxed{y=-1}$

12) Encuentra todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} -1 & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tales que A^2 sea la matriz unitaria de orden 2, I_{2x2}

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+zy & -y+yt \\ -z+zt & zy+t^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+zy & -y+yt \\ -z+zt & zy+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+zy=1 \\ -y+yt=0 \\ -z+zt=0 \\ zy+t^2=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to z \cdot y = 0 \\ \to y(t-1)=0 \\ \to z(t-1)=0 \\ \to zy+t^2=1 \end{array} \to z \cdot y = 0$$

Varias Opciones

Opción 1:

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ y\neq 0 \end{array}\right\} \underbrace{y}_{\neq 0} \cdot (t-1)=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \forall y \in \mathbb{R}$$

Opción 2:

$$\left.\begin{array}{l} z\neq 0 \\ y=0 \end{array}\right\} \underbrace{z}_{\neq 0} \cdot (t-1)=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \ \forall z \in \mathbb{R}$$

Opción 3:

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \cancel{zy}^{\,0}+t^2=1 \begin{cases} t=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ t=-1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

13) Determina los valores de x, y, z para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + yx & y + yz \\ x + xz & xy + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + yx = 5 \\ y + yz = 0 \\ x + xz = 0 \\ xy + z^2 = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow yx = 4 \longrightarrow y \neq 0 \wedge x \neq 0 \\ \longrightarrow y(z+1) = 0 \\ \longrightarrow x(z+1) = 0 \\ \longrightarrow xy + z^2 = 5 \longrightarrow 4 + z^2 = 5 \Rightarrow z^2 = 1 \end{array}$$

Como $y \neq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow z = -1$

Las matrices que buscamos serán:

$$\left.\begin{array}{l} y \cdot x = 4 \\ z = -1 \end{array}\right\} \quad y = \frac{4}{x} \text{ con } x \neq 0$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 4/x \\ x & -1 \end{pmatrix} \forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \right\}$$

* No era posible DETERMINAR valores concretos para x e y

14) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula los valores de x e y para que $A^2 + x \cdot A + y \cdot I_{2x2} = \theta_{2x2}$

16) Determina todas las matrices A de orden 2 antisi-métricas que verifiquen la condición $A^4 = 16 I$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2. Si A es antisimétrica, se tendrá que verificar que $A = -A^t$.

Por tanto:

$$A = -A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -a \\ b = -c \\ c = -b \\ d = -d \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 0 \\ \left.\right\} c = -b \ \forall b \\ d = 0 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \forall b$$

De todas ellas, veamos qué matrices A cumplen $A^4 = 16I$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = 16 I \Rightarrow \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow b^4 = 16 \begin{array}{l} \nearrow b = -2 \\ \searrow b = 2 \end{array}$$

Las matrices pedidas son $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

17) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula las matrices B tales que $A \cdot B = B \cdot A^t$

B será una matriz $B_{2x2} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = B \cdot A^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left. \begin{array}{l} \cancel{a}+c = \cancel{a}+b \\ \cancel{b}+d = 2a+\cancel{b} \\ 2a+\cancel{c} = \cancel{c}+d \\ 2b+\cancel{d} = 2c+\cancel{d} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} c=b \\ d=2a \\ d=2a \\ c=b \end{array} \right\}$$ Las matrices B que estamos buscando son

el conjunto de matrices $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix} \forall a,b \in \mathbb{R} \right\}$

18) Halla todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $M^2 - 2M = 3I$

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 - 2M = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2-2a & 2ab-2b \\ 2ab-2b & a^2+b^2-2a \end{pmatrix}$$

$$M^2-2M=3I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2-2a & 2ab-2b \\ 2ab-2b & a^2+b^2-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a^2+b^2-2a=3 \\ 2ab-2b=0 \end{aligned}\right\} \quad 2b(a-1)=0 \begin{cases} 2b=0 \Rightarrow b=0 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

opción 1:

$$b=0 \longrightarrow a^2-2a-3=0 \begin{cases} a=-1 \\ a=3 \end{cases}$$

Opción 2:

$$a=1 \longrightarrow 1+b^2-2=3 \Rightarrow b^2=4 \begin{cases} b=-2 \\ b=2 \end{cases}$$

Las matrices M pedidas son el conjunto dado por:

$$M=\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

19) Determina los valores de "m" para los cuales la matriz $X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2-4X+I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$X^2=X\cdot X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X^2-4X+I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2-4m+1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2-4m+1 = 1 \Rightarrow m^2-4m = 0 \Rightarrow m(m-4)=0 \begin{cases} m=0 \\ m=4 \end{cases}$$

20) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$, calcula los valores de "m" y "n" para los que se cumple $(I+A)^3 = mI+nA$

$$(I+A)^2 = (I+A)\cdot(I+A) = I+A+A+A^2 = A^2+2A+I$$

$$(I+A)^3 = (I+A)^2\cdot(I+A) = (A^2+2A+I)\cdot(I+A) =$$

$$= A^2+2A+I+A^3+2A^2+A = A^3+3A^2+3A+I$$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^3 = A^2\cdot A = -I\cdot A = -A$$

$$\Rightarrow (I+A)^3 = A^3+3A^2+3A+I = -A-3I+3A+I = 2A-2I$$

$$\left.\begin{array}{l} (I+A)^3 = -2I+2A \\ (I+A)^3 = mI+nA \end{array}\right\} \Rightarrow m=-2 \wedge n=2$$

21) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix}$, averiguar razonadamente si existe algún valor de "x" para el que se verifique $A^2 = A$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-x^2 & x \\ -x & -x^2+1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-x^2 & x \\ -x & -x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4-x^2 = 2 \\ x = x \\ -x = -x \\ -x^2+1 = -1 \end{array}\right\} x^2 = 2 \begin{array}{l} \nearrow x = -\sqrt{2} \\ \searrow x = +\sqrt{2} \end{array}$$

22) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n. Sabiendo que $A^2 = A$ y que $B = 2A - I$, averiguar qué matriz es B^2.

$$B^2 = B \cdot B \underset{B=2A-I}{=} (2A-I)\cdot(2A-I) = 4A^2 - 2A - 2A + I =$$

$$= 4A^2 - 4A + I \underset{A^2=A}{=} 4A - 4A + I = I$$

23) Encuentra todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que conmuten con la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De entre todas ellas determina aquella cuya soma de los elementos de la diagonal principal sea 5 y donde $a_{11} = -a_{12}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2d & 0 \\ 2a+5c & 2b+5d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2d & 2c+5d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \cancel{5a}+2c = \cancel{5a}+2b \\ \cancel{5b}+2d = 2a+\cancel{5b} \\ 2a+\cancel{5c} = \cancel{5c}+2d \\ 2b+\cancel{5d} = 2c+\cancel{5d} \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} b = c \\ a = d \end{matrix}$$

Las matrices de la forma dada que conmutan con la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son las del conjunto:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

De todas ellas:

- La suma de los elementos de la diagonal principal es 5 $\Rightarrow a+a+1=5 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$

- $a_{11}=-a_{12} \Rightarrow a=-b \Rightarrow b=-a=-2$

La matriz pedida es:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{41}

Vamos a calcular la potencia n-ésima de A por el método de inducción completa

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$$ Hipótesis

Comprobamos que se verifica para las potencias calculadas $n = \{1, 2, 3, 4\}$ y suponemos que se cumple hasta $n = n$.

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(n+1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n+2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n+2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}, \; n \in \mathbb{N}$$

En concreto, para $n = 41 \Longrightarrow A^{41} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 82 & 1 \end{pmatrix}$

Nota !! Si el enunciado no especifica que utilices el método de inducción COMPLETA, puedes dar como buena la primera hipótesis que das para A^n simplemente comprobando que se satisface para las potencias calculadas

25) De una matriz A sabemos que cumple que $A^2 = 2A - I$ Determina la expresión general de la potencia n-ésima de la matriz A.

$A^2 = 2A - I$

$A^3 = A^2 \cdot A = (2A - I) \cdot A = 2A^2 - A = 2(2A - I) - A =$

$= 4A - 2I - A = 3A - 2I$

$A^4 = A^3 \cdot A = (3A - 2I) \cdot A = 3A^2 - 2A = 3(2A - I) - 2A =$

$= 6A - 3I - 2A = 4A - 3I$

$A^5 = A^4 \cdot A = (4A - 3I) \cdot A = 4A^2 - 3A = 4(2A - I) - 3A =$

$= 8A - 4I - 3A = 5A - 4I$

Y por tanto, $A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I$ con $n \in \mathbb{N}$

26) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que A y B conmutan

b) Calcula A^n y B^n

a) A y B conmutan si se verifica que $A \cdot B = B \cdot A$. Veámoslo:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$$

$\Rightarrow$ A y B conmutan

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\Longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{N}$

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\Longrightarrow B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{N}$

27) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula todas las matrices B que conmutan con A

b) Calcula A^n

a) Buscamos todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \\ \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{r} a = a+b \\ b = b \\ a+c = c+d \\ b+d = d \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to b = 0 \\ \\ \to a = d \ \ \forall c \\ \to b = 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \ \forall a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

28) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) Todas las matrices B que conmutan con A

b) A^4 y A^n

a) Buscamos las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$

$$\left.\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3a+2b \\ c & 3c+2d \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} a+3c &= a \\ b+3d &= 3a+2b \\ c &= 2c \\ 2d &= 3c+2d \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow c = 0 \\ &\rightarrow b = 3d-3a \\ &\rightarrow c = 0 \\ &\rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3d-3a \\ 0 & d \end{pmatrix} \forall a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 45 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Tenemos la serie 3, 9, 21, 45, que se obtiene según:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3 + 2 \cdot 3 = 9 = 3 \cdot 3 \rightarrow 3 = 2^1 + 2^0$$
$$a_3 = 3 + 2 \cdot 9 = 21 = 3 \cdot 7 \rightarrow 7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$$
$$a_4 = 3 + 2 \cdot 21 = 45 = 3 \cdot 15 \rightarrow 15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

29) Considera las matrices $M=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $V=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula M^n

b) Todas las matrices M que cumplan que $M^{100}=V$

a) $M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$M^3=M^2\cdot M=\begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

$M^4=M^3\cdot M=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$

$M^5=M^4\cdot M=\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^5 & 5a^4b \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\Rightarrow M^n=\begin{pmatrix} a^n & n\cdot a^{n-1}\cdot b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ con $n\in\mathbb{N}$

b) $M^{100}=V \Rightarrow \begin{pmatrix} a^{100} & 100\cdot a^{99}\cdot b \\ 0 & a^{100} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a^{100}=1 \\ 100\cdot a^{99}\cdot b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a^{100} = 1 \begin{cases} \nearrow a = -1 \\ \searrow a = 1 \end{cases} \; ; \; 100 \cdot a^{99} \cdot b = 1 \begin{cases} \xrightarrow{a=-1} b = -1/100 \\ \xrightarrow{a=1} b = 1/100 \end{cases}$$

Las matrices pedidas son:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1/100 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1/100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

30) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, determina:

a) Las constantes m y n tales que $A^2 = m \cdot A + n I$

b) La potencia A^5 utilizando exclusivamente la expresión calculada en el apartado anterior.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$A^2 = mA + nI \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = m + n \\ -1 = m \\ -1 = m \\ 5 = -2m + n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} m = -1 \\ \quad \hookrightarrow 2 = -1 + n \Rightarrow n = 3 \\ \quad \hookrightarrow 5 = 2 + n \Rightarrow n = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow m = -1 \wedge n = 3$$

$$\Rightarrow A^2 = -A + 3I$$

b) $A^5 = A^2 \cdot A^2 \cdot A = (-A+3I)\cdot(-A+3I)\cdot A =$

$= (-A+3I)\cdot(-A^2+3A) = (-A+3I)\cdot(A-3I+3A) =$

$= (-A+3I)\cdot(4A-3I) = -4A^2+3A+12A-9I =$

$= -4A^2+15A-9I = -4(-A+3I)+15A-9I =$

$= 4A-12I+15A-9I = 19A-21I$

$$\Rightarrow A^5 = 19A-21I = \begin{pmatrix} 19 & 19 \\ 19 & -38 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$$

31) Una matriz cuadrada es NILPOTENTE de grado K si existe K para el cual A^K es la matriz nula, siendo $A^{K-1} \neq \theta$. Comprueba que la siguiente matriz es nilpotente y di de qué grado lo es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como vemos, $A^2 = \theta_{3\times3}$ sin serlo A. La matriz A es nilpotente de grado 2.

32) Calcular por inducción A^n, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

33) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2, A^3, A^4 y A^5

b) Expresa A^{2n} en función de $I_{2\times2}$

a) $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 32 \\ -32 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Como puedes ver, las potencias pares son matrices escalares y se pueden escribir en función de la matriz identidad:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -4I = -2^2 \cdot I$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = 16 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 16I = 2^4 \cdot I$$

$$A^{2n} = (-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot I \quad n = 1, 2, \dots$$

34) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Comprobar que $A^3 + I = \theta$

b) Calcular A^7 y A^{1000}

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$\Rightarrow A^3 + I = (-I) + I = \theta_{3\times3}$ como queríamos demostrar

b) Siempre que calculando potencias de una matriz llegues a una matriz "conocida" (aquí hemos llegado a que $A^3 = -I$), debes calcular la potencia que te pidan en función de la potencia conocida. Así:

$$A^7 = (A^3)^2 \cdot A = (-I)^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{1000} = (A^3)^{333} \cdot A = (-I)^{333} \cdot A = -I \cdot A = -A$$

35) Calcular por inducción A^n, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El término a_{13} de estas potencias siguen la serie:

$1, 3, 6, 10, \dots$ de término general $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Por tanto:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

36) Encontrar por inducción completa la matriz A^n

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{N}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/n & 1/n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/n & 1/n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{n} & \frac{2}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{n} & \frac{2}{n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{n} & \frac{3}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{n} & \frac{3}{n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{n} & \frac{4}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{n}{n} & \frac{n}{n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Hipótesis}$$

Comprobamos que se verifica para las potencias calculadas $n = \{1, 2, 3, 4\}$ y suponemos que se cumple hasta $n = n$.

$$\text{Hipótesis} \quad A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{n+1}{n} & \frac{n+1}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/n & 1/n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{n+1}{n} & \frac{n+1}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

37) Encontrar por inducción completa la matriz A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix} = 3^{n-1} \cdot A \quad \text{Hipótesis}$$

Comprobamos que se verifica para las potencias calculadas $n = \{1, 2, 3, 4\}$ y suponemos que se cumple hasta $n=n$.

Hipótesis: $A^{n+1} = 3^{(n+1)-1} \cdot A = 3^n \cdot A$

Comprobación:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = 3^{n-1} \cdot A \cdot A = 3^{n-1} \cdot A^2 = 3^{n-1} \cdot 3A =$$

$$= 3^{n-1+1} \cdot A = 3^n \cdot A$$

$$\Longrightarrow A^n = 3^{n-1} \cdot A \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

38) Calcula la inversa de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Dado que se trata de matrices 2x2, podemos practicar el método de la definición

$$\boxed{X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I}$$

DEFINICIÓN DE MATRIZ INVERSA

$A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a - c = 1 \\ 4a + 3c = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times 3} \left.\begin{array}{l} 6a - 3c = 3 \\ 4a + 3c = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1 + E_2} 10a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{10}$$

$$c = -\frac{4a}{3} = \frac{-4 \cdot \cancel{3}/10}{\cancel{3}} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2b - d = 0 \\ 4b + 3d = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times 3} \left.\begin{array}{l} 6b - 3d = 0 \\ 4b + 3d = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1 + E_2} 10b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{10}$$

$$d = 2b = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+5c & 3b+5d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3a + 5c = 1 \\ 2a + 3c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times 3} \end{array} \left.\begin{array}{l} -6a - 10c = -2 \\ 6a + 9c = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1 + E_2} -c = -2 \Rightarrow c = 2$$

$$a = -\frac{9c}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} 3b + 5d = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times 3} \end{array} \left.\begin{array}{l} -6b - 10d = 0 \\ 6b + 9d = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1 + E_2} -d = 3 \Rightarrow d = -3$$

$$b = -\frac{10}{6} \cdot d = \frac{30}{6} = 5$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot C^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+3c & 5b+3d \\ 7a+4c & 7b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5a+3c=1 \\ 7a+4c=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 4} 20a+12c=4 \\ \xrightarrow{\times(-3)} -21a-12c=0 \end{array} \Bigg\} \xrightarrow{E_1+E_2} -a=4 \Rightarrow a=-4$$

$$c = \frac{-21a}{12} = \frac{-21\cdot(-4)}{12} = 7$$

$$\left.\begin{array}{l} 5b+3d=0 \\ 7b+4d=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 4} 20b+12d=0 \\ \xrightarrow{\times(-3)} -21b-12d=-3 \end{array} \Bigg\} \xrightarrow{E_1+E_2} -b=-3 \Rightarrow b=3$$

$$d = \frac{-20b}{12} = \frac{-60}{12} = -5$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

39) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$. calcula $(A^2)^{-1} + (A^{-1})^2$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 18 \\ -72 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^2\cdot(A^2)^{-1}=I$$

$$\begin{pmatrix}20 & 18\\ -72 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}20a+18c & 20b+18d\\ -72a-7c & -72b-7d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}20a+18c=1\\ -72a-7c=0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\times 7\rightarrow & 140a+126c=7\\ \times 18\rightarrow & -1296a-126c=0\end{matrix}\left.\right\}E_1+E_2\rightarrow -1156a=7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{-7}{1156} \dashrightarrow c=\frac{72a}{-7}=\frac{18}{289}$$

$$\left.\begin{matrix}20b+18d=0\\ -72b-7d=1\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\times 7\rightarrow & 140b+126d=0\\ \times 18\rightarrow & -1296b-126d=18\end{matrix}\left.\right\}E_1+E_2\rightarrow -1156b=18\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{-9}{578} \dashrightarrow d=\frac{-20b}{18}=\frac{5}{289}$$

$$\Rightarrow (A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-7}{1156} & \frac{-9}{578}\\ \frac{18}{289} & \frac{5}{289}\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=I$$

$$\begin{pmatrix}6 & 2\\ -8 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6a+2c & 6b+2d\\ -8a+3c & -8b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6a+2c=1 \xrightarrow{\times(-3)} -18a-6c=-3 \\ -8a+3c=0 \xrightarrow{\times(2)} -16a+6c=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} -34a=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{3}{34} \dashrightarrow c=\frac{8a}{3}=\frac{4}{17}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6b+2d=0 \xrightarrow{\times(-3)} -18b-6d=0 \\ -8b+3d=1 \xrightarrow{\times(2)} -16b+6d=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} -34b=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{-1}{17} \dashrightarrow d=-\frac{6b}{2}=-3b=\frac{3}{17}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{34} & -\frac{1}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})^2=A^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{34} & -\frac{1}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{34} & -\frac{1}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-7}{1156} & \frac{-9}{578} \\ \frac{18}{289} & \frac{5}{289} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^2)^{-1}+(A^{-1})^2=\begin{pmatrix} \frac{-7}{1156} & \frac{-9}{578} \\ \frac{18}{289} & \frac{5}{289} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{-7}{1156} & -\frac{9}{578} \\ \frac{18}{289} & \frac{5}{289} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-7}{578} & \frac{-9}{289} \\ \frac{36}{289} & \frac{10}{289} \end{pmatrix}$$

Nota: Como has visto, se ha cumplido que $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$.

Como ejercicio, puedes tratar de demostrar que $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

40) Calcular por el método de Gauss-Jordan la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_2]{F_1+F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_2]{F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_3+3F_2]{-2F_1+F_2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -11 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[11F_3+F_1]{7F_3+F_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 & 34 & -22 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 22 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{-\frac{1}{2}F_1}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -17 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_3]{3F_2+F_1}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_3+F_1]{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3]{-F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-F_1+F_3 \\ -2F_1+F_4}]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_4']{F_2 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2+F_3]{-2F_3+F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 7 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_3]{\substack{-6F_4+F_1 \\ 4F_4+F_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 13 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -6 & -1 \\ -8 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1+F_4]{F_1+F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-2F_3+F_2]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_3]{\substack{F_1+F_3 \\ F_2+F_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{-F_4+F_1 \\ -4F_4+F_2 \\ -2F_4+F_3}]{}\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-F_1 \\ 1/2\,F_2 \\ -F_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

41) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1} y B^{-1}

b) Calcula $(A \cdot B)^{-1}$

c) Comprueba que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-3c & b-3d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} a-3c=1 \\ c=0 \end{array}\right\} a=1 \wedge c=0 \qquad \left.\begin{array}{r} b-3d=0 \\ d=1 \end{array}\right\} b=3d=3 \wedge d=1$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B \cdot B^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3a+4c & -3b+4d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -3a+4c=1 \\ a=0 \end{array}\right\} c=\frac{1}{4} \wedge a=0 \qquad \left.\begin{array}{r} -3b+4d=0 \\ b=1 \end{array}\right\} d=\frac{3}{4} \wedge b=1$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(AB)\cdot(AB)^{-1}=I$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6a+4c & -6b+4d \\ a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -6a+4c=1 \\ a=0 \end{array}\right\} c=\frac{1}{4} \wedge a=0 \qquad \left.\begin{array}{r} -6b+4d=0 \\ b=1 \end{array}\right\} b=1 \wedge d=\frac{6b}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$$

c) $B^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 3/2 \end{pmatrix}$

Efectivamente $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

42) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ calcula:

a) A^{-1} y $(A^t)^{-1}$

b) Comprueba que $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3a-4c & -3b-4d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -3a-4c=1 \\ 2a+3c=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times 2 \rightarrow \\ \times 3 \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} -6a-8c=2 \\ 6a+9c=0 \end{array}\right\} E_1+E_2 \rightarrow c=2$$

$$\dashrightarrow a = -\frac{3c}{2} = -3$$

$$\left.\begin{array}{r} -3b-4d=0 \\ 2b+3d=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times 2 \rightarrow \\ \times 3 \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} -6b-8d=0 \\ 6b+9d=3 \end{array}\right\} E_1+E_2 \rightarrow d=3$$

$$\dashrightarrow -3b = 4d \Rightarrow b = \frac{4d}{-3} = -4$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$A^t \cdot (A^t)^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3a+2c & -3b+2d \\ -4a+3c & -4b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -3a+2c=1 \\ -4a+3c=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times 3 \rightarrow \\ \times -2 \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} -9a+6c=3 \\ 8a-6c=0 \end{array}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -a=3 \Rightarrow a=-3$$

$$\dashrightarrow 3c = 4a \Rightarrow c = \frac{4a}{3} = -4$$

$$\left.\begin{array}{l} -3b+2d=0 \\ -4b+3d=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 3} \\ \xrightarrow{\times -2} \end{array} \left.\begin{array}{l} -9b+6d=0 \\ 8b-6d=-2 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} -b=-2 \Rightarrow b=2$$

$$2d = 3b \Rightarrow d = \frac{3b}{2} = 3$$

$$\Rightarrow (A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Como ves, efectivamente $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

43) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que A^3 es la matriz nula

b) Demuestra que la matriz (A^2+A+I) y la matriz $(I-A)$ son inversas una de la otra.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Recuerda que se llama inversa de una matriz X y se simboliza por X^{-1} a aquella matriz que verifica $X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I$.

Es decir, que el producto de una matriz por su inversa nos da la matriz identidad.

Veamos que da el producto de las matrices que nos han dado:

$$(A^2+A+I)\cdot(I-A) = \cancel{A^2}+\cancel{A}+I-A^3-\cancel{A^2}-\cancel{A} =$$

$$= I - A^3 \underset{A^3=\Theta}{=} I$$

Por lo que podemos asegurar que las matrices (A^2+A+I) y $(I-A)$ son inversas una de la otra.

44) Determina todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que $A^{-1} = 2I - A$

Recuerda la definición de matriz inversa:

$$A \cdot A^{-1} = I \xRightarrow[A^{-1}=2I-A]{} A\cdot(2I-A) = I \Rightarrow 2A - A^2 = I$$

Buscamos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ que verifiquen $2A-A^2=I$

Así:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+cb & ba+c^2 \end{pmatrix}$$

$$2A - A^2 = I$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 2b & 2c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+cb & ba+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -ab & -ac \\ -cb & 2c-ba+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a\cdot b = 1 \\ -a\cdot c = 0 \\ -c\cdot b = 0 \\ 2c-ba+c^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow a\neq 0 \wedge b\neq 0 \\ \longrightarrow \text{Como } a\neq 0 \Rightarrow c=0 \\ \\ \longrightarrow \text{Como } c=0 \Rightarrow -ab=1 \Rightarrow b=-\frac{1}{a} \end{array}$$

Las matrices buscadas son:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \forall a\neq 0 \in \mathbb{R} \right\}$$

45) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, y que la inversa de la matriz $A\cdot B$ es $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, determina la matriz B

Puedes partir de la definición de matriz inversa:

$$A\cdot B\cdot(AB)^{-1}=I \Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}B(AB)^{-1}=A^{-1}\cdot I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\cdot(AB)^{-1}=A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+5b & 4a+3b \\ 2c+5d & 4c+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a+5b=1 \\ 4a+3b=2 \end{array}\right\} \times(-2) \quad \left.\begin{array}{r} -4a-10b=-2 \\ 4a+3b=2 \end{array}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -7b=0 \Rightarrow b=0$$

$$\dashrightarrow 2a+5\cancel{b}^{\,b=0}=1 \Rightarrow a=1/2$$

$$\left.\begin{array}{l} 2c+5d=2 \\ 4c+3d=1 \end{array}\right\} \times(-2) \quad \left.\begin{array}{r} -4c-10d=-4 \\ 4c+3d=1 \end{array}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -7d=-3 \Rightarrow d=\frac{3}{7}$$

$$\dashrightarrow c=\frac{1-3d}{4}=\frac{1-9/7}{4}=-\frac{1}{14}$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/14 & 3/7 \end{pmatrix}$$

46) Si una matriz cuadrada verifica que $A^2=2A+3I$

a) obtener la expresión de A^{-1} en función de A y de I

b) obtener todas las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que cumplen $A^2=2A+3I$

a) $A^2 = 2A + 3I$

$$A^2 - 2A = 3I \Rightarrow \frac{1}{3}(A^2 - 2A) = I \Rightarrow \frac{1}{3} A \cdot (A - 2I) = I$$

$$\Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I\right) = I \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I$$

y como:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & 2yx \\ 2yx & x^2+y^2 \end{pmatrix}$

$A^2 = 2A + 3I$

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2 & 2yx \\ 2yx & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2-2x & 2yx-2y \\ 2yx-2y & x^2+y^2-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-2x &= 3 \\ 2yx-2y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 2y(x-1) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Opción 1: $y = 0$:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Opción 2: $x=1$:

$$1+y^2-2=3 \Rightarrow y^2=4 \begin{cases} \rightarrow y=-2 \\ \rightarrow y=+2 \end{cases}$$

Las matrices que buscamos son las del conjunto:

$$A=\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

47) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ a & b & c \end{pmatrix}$, calcula:

a) Las constantes a, b y c para que se cumpla que $A^t = A^{-1}$

b) La matriz A^4 para los valores de a, b y c obtenidos

a) Como $A\cdot A^{-1}=I$, si $A^{-1}=A^t$ entonces $A\cdot A^t = I$. Así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1/\sqrt{2} & b \\ 0 & 1/\sqrt{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(b+c) \\ a & \frac{1}{\sqrt{2}}(b+c) & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} a = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(b+c) = 0 \\ a^2+b^2+c^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to b+c=0 \to c=-b \\ \\ \to b^2+(-b)^2 = 1 \Rightarrow 2b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\nearrow b = -1/\sqrt{2} \Rightarrow c = 1/\sqrt{2}$$

$$\searrow b = 1/\sqrt{2} \Rightarrow c = -1/\sqrt{2}$$

Las posibles matrices A son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ o bien } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

b) Opción 1:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Opción 2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I$$

48) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = 2I$

b) Calcula A^{-1}

c) Halla A^{12} y la inversa de A^{12}

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$

b) Como $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow$

$$A^2 = 2I \Rightarrow A \cdot A = 2I \Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{2} A\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} A$$

c) $A^{12} = (A^2)^6 = (2I)^6 = 2^6 \cdot I$

$$A^{12} \cdot (A^{12})^{-1} = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{2^6 \cdot I}_{A^{12}} \cdot (A^{12})^{-1} = I \Rightarrow (A^{12})^{-1} = \frac{1}{2^6} \cdot I$$

49) Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3F_1+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -22 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+F_3]{-4F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -15 & 15 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[7F_2+15F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rg(C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_3+F_1]{2F_2+F_1} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & -7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+F_3]{} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rg(D) = 2$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2+F_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rg(E) = 2$$

50) Calcular en función de "t" el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & t\\ 4 & -2 & -6 & -8\\ 2 & -1 & -3 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1+F_3]{2F_1+F_2}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & t\\ 0 & 0 & 0 & 2t-8\\ 0 & 0 & 0 & t-4\end{pmatrix}\xrightarrow[-2F_3+F_2]{}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & t\\ 0 & 0 & 0 & 2t-8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}2t-8=0\\ t=\frac{8}{2}=4\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } t=4\Rightarrow rg(A)=1\\ \text{Si } t\neq 4\Rightarrow rg(A)=2\end{cases}$$

51) Basándote en el estudio del rango de la matriz, averigua para qué valores de "t" existe la matriz inversa de A, siendo

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & -3\\ -4 & -4 & 2t\end{pmatrix}$$

Recuerda que una matriz cuadrada de orden "n" es invertible cuando su rango es "n"

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & -3\\ -4 & -4 & 2t\end{pmatrix}\xrightarrow[-4F_1+F_3]{3F_1+F_2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & -8 & 2t-4\end{pmatrix}\xrightarrow[8F_2+6F_3]{}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 12t-24\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}12t-24=0\\ t=2\end{matrix}\Longrightarrow\begin{cases}\text{Si } t=2\Rightarrow rg(A)=2\Rightarrow \nexists A^{-1}\\ \text{Si } t\neq 2\Rightarrow rg(A)=3\Rightarrow \exists A^{-1}\end{cases}$$

52) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calcula el rango de la matriz A^n. ¿Depende el rango de n?

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3\cdot A = \begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -4 & 10\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Longrightarrow A^n = \begin{pmatrix}1 & -n & \frac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & -n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Como has podido comprobar, todas las potencias de A calculadas son matrices escalonadas en las que vemos que el rango es 3 independientemente de la potencia considerada. Esto es:

$$rg(A^n) = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

53) Calcular los valores de a, b y c para que $rg(A)=1$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ a & b+2 & 3 & -3c \end{pmatrix}$$

Dado que esta matriz tiene únicamente dos vectores fila, si queremos que sea $rg(A)=1$, dichos vectores tienen que ser linealmente dependientes. Es decir, deben ser proporcionales. Así:

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{b+2}=\frac{-3}{3}=\frac{-1}{3c}$$

$\hookrightarrow \frac{2}{a}=-1 \Rightarrow a=-2$

$\hookrightarrow \frac{1}{b+2}=-1 \Rightarrow b+2=-1 \Rightarrow b=-3$

$\hookrightarrow \frac{-1}{3c}=-1 \Rightarrow 3c=1 \Rightarrow c=1/3$

54) Dada una matriz diagonal A invertible, demostrar que A^{-1} es una matriz diagonal

Una matriz diagonal es:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Como además es invertible sabemos que tiene que tener $rg(A)=n$, y por tanto, todos los elementos a_{ii} serán $a_{ii}\neq 0 \ \forall i\in \mathbb{N}$

Ahora, apliquemos la definición de matriz inversa:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

De ahí vamos a obtener "n" ecuaciones en las que

$$a_{ii} \cdot b_{ii} = 1 \Rightarrow b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Con lo que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

que efectivamente es una matriz diagonal como queríamos demostrar.

55) Demostrar que si A es una matriz simétrica invertible entonces A^{-1} también es simétrica.

Sabemos que A es simétrica $\Rightarrow A^t = A$

Sabemos también que A es invertible y por tanto existe la matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I$. Ese será nuestro punto de partida. Así:

$$A\cdot A^{-1}=I \xRightarrow{\;} (A\cdot A^{-1})^t = I^t \xRightarrow{\;} (A^{-1})^t\cdot A^t = I$$

transponemos ambos lados

Propiedades transposición:
$(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$
I es simétrica $\Rightarrow I^t = I$

$$\Rightarrow (A^{-1})^t\cdot A = I \Rightarrow (A^{-1})^t\cdot \underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I} = I\cdot A^{-1} \Rightarrow$$

A es simétrica: $A^t = A$

A es invertible y existe A^{-1}

$\Rightarrow (A^{-1})^t = A^{-1} \Rightarrow$ Como ves, al ser igual que su transpuesta, la matriz inversa de A, A^{-1}, es una matriz simétrica como queríamos demostrar.

56) Una matriz cuadrada A es INVOLUTIVA si se verifica que $A^2 = I$

a) Demuestra que si A es involutiva, entonces $A^{-1} = A$

b) Comprueba que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ es involutiva

a) Si $A^2 = I \Rightarrow A\cdot A = I$

Por otro lado, por definición A^{-1} es la única que verifica que $A\cdot A^{-1} = I$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot A = I \\ A\cdot A^{-1} = I \end{array}\right\} \; A^{-1} = A$$

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Como $A^2 = I$, efectivamente A es involutiva

57) Una matriz cuadrada A es IDEMPOTENTE si se verifica que $A^2 = A$.
Comprueba que $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ es idempotente. ¿Es invertible?

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = A$

Efectivamente, resulta que $A^2 = A \Rightarrow$ A es idempotente

Estudiemos su rango

$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5F_1+2F_3]{-3F_1+2F_2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1$

Como $rg(A) = 1 < 3 \Rightarrow$ A no es invertible ($\nexists A^{-1}$)

58) Una matriz cuadrada A es ORTOGONAL si se verifica que $A \cdot A^t = I$

a) Comprobar que si A es ortogonal, entonces $A^{-1} = A^t$

b) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

a) La demostración es inmediata

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ ortogonal} \Rightarrow A\cdot A^t = I \\ \text{Definición inversa} \Rightarrow A\cdot A^{-1} = I \end{array}\right\} \Rightarrow A^t = A^{-1}$$

b) A será ortogonal si $A\cdot A^t = I$. Veámoslo:

$$A^t = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow \text{Como } A\cdot A^t = I \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ A es ortogonal

59) Dadas A y B dos matrices de orden "n" y ortogonales. Demuestra que la matriz producto $A\cdot B$ es también una matriz ortogonal.

A es una matriz ortogonal $\Rightarrow A^{-1} = A^t$

B es una matriz ortogonal $\Rightarrow B^{-1} = B^t$

$$AB\cdot(AB)^{-1}=I \Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}B(AB)^{-1}=A^{-1}\cdot I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\cdot(AB)^{-1}=A^{-1} \Rightarrow \underbrace{B^{-1}\cdot B}_{I}\cdot(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1} \xRightarrow[\text{A y B son ortogonales}]{} (AB)^{-1}=B^{t}\cdot A^{t} \xRightarrow[\text{Propiedades transposición}]{}$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1}=(AB)^{t} \Rightarrow (AB) \text{ es ortogonal}$$

60) Despeja la matriz X en las siguientes ecuaciones matriciales (suponer que existen todas las matrices inversas que necesites para despejar)

a) $AX=B$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

b) $XA=B$

$$X\underbrace{AA^{-1}}_{I}=B\cdot A^{-1} \Rightarrow X=B\cdot A^{-1}$$

c) $XB+A=C^{t}$

$$XB=C^{t}-A$$

$$X\underbrace{BB^{-1}}_{I}=(C^{t}-A)\cdot B^{-1} \Rightarrow X=(C^{t}-A)\cdot B^{-1}$$

d) $BX + 2X = A$

$$(B+2I)\cdot X = A$$

$$\underbrace{(B+2I)^{-1}\cdot(B+2I)}_{I}\cdot X = (B+2I)^{-1}\cdot A \Rightarrow X = (B+2I)^{-1}\cdot A$$

e) $A^{-1}\cdot X = A$

$$\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I}X = A\cdot A \Rightarrow X = A^2$$

f) $AXA^{-1} = B+C$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}X\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I} = A^{-1}(B+C)A \Rightarrow X = A^{-1}(B+C)A$$

g) $(A+B)X = C$

$$\underbrace{(A+B)^{-1}\cdot(A+B)}_{I}X = (A+B)^{-1}C \Rightarrow X = (A+B)^{-1}\cdot C$$

h) $AX + BX = CX + A^t$

$$AX + BX - CX = A^t$$

$$(A+B-C)X = A^t$$

$$\underbrace{(A+B-C)^{-1}\cdot(A+B-C)}_{I}\cdot X = (A+B-C)^{-1}\cdot A^t$$

$$\Rightarrow X = (A+B-C)^{-1}\cdot A^t$$

61) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Calcula la matriz X que verifica $AX = C^t + B$

$$AX = C^t + B$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}(C^t+B) \Rightarrow X = A^{-1}\cdot(C^t+B)$$

$$A\cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a-2c & b-2d\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}a-2c&=1\\ c&=0\end{aligned}\right\} c=0 \wedge a=1 \qquad \left.\begin{aligned}b-2d&=0\\ d&=1\end{aligned}\right\} d=1 \wedge b=2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$C^t + B = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot(C^t+B) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

62) Calcula la matriz X que verifica $AX - B = 2X$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

$$AX - B = 2X \Rightarrow AX - 2X = B \Rightarrow (A-2I)X = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A-2I)^{-1}(A-2I)}_{I} \cdot X = (A-2I)^{-1} \cdot B \Rightarrow X = (A-2I)^{-1} \cdot B$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I) \cdot (A-2I)^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4a+c & -4b+d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -4a+c = 1 \\ a = 0 \end{array}\right\} a = 0 \wedge c = 1 \qquad \left.\begin{array}{r} -4b+d = 0 \\ b = 1 \end{array}\right\} b = 1 \wedge d = 4$$

$$\Rightarrow (A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = (A-2I)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}$$

63) Resuelve la ecuación matricial $XA = XB - A^t$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$XA = XB - A^t \Rightarrow XA - XB = -A^t \Rightarrow X(A-B) = -A^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(B-A) = A^t \Rightarrow X \underbrace{(B-A)(B-A)^{-1}}_{I} = A^t (B-A)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A^t (B-A)^{-1}$$

$$B-A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa por Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Permutaciones}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_3]{-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^t \cdot (B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

64) Encuentra la matriz X que verifica la ecuación

$AXA = 2BA$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X\underbrace{AA^{-1}}_{I} = A^{-1} \cdot 2B\underbrace{AA^{-1}}_{I} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot 2B$$

$A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+5c & 3b+5d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 3a+5c=1 \\ a+2c=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\times(-3)} \end{matrix} \left.\begin{matrix} 3a+5c=1 \\ -3a-6c=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} -c=1 \Rightarrow c=-1$$

$$\dashrightarrow a = -2c = -2\cdot(-1) = 2$$

$$\left.\begin{matrix} 3b+5d=0 \\ b+2d=1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\times(-3)} \end{matrix} \left.\begin{matrix} 3b+5d=0 \\ -3b-6d=-3 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} -d=-3 \Rightarrow d=3$$

$$\dashrightarrow b = 1-2d = 1-6 = -5$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot 2B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -28 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$$

65) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra la inversa A^{-1}

b) Utiliza A^{-1} para resolver la ecuación:

$$AX + CB^t = B \cdot B^t$$

a) $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a+c=1 \\ 3a+2c=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{l} -4a-2c=-2 \\ 3a+2c=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} -a=-2 \Rightarrow a=2$$

$$c = -\frac{3a}{2} = \frac{-3\cdot 2}{2} = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} 2b+d=0 \\ 3b+2d=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{l} -4b-2d=0 \\ 3b+2d=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} -b=1 \Rightarrow b=-1$$

$$d = -2b = -2\cdot(-1) = 2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $AX + C\cdot B^t = B\cdot B^t$

$$AX = B\cdot B^t - C\cdot B^t = (B-C)B^t$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}(B-C)\cdot B^t \Rightarrow X = A^{-1}(B-C)B^t$$

$$B-C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B-C)B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}\cdot(B-C)\cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

66) Resuelve la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X + B = C$$

$$AX = C - B \Rightarrow \underbrace{A^{-1} A}_{I} X = A^{-1}(C-B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C-B)$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3a+c & -3b+d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -3a+c = 1 \\ -a = 0 \end{array}\right\} a = 0 \wedge c = 1 \qquad \left.\begin{array}{r} -3b+d = 0 \\ -b = 1 \end{array}\right\} b = -1 \wedge d = -3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C-B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 & -3 \\ -1 & 20 & -12 & -11 \end{pmatrix}$$

67) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones matriciales:

a)
$$\left.\begin{array}{l} 2A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 21 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ A - 2B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -7 & -1 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \times(-2) \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 2A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 21 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ -2A + 4B = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 14 \\ 14 & 2 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$E_1+E_2 \rightarrow 7B=\begin{pmatrix}-14 & 7 & 35\\ 21 & 7 & -7\end{pmatrix} \Rightarrow B=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-14 & 7 & 35\\ 21 & 7 & -7\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -7\\ -7 & -1 & 6\end{pmatrix}+2B=\begin{pmatrix}5 & -2 & -7\\ -7 & -1 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 2 & 10\\ 6 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 4X+3Y=\begin{pmatrix}-7 & 4 & -6\\ 10 & -1 & 23\end{pmatrix}\\ 3X-2Y=\begin{pmatrix}-18 & 3 & 4\\ -1 & -5 & -4\end{pmatrix}\end{array}\right\} \begin{array}{l} \times(2) \quad 8X+6Y=\begin{pmatrix}-14 & 8 & -12\\ 20 & -2 & 46\end{pmatrix}\\ \times(3) \quad 9X-6Y=\begin{pmatrix}-54 & 9 & 12\\ -3 & -15 & -12\end{pmatrix}\end{array}$$

$$E_1+E_2 \rightarrow 17X=\begin{pmatrix}-68 & 17 & 0\\ 17 & -17 & 34\end{pmatrix} \Rightarrow X=\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix}-68 & 17 & 0\\ 17 & -17 & 34\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$Y=\frac{1}{3}\cdot\left[\begin{pmatrix}-7 & 4 & -6\\ 10 & -1 & 23\end{pmatrix}-4X\right]=\frac{1}{3}\cdot\left[\begin{pmatrix}-7 & 4 & -6\\ 10 & -1 & 23\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-16 & 4 & 0\\ 4 & -4 & 8\end{pmatrix}\right]$$

$$Y=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}9 & 0 & -6\\ 6 & 3 & 15\end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

c) $$\left.\begin{aligned} 2A+3B &= \begin{pmatrix} 11 & 0 & 10 \\ -8 & 7 & -1 \end{pmatrix} \\ A-B &= \begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \times 3 \quad \left.\begin{aligned} 2A+3B &= \begin{pmatrix} 11 & 0 & 10 \\ -8 & 7 & -1 \end{pmatrix} \\ 3A-3B &= \begin{pmatrix} -6 & -15 & 15 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$E_1+E_2 \rightarrow 5A = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 25 \\ -5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -15 & 25 \\ -5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

68) Encuentra las matrices A y B que cumplen con el sistema de ecuaciones dado por:

$$\left.\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A^2-AB+BA-B^2 &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Fíjate en lo siguiente:

$$\underbrace{(A+B)}_{\text{Esta matriz la conocemos}}(A-B) = \underbrace{A^2-AB+BA-B^2}_{\text{Esta matriz la conocemos}}$$

Y entonces tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot (A-B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{I} \cdot (A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa por Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_3+F_1]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_3]{F_2+F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-F_2 \\ \frac{1}{4}F_3}]{\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

Con lo que se tiene que:

$$A-B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escribimos un nuevo sistema mucho más sencillo:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix} \\ \\ A-B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&-2&0\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array}\right\} \quad E_1+E_2 \quad 2A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&2&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}-A=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

69) Sean A, B, y C las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&-4\\-2&-1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}6&7\\-2&-5\end{pmatrix}$$

Encuentra las matrices X e Y que cumplen:

$$\left.\begin{array}{r} AX+BY=C \\ AX=Y\end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} Y+BY=C \\ (I+B)Y=C \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(I+B)^{-1}\cdot(I+B)}_{I}\,Y=(I+B)^{-1}\cdot C \Rightarrow Y=(I+B)^{-1}\cdot C$$

$$I+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-4\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\-2&0\end{pmatrix}$$

$$(I+B)\cdot(I+B)^{-1}=I$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-4c & 2b-4d \\ -2a & -2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2a-4c&=1 \\ -2a&=0 \end{aligned}\right\} a=0 \wedge c=-\frac{1}{4} \qquad \left.\begin{aligned} 2b-4d&=0 \\ -2b&=1 \end{aligned}\right\} b=-\frac{1}{2} \wedge d=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (I+B)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y=(I+B)^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Y sabiendo Y:

$$AX=Y \Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}X=A^{-1}\cdot Y \Rightarrow X=A^{-1}\cdot Y$$

$$A\cdot A^{-1}=I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a+2c&=1 \\ -a&=0 \end{aligned}\right\} a=0 \wedge c=1/2 \qquad \left.\begin{aligned} b+2d&=0 \\ -b&=1 \end{aligned}\right\} b=-1 \wedge d=1/2$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}\cdot Y=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

70) Encuentra una matriz X de orden 2 que cumpla $A+X = AX+XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

En esta ecuación, no se puede despejar X. Lo que haremos será efectuar las operaciones indicadas y despejar los elementos de la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que estamos buscando. Así:

$$A + X = AX + XA$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b+1 \\ 1+c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b+1 \\ 1+c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+b & d+a \\ a+d & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = c+b \\ b+1 = d+a \\ c+1 = d+a \\ d = b+c \end{array}\right\} > b = c \quad a = d$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2c \\ 2a = c+1 \end{array}\right\} \times(-2) \quad \left.\begin{array}{l} -2a = -4c \\ 2a = c+1 \end{array}\right\} E_1 + E_2 \quad 0 = -3c+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 2c = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

71) Resuelve la ecuación matricial $XA + AX = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

En esta ecuación, no se puede despejar X. Procede-remos igual que en el ejercicio anterior. Así:

$$XA + AX = B$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -a+2b \\ c & -c+2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a-c & -a+3b-d \\ 3c & -c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a-c=0 \\ -a+3b-d=-2 \\ 3c=1 \\ -c+4d=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow a = \frac{c}{2} \xRightarrow[c=1/3]{} a = 1/6 \\ \longrightarrow 3b = -2+a+d \Rightarrow b = \frac{-2+a+d}{3} = -\frac{1}{2} \\ \longrightarrow c = 1/3 \\ \longrightarrow d = \frac{1+c}{4} \xRightarrow[c=1/3]{} d = \frac{1+1/3}{4} = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$