1) Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$

2) Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

3) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

calcula $\det(A \cdot B)$ y $\det(B \cdot A)$

4) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula el determinante de la matriz $A - A^t$

5) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 26$; b) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 3x & -3 \end{vmatrix} = 45$; c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{-2}{x} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7$

d) $\begin{vmatrix} x & 3x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 32$; e) $\begin{vmatrix} \sqrt{x} & 2 \\ 2 & \sqrt{x-6} \end{vmatrix} = 0$; f) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}x & \cos x \\ \cos x & \operatorname{sen}x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

6) Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y que $\det(A) = 4$, calcula:

a) $\det(-3A^t)$; b) $\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix}$

7) Siendo $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$

a) Calcula el determinante de las matrices $2A$, A^t y A^{-1}

b) Resuelve la ecuación $\det(A) = 0$

8) Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, calcula el valor de:

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

9) Calcula sin aplicar Sarrus el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} K & x & 1+ax \\ 2K & y & 2+ay \\ 3K & z & 3+az \end{vmatrix}$$

10) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6$, calcular:

a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2t & 2u & 2v \\ x & y & z \\ -3a & -3b & -3c \end{vmatrix}$

11) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, calcula sin desarrollar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$

12) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcula con propiedades:

a) $\begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix}$

13) Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular el valor de $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$

14) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de:

a) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 3 & 3 & 3 \\ x & z & y \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

15) Calcula el valor de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

16) Demuestra, sin desarrollar, que los siguientes determinantes valen cero.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ b+c & c+d & d+a & a+b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$

17) Sabiendo que A es una matriz de orden 3 que tiene $\det(A) = 4$, calcula:

a) $\det(A^t)$; b) $\det(3A)$; c) $\det(A^4)$; d) $\det(A^{-1})$

18) Se llama determinante de Vandermonde a un determinante con la estructura $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$. Calcula una expresión de su valor y utilízala para resolver el determinante dado por $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix}$

19) Una matriz se llama idempotente cuando verifica que $A^2 = A$. Averigua los posibles valores que puede tener el determinante de una matriz idempotente.

20) Una matriz se llama ortogonal cuando verifica que $A^t = A^{-1}$. Averigua los posibles valores que puede tener el determinante de una matriz ortogonal

21) Si sabemos que una matriz cuadrada A verifica la ecuación $A^2 = A + I$, demuestra que $\det(A) \neq 0$

22) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 invertible que verifica la ecuación $2A^3 = A$. Calcula los posibles valores del determinante de la matriz A.

23) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & x+2 & 0 \\ x & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; d) $\begin{vmatrix} x & -1 & x+3 \\ -1 & x & x-3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

24) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$; c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$

25) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\}$$

26) Calcula los valores de "x" para los que se cumple que $\det(2A) = 8$, siendo A la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$

27) Determina el valor real de "x" para que el determinante de la matriz (2B) sea 160, siendo B la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

28) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Calcula el determinante de A sabiendo que $A^2 - 2A + I = \Theta$, donde I es la matriz identidad y Θ es la matriz nula.

29) Resuelve la inecuación $\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} > 0$

30) Comprueba aplicando propiedades que:

a) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)^2$

c) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$; d) $\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix} = 0$

31) Halla en función de "a":

a) $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$

32) Dada la matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Calcula su determinante y utilízalo para calcular $\det(A_3)$ y $\det(A_5)$

33) Calcula el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

34) Estudia en función de "K" el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & K & 2K \\ K & 2 & 2+K \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} K & 1 & 0 \\ -1 & 2K & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

35) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 3 \end{pmatrix}$. Determina los valores de "λ" que hacen que $rg(A) < 3$. ¿Puede ser $rg(A) = 1$ para algún valor de λ?

36) Encuentra a y b números naturales menores que diez tales que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$ tenga rango 2.

37) Determina el rango de cada matriz en función del parámetro "a":

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & -2 \\ 2a+1 & a+1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 2a & -1 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} a+3 & a-3 & a+1 & a+1 \\ 2a-1 & 1 & a+1 & a-4 \\ -1 & a & 2a+2 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} a & a & -1 & 2 \\ 3 & -a & 0 & 0 \\ 5 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

38) Calcula las inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

39) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -m-1 \end{pmatrix}$:

a) ¿Para qué valores reales de "m" existe A^{-1}?

b) Calcula A^{-1} para $m = 2$ si es posible

40) Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, averiguar el valor de λ para los que la matriz $A \cdot B$ tiene inversa. Calcula $(AB)^{-1}$ para $\lambda = 0$ si es posible.

41) Para cada número real λ, $M(\lambda)$ es la matriz:

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

a) Obtener $\det(M(\lambda))$, demostrando además que la matriz $M(\lambda)$ es invertible para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Calcula la matriz $[M(\lambda)]^{-1}$

c) Si $A = M(8)$, $B = M(4)$ y $C = M(3)$, calcula el determinante de la matriz producto $A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}$

42) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Determina los valores de "m" para los que existe la matriz A^{-1}

b) Resuelve la ecuación $AX - A^t = A$ para $m=0$.

43) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & a+1 & 4 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de "a" es invertible A?

b) Para $a=0$, resuelve la ecuación $(X+I)\cdot A = A^t$

44) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ no tiene inversa, averigua la potencia n-ésima A^n.

45) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} t-1 & 3t & 4 \\ t & -4 & t-6 \\ t-2 & 3t & 4 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que solo hay dos valores de "t" para los cuales la matriz A no es invertible

b) Para $t=1$, obtener la potencia n-ésima A^n.

46) Demuestra que $\det(\mathrm{Adj}(A)) = [\det(A)]^{n-1}$ con $A_{n\times n}$

47) Sean las siguientes matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & 1 \\ a & a & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determina el rango de la matriz A en función de "a"

b) Para $a=2$ calcula $\det(A^{-1}) + \det(B \cdot B^t)$

c) Para $a=2$ resuelve la ecuación $X \cdot A = B^t$

48) Sean las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

a) Obtén el rango de la matriz A

b) Estudia en función de "m" el rango de la matriz B

c) Di para qué valores de "m" no existe B^{-1}.

d) Resuelve la ecuación $BXB = A$ para $m=-1$

49) Dadas A y B matrices de orden 4 que cumplen $\det(A)=3$ y $\det(B)=2$, calcula $\det(A^{-1})$, $\det(B^t \cdot A)$ y $\det\left[(A \cdot B^{-1})^t\right]$

50) Tenemos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Estudia para qué valores de "a" existe A^{-1}.

b) Calcula A^{-1} para $a = 3$

c) Estudia en función de "a" el rango de $(A \cdot B)^t$

1) Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15-8=7$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = 36-(-40)=76$

c) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 24-(-6)=30$ d) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24-24=0$

2) Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6-14+0+16-21+0 = -25$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0+14-3-4-18-0 = -11$

c) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 24-1+0-8-0+3=18$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -10-18+0+1+8-0 = -19$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0+12+12+0+27-40 = 11$

3) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

calcula $\det(A \cdot B)$ y $\det(B \cdot A)$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(B \cdot A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 8 + 0 + 0 - 4 = 0$$

4) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula el determinante de la matriz $A - A^t$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - A^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - A^t) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-4) = 4$$

5) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 26 \Rightarrow 4x+6=26 \Rightarrow 4x=20 \Rightarrow x=5$

b) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 3x & -3 \end{vmatrix} = 45 \Rightarrow -3x-12x=45 \Rightarrow -15x=45 \Rightarrow x=-3$

c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{-2}{x} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow \frac{8}{x}+\frac{6}{x}=7 \Rightarrow \frac{14}{x}=7 \Rightarrow x=2$

d) $\begin{vmatrix} x & 3x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 32$; $x^2-4(3x-1)=32 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-12x+4=32 \Rightarrow x^2-12x-28=0$ $\begin{cases} \to x=-2 \\ \to x=14 \end{cases}$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{x} & 2 \\ 2 & \sqrt{x-6} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sqrt{x(x-6)}-4=0 \Rightarrow$

$\left(\sqrt{x^2-6x}\right)^2=(4)^2 \Rightarrow x^2-6x=16 \Rightarrow x^2-6x-16=0$

$\to \cancel{x=-2}$ → No sirve, pues debe ser $x \geq 6$

$\to x=8$

f) $\begin{vmatrix} sen(x) & cos(x) \\ cos(x) & sen(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow sen^2(x) - cos^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow cos^2(x) - sen^2(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow cos(2x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 240^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ \\ x = 120^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases}$

6) Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y que $det(A) = 4$, calcula:

a) $det(-3A^t) \underset{det(K \cdot X) = K^n \cdot det(X),\ X_{n \times n}}{=} (-3)^2 \cdot det(A^t) \underset{det(A^t) = det(A)}{=} 9 \cdot \underbrace{det(A)}_{4} = 36$

b) $\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix} \underset{Prop.\ 4}{=} 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_1}{=} -(-6) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$

$= 6 \cdot 4 = 24$

7) Siendo $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$

a) Calcula el determinante de las matrices $2A$, A^t y A^{-1}

b) Resuelve la ecuación $\det(A) = 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2$$

a) $\det(2A) = 2^2 \cdot \det(A) = 4 \cdot (-a^2) = -4a^2$

$$\det(A^t) = \det(A) = -a^2$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = -\frac{1}{a^2} \quad (\text{Si } a \neq 0)$$

b) $\det(A) = 0 \Rightarrow -a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$

8) Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, calcula el valor de:

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \underset{\text{Prop. 6}}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 3n & 3q \\ n & q \end{vmatrix}}_{\text{Prop. 5}} \overset{0}{} =$

$$\underset{\det(A)=\det(A^t)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{\det(A)=\det(A^t)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_1}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = +5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{\text{Prop 4}}{=} 3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_1}{=} -(-3)\cdot\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{\text{Prop 4}}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{\det(A^t)=\det(A)}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_1}{=} -2\cdot\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{\text{Prop. 4}}{=} m\cdot\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} \underset{\text{Prop 4}}{=} 5\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} m & m \\ p & p \end{vmatrix}}_{\text{Prop 3}} = 0$

9) Calcula sin aplicar Sarrus el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} K & x & 1+ax \\ 2K & y & 2+ay \\ 3K & z & 3+az \end{vmatrix} = K\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & 1+ax \\ 2 & y & 2+ay \\ 3 & z & 3+az \end{vmatrix} =$$

$$= K\cdot\left[\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & y & 2 \\ 3 & z & 3 \end{vmatrix}}_{\text{Prop 3}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & ax \\ 2 & y & ay \\ 3 & z & az \end{vmatrix}}_{\text{Prop 5}}\right] = K\cdot 0 = 0$$

10) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6$, calcular:

a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix} \underset{\text{Prop 4}}{=} -3 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-6) = 18$

b) $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix} \underset{\text{Prop 4}}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} y & x & z \\ u & t & v \\ b & a & c \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_1}{=} +2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -12$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} \underset{\text{Prop 6}}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}}_{\text{Prop 5}\ \to\ 0} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 6$

d) $\begin{vmatrix} 2t & 2u & 2v \\ x & y & z \\ -3a & -3b & -3c \end{vmatrix} \underset{\text{Prop 4}}{=} 2\cdot(-3) \cdot \begin{vmatrix} t & u & v \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_1}{=} +6 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} =$

$= -36$

11) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, calcular sin desarrollar

el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} \underset{\text{Prop 4}}{=} 3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} \underset{\substack{-F_1+F_2 \\ -F_1+F_3}}{=}$$

$$= 3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} \underset{\text{Prop 4}}{=} -3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -21$$

12) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcula con propiedades:

a) $$\begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = 3\cdot 2\begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 3^2\cdot 2^2\cdot\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= -9\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = +9\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 180$$

b) $$\begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} \underset{C_3-C_2}{=} \begin{vmatrix} d+f & e & f \\ a+c & b & c \\ g+i & h & i \end{vmatrix} \underset{C_1-C_3}{=} \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$\underset{F_2\leftrightarrow F_1}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5$$

13) Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular el valor de $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} \underset{\substack{-F_1+F_2 \\ -F_2+F_3}}{=} \begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

14) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de:

a) $$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 3 & 3 & 3 \\ x & z & y \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ 1 & 1 & 1 \\ x & z & y \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_1}{=} -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & b \\ x & z & y \end{vmatrix} =$$

$$\underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} +3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 15$$

b) $$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$\underset{-2F_1+F_2}{=} \frac{10}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{10}{3} \cdot 5 = \frac{50}{3}$$

c) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix} \underset{\substack{-C_3+C_1 \\ C_3+C_2}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -a & b & c \\ -x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -5$$

d) $$\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3+F_1 \\ -2F_3+F_2}}{=}$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$$

15) Calcula el valor de los determinantes:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{-2F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3 \\ -2F_1+F_4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -72$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \underset{-3F_2+F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -18$$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{-2F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \\ -3F_1+F_4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{2F_1+F_2 \\ 7F_1+F_4}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 0 & 13 & 23 & -9 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -5 & 10 & 4 \\ 13 & 23 & -9 \end{vmatrix} = 938$

16) Demuestra, sin desarrollar, que los siguientes determinantes valen cero:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} \underset{F_1+F_3}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d & e & f \end{vmatrix} \underset{-F_1+F_2}{=}$

$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$ 0 (Prop. 5)

b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_2+F_1}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$

$$\underset{\text{Prop 4}}{=} (x+y+z)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

0 (Prop. 5)

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ b+c & c+d & d+a & a+b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d \\ b+c & c+d & d+a & a+b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} =$

$$\underset{\text{Prop 4}}{=} (a+b+c+d)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+d & d+a & a+b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

0 (Prop 3)

17) Sabiendo que A es una matriz de orden 3 que tiene $\det(A) = 4$, calcula

a) $\det(A^t) = \det(A) = 4$ (Propiedad 1)

b) $\det(3A) = 3^3\cdot\det(A) = 27\cdot 4 = 108$ (Propiedad 4)

c) $\det(A^4) = [\det(A)]^4 = 4^4 = 256$ (Propiedad 8)

d) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \dfrac{1}{4}$ (Propiedad 8)

18) Se llama determinante de Vandermonde a un determinante con la estructura $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$. Calcula una expresión de su valor y utilízala para resolver el determinante dado por $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{-a\cdot F_1+F_2 \\ -a F_2+F_3}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix} \underset{\uparrow \text{ Vandermonde}}{=} (\log 30-\log 3)\cdot(\log 300-\log 3)\cdot(\log 300-\log 30) =$$

$$= \log\left(\frac{30}{3}\right)\cdot\log\left(\frac{300}{3}\right)\cdot\log\left(\frac{300}{30}\right) = \log 10\cdot\log 10^2\cdot\log 10 = 1\cdot 2\cdot 1 = 2$$

19) Una matriz se llama idempotente cuando verifica que $A^2 = A$. Averigua los posibles valores que puede tener el determinante de una matriz idempotente.

$$A^2 = A$$

$$\det(A^2) = \det(A)$$

$$[\det(A)]^2 = \det(A) \Rightarrow [\det(A)]^2 - \det(A) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A) \cdot [\det(A) - 1] = 0 \begin{cases} \det(A) = 0 \\ \det(A) - 1 = 0 \Rightarrow \det(A) = 1 \end{cases}$$

20) Una matriz se llama ortogonal cuando verifica que $A^t = A^{-1}$. Averigua los posibles valores que puede tener el determinante de una matriz ortogonal.

$$A^t = A^{-1}$$

$$\det(A^t) = \det(A^{-1})$$

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A)} \Rightarrow [\det(A)]^2 = 1 \begin{cases} \det(A) = 1 \\ \det(A) = -1 \end{cases}$$

21) Si sabemos que una matriz cuadrada A verifica la ecuación $A^2 = A + I$, demuestra que $\det(A) \neq 0$.

$$A^2 = A + I \Rightarrow A^2 - A = I \Rightarrow A\cdot(A - I) = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\left[A(A-I)\right] = \det(I)$$

$\det(A)\cdot\det(A-I) = 1 \Rightarrow$ Necesariamente tiene que ser $\det(A) \neq 0$, ya que de lo contrario, el producto anterior no podría ser igual a 1.

22) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 invertible que verifica la ecuación $2A^3 = A$. Calcula los posibles valores del determinante de la matriz A.

$$2A^3 = A \Rightarrow \det(2A^3) = \det(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^3\cdot\det(A^3) = \det(A) \Rightarrow 8\cdot\left[\det(A)\right]^3 = \det(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot\left[\det(A)\right]^3 - \det(A) = 0 \Rightarrow \det(A)\cdot\left[8\cdot(\det(A))^2 - 1\right] = 0$$

$\nearrow$ $\cancel{\det(A) = 0}$ No puede ser porque A es invertible.

$\searrow$ $8\cdot(\det(A))^2 - 1 = 0$

$$(\det(A))^2 = \frac{1}{8} \begin{cases} \nearrow \det(A) = \dfrac{1}{\sqrt{8}} \\ \searrow \det(A) = \dfrac{-1}{\sqrt{8}} \end{cases}$$

23) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (x-1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0 \underset{\substack{-F_1+F_2 \\ -F_1+F_3}}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2 & -2x & x+3 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x-1 & 3x \\ 2 & -2x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x \cdot 2x \begin{vmatrix} 2x-1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 \cdot [-2x+1-3] = 0 \Rightarrow 4x^2 \cdot (-2x-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -8x^2 \cdot (x+1) = 0 \quad \begin{cases} -8x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & x+2 & 0 \\ x & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \underset{\substack{-F_1+F_2 \\ -F_1+F_3}}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x \cdot [x^2 + x - 1] = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} x & -1 & x+3 \\ -1 & x & x-3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[-C_3+C_2]{} \begin{vmatrix} x & -x-4 & x+3 \\ -1 & 3 & x-3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & -x-4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

24) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1 - x^3 = 0 \Rightarrow x = 1$

b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[\substack{-F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \\ -F_1+F_4}]{} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x-1 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & -x-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 \cdot \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1-x & x-1 & 0 \\ 1-x & 0 & -x-1 \end{vmatrix} + (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 \\ 1-x & 0 & -x-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -1\cdot(1-x)(x-1)(-x-1)+(x-1)\cdot\begin{vmatrix} x & 1+x & 1 \\ \boxed{1-x \quad 0 \quad 0} \\ 1-x & 1-x & -x-1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

C_1+C_2

$$\Rightarrow \underbrace{-1(1-x)(x-1)}(-x-1)+\underbrace{(x-1)\cdot(-1)(1-x)}\cdot\begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 1-x & -x-1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

Factor común

$$\Rightarrow -1\cdot(1-x)(x-1)\cdot\left[(-x-1)+\begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 1-x & -x-1 \end{vmatrix}\right]=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1\cdot(1-x)(x-1)\cdot\left[(-x-1)+(1+x)(-x-1)+x-1\right]=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1\cdot(1-x)(x-1)\cdot(-x^2-2x-3)=0 \Rightarrow (x-1)^2\cdot(-x^2-2x-3)=0$$

$\nearrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

$\searrow -x^2-2x-3=0 \Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R}$

c) $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}=0 \xrightarrow{-F_1+F_3} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ -x & 0 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}=0 \xrightarrow{F_3+F_4} x\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -x^2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

25) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} -2 + x - 2y - 1 = 0 \\ y + x = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ (\times 2) \rightarrow 2x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_1 + E_2} 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \wedge y = -1$$

26) Calcula los valores de "x" para los que se cumple que $\det(2A) = 8$, siendo la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(2A) = 8 \Rightarrow 2^3 \cdot \det(A) = 8 \Rightarrow \det(A) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{vmatrix} = 1 \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow (1-x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \cancel{1} - 2x + x^2 = \cancel{1} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

$\nearrow x = 0$

$\searrow x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2$

27) Determina el valor real de "x" para que el determinante de la matriz (2B) sea 160, siendo B la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(2B) = 160 \Rightarrow 2^3 \cdot \det(B) = 160 \Rightarrow \det(B) = 20$$

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = 20 \xRightarrow[-F_1+F_3]{} \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ 0 & -1-x^2 & 0 \end{vmatrix} = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(-1-x^2) \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ x+1 & 2 \end{vmatrix} = 20 \Rightarrow (x^2+1) \cdot (x-1) = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 20 \Rightarrow x^3 - x^2 + x - 21 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -21 \\ 3 & & 3 & 6 & 21 \\ \hline & 1 & 2 & 7 & \underline{|0} \end{array}$$

$x^2 + 2x + 7 = 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

La única solución real es $x = 3$

28) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Calcula el determinante de A sabiendo que $A^2 - 2A + I = \Theta$, donde I es la matriz identidad y Θ es la matriz nula.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A + I = \Theta$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2-2a+1 & ab+bc-2b \\ 0 & c^2-2c+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2-2a+1=0 \\ ab+bc-2b=0 \\ c^2-2c+1=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (a-1)^2=0 \Rightarrow a=1 \\ \longrightarrow b(a+c-2)=0 \Rightarrow \\ (c-1)^2=0 \Rightarrow c=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow b \cdot 0 = 0 \Rightarrow b = b$$

$$\Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

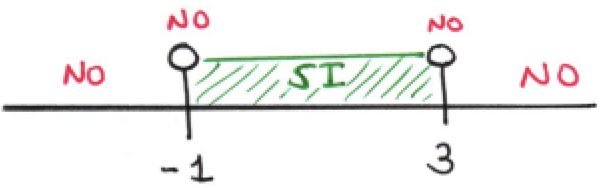
29) Resuelve la inecuación $\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} > 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & x \\ 1-x & 2 & -1 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} \underset{-F_1+F_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & x \\ 1-x & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x(1-x)+2x+6 = -2x^2+4x+6$$

$$\det(A) > 0 \longleftrightarrow -2x^2+4x+6>0$$

$$-2x^2+4x+6=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$



$$\det(A)>0 \longleftrightarrow x \in (-1,3)$$

30) Comprueba aplicando propiedades que:

a) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{-C_1+C_2 \\ -C_1+C_3}}{=} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a(b-a) & (b+a)(b-a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (b-a)^2 \cdot (a-b) =$$

$$= (a-b)^2 \cdot (a-b) = (a-b)^3$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)^2$

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2(a^2-1) & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{-F_1+F_2 \\ -F_1+F_3}}{=} (a^2-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a^2-a \end{vmatrix} = (a^2-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -1 & a^2-a \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -1 & a(a-1) \end{vmatrix} = (a^2-1)\cdot(a-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = (a^2-1)\cdot\underbrace{(a-1)\cdot(a+1)}_{\text{Soma por diferencia}} =$$

$$= (a^2-1)\cdot(a^2-1) = (a^2-1)^2$$

c) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} \underset{\substack{-F_1+F_2 \\ -F_2+F_3}}{=} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

d) $\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix} = 0$

Primero que nada, veamos que $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$. En base a ello, la resolución es inmediata:

$$\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz} \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{xyz} \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz} \cdot 0 = 0$$

31) Halla en función de "a":

a) $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \underset{\substack{-F_1+F_3 \\ -F_1+F_4}}{\overset{-F_1+F_2}{=\!=}} \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= -(-1) \cdot \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a + \begin{vmatrix} a+1 & a & 2a+1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$C_1 + C_3$

$$= a + \begin{vmatrix} a & 2a+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \cancel{a} + (-\cancel{a}) - (2a+1) = -(2a+1)$$

b) $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{-F_1+F_3 \\ -F_1+F_4}}{\overset{-F_1+F_2}{=\!=}} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-a & 0 \end{vmatrix} = -a \cdot \begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-a \end{vmatrix} =$$

$$= -a \cdot (2-a)^3$$

32) Dada la matriz de orden n:

$$A_n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Calcula su determinante y utilízalo para calcular $\det(A_3)$ y $\det(A_5)$

$$\det(A_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1+F_3 \\ \vdots \\ F_1+F_n}}{\overset{F_1+F_2}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots 10 = 10^{n-1}$$

Y por tanto:

$$\det(A_3) = 10^{3-1} = 100 \ ; \ \det(A_5) = 10^{5-1} = 10000$$

33) Calcula el rango de las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\2&1&-1&0\\-1&0&2&-1\end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\2&1&-1\end{vmatrix} = -4 \neq 0$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\2&1&-1&0\\-1&0&2&-1\end{vmatrix} \underset{-F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&-1\\-2&0&0&0\\2&1&-1&0\\-1&0&2&-1\end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&0\\0&2&-1\end{vmatrix} =$$

$= 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow rg(A) = 3$

$$B=\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&1&1\\1&-1&2\\3&0&3\end{pmatrix}$$

$|-1| = -1 \neq 0$

$\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix} = -1-4 = -5 \neq 0$

$\begin{vmatrix}-1&2&3\\2&1&1\\1&-1&2\end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 3$

34) Estudia en función de "K" el rango de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&K&2K\\K&2&2+K\end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix}1&1&2\\2&K&2K\\K&2&2+K\end{vmatrix} = K^2-4K+4$$

$\det(A)=0 \Rightarrow K^2-4K+4=0 \Rightarrow K=2$

Si $K\neq 2 \Rightarrow \det(A)\neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$

Si $K=2 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\2&2&4\end{pmatrix}$$

$|1|=1\neq 0$

$\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix}2&4\\2&4\end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix}2&2\\2&2\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow rg(A)=1$

$$B=\begin{pmatrix}K&1&0\\-1&2K&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}\ ;\ \det(B)=\begin{vmatrix}K&1&0\\-1&2K&-2\\1&-1&2\end{vmatrix}=4K^2-2K$$

$\det(B)=0 \Rightarrow 4K^2-2K=0 \Rightarrow 2K(2K-1)=0 \Rightarrow K=0 ;\ K=\frac{1}{2}$

Si $K=0 \Rightarrow \det(B)=0 \Rightarrow rg(B)<3$

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

$|-1|=-1\neq 0$

$\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$

$\Rightarrow rg(B)=2$

Si $K = 1/2$ $\Rightarrow \det(B) = 0 \Rightarrow rg(B) < 3$

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad |1/2| = \frac{1}{2} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0$$

$$\Rightarrow rg(B) = 2$$

Si $K \neq 0 \wedge K \neq 1/2$ $\Rightarrow \det(B) \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 3$

35) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 3 \end{pmatrix}$. Determina los valores de "λ" que hacen que $rg(A) < 3$. ¿Puede ser $rg(A) = 1$ para algún valor de λ?

El rango de A será $rg(A) < 3$ cuando sea $\det(A) = 0$. Así:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 3 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$

Además, nunca será $rg(A) = 1$ al existir menores de orden 2 no nulos que no dependen de "λ". $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

36) Encuentra a y b números naturales menores que diez tales que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$ tenga rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$$

Para que sea $rg(A) = 2$ tendrá que ser $det(A) = 0$. Así:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4a - 5b = 0 \Rightarrow a = \frac{5b}{4}$$

Como a y b son números naturales menores que diez:

$$\left.\begin{array}{l} b = 1 \longrightarrow a = 5/4 \Rightarrow NO \\ b = 2 \longrightarrow a = 10/4 \Rightarrow NO \\ \vdots \\ b = 4 \longrightarrow a = 5 \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow a = 5 \wedge b = 4$$

37) Determina el rango de cada matriz en función del parámetro "a":

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^3 - a$$

$$\det(A)=0 \rightarrow a^3-a=0 \Rightarrow a(a^2-1)=0 \begin{cases} a=0 \\ a^2-1=0 \begin{cases} a=-1 \\ a=1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Si } a\neq -1 \wedge a\neq 0 \wedge a\neq 1 \Rightarrow \det(A)\neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$$

$$\text{Si } a=-1 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |1|=1\neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$$

$$\text{Si } a=0 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |1|=1\neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$$

$$\text{Si } a=1 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<3$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |1|=1\neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$$

$$B=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & -2 \\ 2a+1 & a+1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} ; \det(B)=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & -2 \\ 2a+1 & a+1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-a$$

$$\det(B)=0 \rightarrow a^3-a=0 \Rightarrow a(a^2-1)=0 \begin{cases} a=0 \\ a^2-1=0 \begin{cases} a=-1 \\ a=+1 \end{cases} \end{cases}$$

Si $a \neq -1 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 1 \Rightarrow \det(B) \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 3$

Si $a = -1 \Rightarrow \det(B) = 0 \Rightarrow rg(B) < 3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 2 \end{array}$$

Si $a = 0 \Rightarrow \det(B) = 0 \Rightarrow rg(B) < 3$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \\ \Rightarrow rg(B) = 2 \end{array}$$

Si $a = 1 \Rightarrow \det(B) = 0 \Rightarrow rg(B) < 3$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} |2| = 2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 2 \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 2a & -1 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 4$$

$$a^2 + 3a - 4 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = -4 \end{cases}$$

$$\text{Si } a=1 \Longrightarrow C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |1|=1\neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\,; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=5\neq 0 \Rightarrow rg(C)=3$$

$$\text{Si } a=-4 \Longrightarrow C=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ -8 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |1|=1\neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}=-33\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -8 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\,; \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -8 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-55\neq 0 \Rightarrow rg(C)=3$$

Es decir:

$$rg(C)=3 \quad \forall a\in\mathbb{R}$$

$$D=\begin{pmatrix} a+3 & a-3 & a+1 & a+1 \\ 2a-1 & 1 & a+1 & a-4 \\ -1 & a & 2a+2 & a-2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+3 & a-3 & a+1 \\ 2a-1 & 1 & a+1 \\ -1 & a & 2a+2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a+3 & a-3 & a+1 \\ 2a-1 & 1 & a+1 \\ -1 & a & 2(a+1) \end{vmatrix}=(a+1)\cdot\begin{vmatrix} a+3 & a-3 & 1 \\ 2a-1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{-F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3}}{=\!=}$$

$$= (a+1)\cdot\begin{vmatrix} a+3 & a-3 & 1 \\ a-4 & -a+4 & 0 \\ -2a-7 & -a+6 & 0 \end{vmatrix} = (a+1)\cdot\begin{vmatrix} a-4 & -a+4 \\ -2a-7 & -a+6 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1)\cdot(a-4)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2a-7 & -a+6 \end{vmatrix} = (a+1)\cdot(a-4)\cdot\left[-a+6-2a-7\right] =$$

$$= (a+1)(a-4)(-3a-1) \;;$$

$$(a+1)(a-4)(-3a-1) = 0 \begin{cases} a+1=0 \rightarrow a=-1 \\ a-4=0 \rightarrow a=4 \\ -3a-1=0 \rightarrow a=-1/3 \end{cases}$$

Si $a=-1$ $\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad |2| = 2 \neq 0$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;;\; \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(D) = 2$$

Si $a=4$ $\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 10 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad |7| = 7 \neq 0$ $\quad \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;;\; \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 29 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0 \;;\; \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 145 \neq 0 \Rightarrow rg(D) = 3$$

$$\text{Si } a=-\frac{1}{3} \Rightarrow D=\begin{pmatrix} 8/3 & -10/3 & 2/3 & 2/3 \\ -5/3 & 1 & 2/3 & -13/3 \\ -1 & -1/3 & 4/3 & -7/3 \end{pmatrix} \quad |8/3| = 8/3 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 8/3 & -10/3 \\ -5/3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{26}{9} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 8/3 & -10/3 & 2/3 \\ -5/3 & 1 & 2/3 \\ -1 & -1/3 & 4/3 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 8/3 & -10/3 & 2/3 \\ -5/3 & 1 & -13/3 \\ -1 & -1/3 & -7/3 \end{vmatrix} = -\frac{284}{27} \neq 0 \Rightarrow rg(D)=3$$

En resumen:

Si $a=-1 \Rightarrow rg(D)=2$

Si $a\neq -1 \Rightarrow rg(D)=3$

$$E=\begin{pmatrix} a & a & -1 & 2 \\ 3 & -a & 0 & 0 \\ 5 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; det(E) = \begin{vmatrix} a & a & -1 & 2 \\ 3 & -a & 0 & 0 \\ 5 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_2+F_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & -1 & 2 \\ 3 & -a & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +8a \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -40a$$

$$det(E)=0 \Rightarrow -40a=0 \Rightarrow a=0$$

Si $a=0 \Rightarrow \det(E)=0 \Rightarrow rg(E)<4$

$$E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$|0|=0$; $|3|=3\neq 0$

$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0$;

$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=3\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \; ; \; \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0 ; \; \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 ;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=15\neq 0 \Rightarrow rg(E)=3$$

Si $a\neq 0 \Rightarrow \det(E)\neq 0 \Rightarrow rg(E)=4$

$$F=\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(F)=\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{array}{r} \\ -F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \\ -F_1+F_4 \end{array} \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 & 1 \\ -a-1 & a+1 & 0 & 0 \\ -a-1 & 0 & a+1 & 0 \\ -a-1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -a-1 & a+1 & 0 \\ -a-1 & 0 & a+1 \\ -a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-a-1)\cdot(a+1)^2=$$

$$=(a+1)^3$$

$$\det(F) = 0 \Rightarrow (a+1)^3 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Si $a = -1 \Rightarrow \det(F) = 0 \Rightarrow rg(F) < 4$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow rg(F) = 1$$

Si $a \neq -1 \Rightarrow \det(F) \neq 0 \Rightarrow rg(F) = 4$

38) Calcula las inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [Adj(A)]^t$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} ; \quad \det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \left[Adj(B) \right]^t$$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[Adj(B) \right]^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} ; \det(C) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow \exists C^{-1}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot \left[Adj(C) \right]^t$$

$$Adj(C) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -8 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[Adj(C)\right]^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -5 & -8 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -5 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

39) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -m-1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores reales de "m" existe A^{-1}?

b) Calcula A^{-1} para $m=2$ si es posible

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -m-1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3$

$\det(A) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$

Como $\exists A^{-1} \longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \; \forall m \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$

b) Para $m=2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left[Adj(A)\right]^t$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 9 & -15 & 10 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left[Adj(A)\right]^t = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ -2 & -15 & 3 \\ 1 & 10 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 2 \\ 2 & 15 & -3 \\ -1 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

40) Dadas $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, averiguar el valor de λ para los que la matriz $A \cdot B$ tiene inversa. Calcula $(AB)^{-1}$ para $\lambda = 0$ si es posible.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(AB) = \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = (1+2\lambda) - (1-\lambda)\cdot(3+2\lambda) = 2\lambda^2+3\lambda-2$$

$$det(AB)=0 \Rightarrow 2\lambda^2+3\lambda-2=0 \quad \begin{cases} \lambda=-2 \\ \lambda = 1/2 \end{cases}$$

Como $\exists (AB)^{-1} \longleftrightarrow det(AB) \neq 0 \Rightarrow \exists (AB)^{-1} \; \forall \lambda \in \mathbb{R} - \left\{-2, 1/2\right\}$

Para $\lambda = 0 \longrightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(AB) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)} \cdot \left[Adj(AB) \right]^t$$

$$Adj(AB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[Adj(AB) \right]^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

41) Para cada número real λ, $M(\lambda)$ es la matriz:

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

a) Obtener $\det(M(\lambda))$, demostrando además que la matriz $M(\lambda)$ es invertible para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Calcula la matriz $\left[M(\lambda) \right]^{-1}$

c) Si $A = M(8)$, $B = M(4)$ y $C = M(3)$, calcula el determinante de la matriz producto $A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}$

$$\det(M(\lambda)) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\det(M(\lambda)) = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \implies \nexists\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Como $\det(M(\lambda)) \neq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies \exists\, [M(\lambda)]^{-1} \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) $$[M(\lambda)]^{-1} = \frac{1}{\det(M(\lambda))} \cdot [Adj(M(\lambda))]^t$$

$$Adj(M(\lambda)) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & \lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Adj(M(\lambda)) = \begin{pmatrix} -1-2\lambda & 2+2\lambda & \lambda \\ 3+\lambda^2 & -4-\lambda^2 & -\lambda \\ 6-\lambda & 2\lambda-8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$[Adj(M(\lambda))]^t = \begin{pmatrix} -1-2\lambda & 3+\lambda^2 & 6-\lambda \\ 2+2\lambda & -4-\lambda^2 & 2\lambda-8 \\ \lambda & -\lambda & -2 \end{pmatrix}$$

$$\implies [M(\lambda)]^{-1} = \frac{1}{\lambda^2-2\lambda+2} \cdot \begin{pmatrix} -1-2\lambda & 3+\lambda^2 & 6-\lambda \\ 2+2\lambda & -4-\lambda^2 & 2\lambda-8 \\ \lambda & -\lambda & -2 \end{pmatrix}$$

c) $\det(A\cdot B^{-1}\cdot C^{-1}) \underset{\uparrow}{=} \det(A)\cdot\det(B^{-1})\cdot\det(C^{-1}) =$

$\det(XY)=\det(X)\cdot\det(Y)$

$\underset{\uparrow}{=} \det(A)\cdot\dfrac{1}{\det(B)}\cdot\dfrac{1}{\det(C)} = \dfrac{\det(A)}{\det(B)\cdot\det(C)}$

$\det(X^{-1}) = \dfrac{1}{\det(X)}$

$\det(A) = \det(M(8)) = 8^2-2\cdot 8+2 = 50$

$\det(B) = \det(M(4)) = 4^2-2\cdot 4+2 = 10$

$\det(C) = \det(M(3)) = 3^2-2\cdot 3+2 = 5$

$\Longrightarrow \det(A\cdot B^{-1}\cdot C^{-1}) = \dfrac{\det(A)}{\det(B)\cdot\det(C)} = \dfrac{50}{10\cdot 5} = 1$

42) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Determina los valores de "m" para los que existe la matriz A^{-1}

b) Resuelve la ecuación $AX - A^t = A$ para $m=0$.

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7m+1$

$$\det(A)=0 \Rightarrow -7m+1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{7}$$

$$\text{Como } \exists A^{-1} \longleftrightarrow \det(A)\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}\ \forall m\in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{7}\right\}$$

b) $AX - A^t = A$

$$AX = A + A^t \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}(A+A^t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}(A+A^t)$$

Para $m=0 \longrightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -5 & 2 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix}$; $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -5 & 2 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{vmatrix}=1$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\left[Adj(A)\right]^t$$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-5 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-5 & 2\\ -4 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -5 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -7\\ -2 & 1 & -11\\ 2 & -1 & 12\end{pmatrix}$$

$$\left[Adj(A)\right]^t=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -7 & -11 & 12\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -7 & -11 & 12\end{pmatrix}$$

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -3 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot (A + A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -3 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ -29 & 25 & 8 \end{pmatrix}$$

43) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & a+1 & 4 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de "a" es invertible A?

b) Para $a=0$, resuelve la ecuación $(X+I) \cdot A = A^t$

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & a+1 & 4 \end{vmatrix} = 2a - 1$

$\det(A) = 0 \rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Como $\exists A^{-1} \longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \ \forall a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) $(X + I) \cdot A = A^t$

$$(X+I) \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = A^t \cdot A^{-1} \Rightarrow X + I = A^t \cdot A^{-1}$$

$$\Rightarrow X = A^t \cdot A^{-1} - I$$

Para $a=0 \longrightarrow A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&0&1\\3&1&4\end{pmatrix}$; $\det(A)=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&0&1\\3&1&4\end{vmatrix}=-1$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\left[Adj(A)\right]^t$$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\1&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-2&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\left[Adj(A)\right]^t=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\-1&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$A^t\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&0&1\\2&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&1&0\\-1&-2&2\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow X=A^t\cdot A^{-1}-I=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&1&0\\-1&-2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&0&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

44) Sabiendo que la matriz $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&x\end{pmatrix}$ no tiene inversa, averigua la potencia n-ésima A^n

Si la matriz A no tiene inversa entonces $\det(A)=0$. Así:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&x\end{vmatrix}=x+1 \;;\; \det(A)=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

Y por tanto $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$. Así:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&4\\0&-1&0\\4&0&-4\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}-4&0&4\\0&-1&0\\4&0&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&-8\\0&1&0\\-8&0&8\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n\cdot 2^{n-1}&0&(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}\\0&(-1)^n&0\\(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}&0&(-1)^n\cdot 2^{n-1}\end{pmatrix}$$

45) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}t-1&3t&4\\t&-4&t-6\\t-2&3t&4\end{pmatrix}$:

a) Demuestra que solo hay dos valores de "t" para los cuales la matriz A no es invertible

b) Para $t=1$, obtener la potencia n-ésima A^n

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} t-1 & 3t & 4 \\ t & -4 & t-6 \\ t-2 & 3t & 4 \end{vmatrix} \underset{-F_1+F_3}{=} \begin{vmatrix} t-1 & 3t & 4 \\ t & -4 & t-6 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 3t & 4 \\ -4 & t-6 \end{vmatrix} = -\left(3t^2-18t+16\right) = -3t^2+18t-16$

$\det(A) = 0 \Rightarrow -3t^2+18t-16=0$

$t = \dfrac{-18 \pm \sqrt{132}}{-6} = \dfrac{-18 \pm \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 11}}{-6} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{-18 \pm 2\sqrt{33}}{-6} = 3 \pm \dfrac{1}{3}\sqrt{33}$ → $t = 3+\frac{1}{3}\sqrt{33}$, $t = 3-\frac{1}{3}\sqrt{33}$

Efectivamente, no existirá la matriz inversa de A para los dos valores de t calculados.

b) Para $t=1 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^5 = A^3 \cdot A^2 = -I \cdot A^2 = -A^2$$

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = (-I) \cdot (-I) = I$$

Como ves, las potencias se irán repitiendo cada 6 al ser $A^6 = I$

Para expresar A^n en estos casos "cíclicos", lo haremos en función del resto de la división entre "n" y el periodo de repetición. Así:

Sea "q" el resto de la división de $n \,\underline{|6}$

$$\begin{array}{l|l} n & 6 \\ \hline q & \text{cociente} \end{array}$$

Si $n \geq 6 \Rightarrow A^n = A^q$, es decir

$$\text{con } n \geq 6 \quad A^n = \begin{cases} I & \text{si } q = 0 \\ A & \text{si } q = 1 \\ A^2 & \text{si } q = 2 \\ -I & \text{si } q = 3 \\ -A & \text{si } q = 4 \\ -A^2 & \text{si } q = 5 \end{cases}$$

46) Demuestra que $\det(Adj(A)) = [\det(A)]^{n-1}$ con $A_{n\times n}$

Partimos de la fórmula de la matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [Adj(A)]^t \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \det(A) \cdot A^{-1} = [Adj(A)]^t \Longrightarrow \det(A) \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A} = [Adj(A)]^t \cdot A$$

$$\Longrightarrow \det(A) \cdot I = [Adj(A)]^t \cdot A \Longrightarrow$$ Tomando determinantes:

$$\Longrightarrow \det[\det(A) \cdot I] = \det[(Adj(A))^t \cdot A] \Longrightarrow$$

$\det(K \cdot X) = K^n \cdot \det(X)$ $X_{n\times n}$

$\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$

$$\Longrightarrow (\det(A))^n \cdot \cancelto{1}{\det(I)} = \det[(Adj(A))^t] \cdot \det(A) \Longrightarrow$$

$\det(X^t) = \det(X)$

$$\Longrightarrow (\det(A))^n = \det(Adj(A)) \cdot \det(A) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \det(Adj(A)) = \frac{(\det(A))^n}{\det(A)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \det(Adj(A)) = [\det(A)]^{n-1}$$ como queríamos demostrar

47) Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & 1 \\ a & a & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determina el rango de la matriz A en función de "a"

b) Para $a=2$, calcula $\det(A^{-1}) + \det(B \cdot B^t)$

c) Para $a=2$, resuelve la ecuación $X \cdot A = B^t$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & 1 \\ a & a & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{-F_1+F_2 \\ -F_1+F_3}}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a \\ 0 & 1-a & 2-a & 3-a \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & 2-a \\ 1-a & 2-a & 3-a \end{vmatrix} = a \cdot \left[-(1-a)^3 \right] = -a \cdot (1-a)^3$$

$$\det(A) = 0 \longrightarrow -a \cdot (1-a)^3 = 0 \begin{cases} -a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ (1-a)^3 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Si $a=0 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < 4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$

Si $a=1 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rg(A)<4$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&2\\1&1&2&3\end{pmatrix}$$

$|1|=1\neq 0$

$\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\neq 0$

$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$

Si $a\neq 0 \wedge a\neq 1 \Rightarrow \det(A)\neq 0 \Rightarrow rg(A)=4$

b) Para $a=2 \Longrightarrow \det(A)=-a\cdot(1-a)^3 \underset{a=2}{=} -2\cdot(-1)^3=+2$

$$B\cdot B^t=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\1&1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1&-1\\1&1&0&-1\\-1&0&1&0\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\det(B\cdot B^t)=\begin{vmatrix}2&1&-1&-1\\1&1&0&-1\\-1&0&1&0\\-1&-1&0&1\end{vmatrix}\overset{F_3+F_1}{=}\begin{vmatrix}1&1&0&-1\\1&1&0&-1\\-1&0&1&0\\-1&-1&0&1\end{vmatrix}\underset{\text{Dos filas iguales}}{=}0$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1})+\cancelto{0}{\det(B\cdot B^t)}=\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}=\frac{1}{2}$$

c) $X \cdot A = B^t \Rightarrow X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = B^t \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B^t \cdot A^{-1}$

Para $a = 2 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Cuando tengamos que hallar la inversa de una matriz de orden 4 o superior, el procedimiento más rápido será el de Gauss-Jordan. Así:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-F_1+F_3 \\ -F_1+F_4}]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-F_3 \\ -F_4}]{\substack{2F_3+2F_4+F_1 \\ +F_4+F_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{2F_2+F_1 \\ -F_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -7 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -7/2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow X = B^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7/2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 & -2 & -2 & -1 \\ -5/2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

48) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

a) obtén el rango de la matriz A

b) Estudia en función de "m" el rango de la matriz B

c) Di para qué valores de "m" no existe B^{-1}

d) Resuelve la ecuación $BXB = A$ para $m = -1$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

b) $\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m$

$$\det(B)=0 \Longrightarrow -m=0 \Longrightarrow m=0$$

Si $m=0 \Rightarrow \det(B)=0 \Rightarrow rg(B)<3$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |-1|=-1\neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow rg(B)=2$$

Si $m\neq 0 \Rightarrow \det(B)\neq 0 \Rightarrow rg(B)=3$

c) Hemos visto que cuando $m=0 \Rightarrow \det(B)=0$ y por tanto $\nexists B^{-1}$ si $m=0$

d) $BXB=A$

$$\underbrace{B^{-1}B}_{I}X\underbrace{BB^{-1}}_{I}=B^{-1}AB^{-1} \Longrightarrow X=B^{-1}\cdot A\cdot B^{-1}$$

Para $m=-1 \longrightarrow B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(B)=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1$

$$Adj(B)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[Adj(B)\right]^t = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{det(B)} \cdot \left[Adj(B)\right]^t = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = B^{-1} \cdot A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

49) Dadas A y B matrices de orden 4 que cumplen $det(A)=3$ y $det(B)=2$, calcula $det(A^{-1})$, $det(B^t \cdot A)$ y $det\left[(A \cdot B^{-1})^t\right]$

$A_{4x4} / det(A)=3$ y $B_{4x4} / det(B)=2$

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} = \frac{1}{3}$$

$$det(B^t \cdot A) \underset{\text{Prop 8}}{=} det(B^t) \cdot det(A) \underset{\text{Prop. 1}}{=} det(B) \cdot det(A) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$det\left[(A \cdot B^{-1})^t\right] \underset{\text{Prop 1}}{=} det(A \cdot B^{-1}) \underset{\text{Prop 8}}{=} det(A) \cdot det(B^{-1}) = det(A) \cdot \frac{1}{det(B)} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

50) Tenemos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Estudia para qué valores de "a" existe A^{-1}.

b) Calcula A^{-1} para $a=3$

c) Estudia en función de "a" el rango de $(A\cdot B)^t$

a) Existe la inversa de A cuando $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{vmatrix} = (a-1)\cdot \begin{vmatrix} a & 2a \\ -a & -a \end{vmatrix} \underset{F_1+F_2}{=} (a-1)\cdot \begin{vmatrix} a & 2a \\ 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= a^2\cdot(a-1) \; ; \; \det(A)=0 \Rightarrow a^2\cdot(a-1)=0 \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Y por tanto $\Rightarrow \exists A^{-1} \; \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

b) Para $a=3 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 18$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left[Adj(A) \right]^t$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 0 \\ -12 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -12 \\ 0 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 0 & -12 \\ 0 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$