1) Dados los puntos $A(1,2,1)$; $B(2,3,1)$ y $C(4,3,2)$ calcula:

a) Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, y $\overrightarrow{BC}$

b) El vector $(3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC})$

c) La distancia entre los puntos A y B

d) Los módulos de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$

e) Un vector unitario en la dirección del vector $\overrightarrow{BC}$

f) El vector $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}$ siendo M_{AB} y M_{BC} los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

g) Los puntos D y E que dividen al segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

2) Halla dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que verifiquen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\vec{u} + \vec{v} = (-2,2,3) \quad ; \quad 2\vec{u} - \vec{v} = (5,-2,3)$$

3) Determina los valores de m para que el módulo del vector $\vec{a} = (3,4,m)$ sea 13.

4) Determina dos vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ que tengan módulo 9 y que tengan la misma dirección que el vector $\vec{a} = (2,5,-1)$

5) Calcula α y β para que se cumpla $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{c}$ siendo $\vec{a}=(2,10,-4)$, $\vec{b}=(-1,3,-2)$ y $\vec{c}=(11,15,-2)$

6) Estudia si los vectores $\vec{a}=(2,-1,3)$ y $\vec{b}=(6,-3,9)$ son paralelos.

7) Averigua si existe algún valor de m para que los vectores $\vec{a}=(m,1,2)$ y $\vec{b}=(6,2,4)$ son paralelos

8) ¿Qué relación deben cumplir "m" y "n" para que sean paralelos los vectores $\vec{a}=(m,2,n)$; $\vec{b}=(3,m,5)$ y $\vec{c}=(1,-n,-1)$

9) Deduce si existe algún valor de "α" para que los vectores $\vec{a}=(2+\alpha,1,2)$ y $\vec{b}=(2,1+\alpha,-4)$ sean paralelos

10) Calcula los valores de "K" para que el vector $\vec{a}=\left(\frac{1}{2},2K,-\frac{1}{2}\right)$ tenga módulo $|\vec{a}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

11) Expresa el vector $\vec{x}=(6,-7,-8)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}=(3,-2,-1)$ y $\vec{b}=(0,1,2)$

12) Determina para qué valores de "m" son linealmente independientes los vectores $\vec{a}=(2,1,-3)$; $\vec{b}=(2,m+3,-4)$ y $\vec{c}=(-2,2,m-1)$

13) Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3, 2)$; $\vec{v} = (2, 0, 1)$; $\vec{w} = (5, -3, 4)$ y $\vec{x} = (-2, 6, -4)$, estudia la dependencia/independencia lineal del sistema de vectores $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ y expresa los que sean linealmente dependientes como combinación lineal de aquellos que son linealmente independientes.

14) Para que valores de "a" el sistema de vectores dado por $S = \{(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

15) Dados $\vec{v_1} = (0, -1, 2)$, $\vec{v_2} = (0, 4, -2)$, $\vec{v_3} = (1, 3, 1)$ y $\vec{v_4} = (-1, 1, -15)$ encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ formada por tres de estos vectores y expresa el cuarto vector como combinación lineal de los vectores de la base que hayas construido.

16) Sabiendo que el sistema de vectores $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, ¿ también será una base de $\mathbb{R}^3$ el sistema $S = \{(\vec{u}+\vec{v}), (\vec{u}-\vec{v}), (\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})\}$?

17) Dada la base canónica $B_c = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ comprueba que $B_1 = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), (0, 0, 1)\right\}$ es también

una base de $\mathbb{R}^3$. Si un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ referido a la base canónica tiene por componentes $\vec{x}_{B_c} = (1, 1, 1)$, ¿cuáles son sus coordenadas respecto a la base B_1?

18) Determina el producto escalar y el ángulo que forman los vectores $\vec{a} = \left(\frac{3}{4}, \sqrt{3}, -5\right)$ y $\vec{b} = \left(\frac{2}{3}, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$

19) Sabiendo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ siendo $\vec{u} = (K, 5, -1)$ y $\vec{v} = (8, -3, 2)$ calcula el valor de K. Para el valor de K obtenido, calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

20) Determina el valor de "m" sabiendo que los vectores $\vec{u} = (1, m, 3)$ y $\vec{v} = (0, 2, -5)$ forman un ángulo de $120°$

21) Determina los valores de "m" para que los vectores $\vec{u} = (m, -1, -m)$ y $\vec{v} = (m, 4, -3)$ sean perpendiculares

22) ¿Existe algún valor de "K" para que los vectores $\vec{a} = (3, K, 5)$ y $\vec{b} = (2, -7, K)$ sean perpendiculares? ¿Y paralelos?

23) Demuestra que $\vec{a} = (K^3, -1, K^2 - 1)$ y $\vec{b} = (2, -3, 1 - 2K)$ son perpendiculares independientemente del valor de K.

24) Se dan las bases de $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 = \{(1,3,-1), (0,1,0), (-1,0,2)\}$$

$$B_2 = \{(-2,1,1), (1,2,0), (-2,1,-5)\}$$

$$B_3 = \left\{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

¿Cuál de ellas es ortogonal? ¿Y ortonormal?

25) Encuentra un vector $\vec{a} = (x, y, 0)$ que sea unitario y que sea perpendicular al vector $\vec{b} = (2, 1, 2)$

26) Sean dos vectores $\vec{a} = (-1, -3, 2)$ y $\vec{b} = (-3, -3, 4)$ tales que el vector $\vec{c} = (x, y, 6)$ es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$. Calcula x e y.

27) Demuestra que si $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, los vectores $(\vec{u} + \vec{v})$ y $(\vec{u} - \vec{v})$ son perpendiculares.

28) Dados dos vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$, demuestra que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

29) Dados dos vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$, demuestra que $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$. ¿Como tienen que ser $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que

se cumpla $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}|+|\vec{v}|$?

30) Calcula la proyección y el vector proyección del vector $\vec{u} = (3,1,2)$ sobre el vector $\vec{v} = (2,1,1)$.

31) Calcula el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $\vec{u} = (1,2,0)$ y $proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

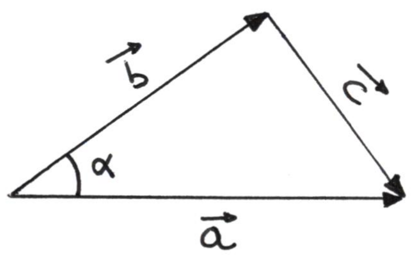
32) De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ y que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a}-\vec{b}|$

33) Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = -11$, calcula $|\vec{v}|$

34) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores perpendiculares que verifican $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 5$. Calcula $|\vec{u}+\vec{v}|$

35) Si $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y $|\vec{u}+\vec{v}| = 5$, ¿qué ángulo forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

36) Dado el triángulo de la figura:



Demuestra el teorema del coseno utilizando el cálculo vectorial.

37) Demostrar que cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

38) Encuentra todos los vectores $\vec{u} = (a^2, -1, a-1)$ perpendiculares a $\vec{v} = (1, 1, 1)$ y paralelos al vector $\vec{w} = (-8, 2, 6)$

39) Determina el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si los vectores $(\vec{u}+\vec{v})$ y $(\vec{u}-\vec{v})$ son perpendiculares, $|\vec{u}| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\sqrt{3}$

40) Dados los puntos $A(0, -1, 2)$, $B(-1, 3, 0)$ y $C(0, -2, 0)$ calcula:

a) Las coordenadas del punto D que hacen que ABCD sea un paralelogramo

b) El perímetro del paralelogramo y sus ángulos

41) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 2)$ y $\vec{v} = (3, 2, -5)$ calcula

a) El ángulo que forman (α)

b) El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$

c) El módulo $|\vec{u} \times \vec{v}|$

d) Comprueba que se verifica $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$

42) Dados los vectores $\vec{a} = (3, -4, 5)$ y $\vec{b} = (-2, 3, 1)$. comprueba que se cumple que $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

43) Demuestra que $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

44) Encuentra dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que tengan módulo 5 y que sean perpendiculares simultáneamente a los vectores $\vec{u} = (2, 0, -1)$ y $\vec{v} = (6, -3, 2)$

45) Dados los vectores $\vec{a} = (-4, 1, 1)$ y $\vec{b} = (-2, -3, -5)$, calcula un vector $\vec{c}$ para que el sistema de vectores $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ sea una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. A partir de la base B, obtén otra base B' que sea ortonormal.

46) Calcula el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{a} = (1, 5, -2)$ y $\vec{b} = (2, 0, 1)$

47) Calcula el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{a} = (1, 0, 2)$ y $\vec{b} = (1, 1, -1)$

48) Determina el área del triángulo determinado por los puntos $A(-2, -2, 0)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(0, 4, -1)$. ¿Cuál es la altura correspondiente al vértice C?

49) Determina el valor de "m" para que los puntos $A(1,0,1)$ $B(1,1,1)$ y $C(1,6,m)$ determinen un triángulo cuya área sea $\frac{3}{2}\ u^2$

50) Dado $\vec{u} = (6,4,-3)$, encuentra $\vec{v} = (x,y,z)$ que verifique que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 12$ y que $\vec{u}\times\vec{v} = (17,-15,14)$

51) Encuentra las componentes de un vector $\vec{u}$ sabiendo que $|\vec{u}| = \sqrt{6}$ y que $\vec{u}\times(2,1,-1) = (1,3,5)$

52) Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{a} = (5,3,-1)$, $\vec{b} = (-2,-1,2)$ y $\vec{c} = (0,-1,3)$

53) Encuentra el volumen del tetraedro las aristas del cual son los vectores $\vec{a} = (5,1,-2)$, $\vec{b} = (3,4,2)$ y $\vec{c} = (4,1,3)$

54) Encuentra el volumen del prisma triangular las aristas del cual son $\vec{a} = (-1,1,-2)$, $\vec{b} = (6,-1,2)$ y $\vec{c} = (0,-2,0)$

55) ¿Son coplanarios los puntos $A(1,1,-1)$, $B(-3,0,-7)$ $C(1,4,5)$ y $D(-2,3,5)$?

56) Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ que tienen el mismo módulo "K", ¿cuál es el máximo y el mínimo valor que puede tomar el producto mixto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$?

57) Un paralelepípedo tiene por aristas a los vectores $\vec{u} = (-3, 9, 2)$, $\vec{v} = (1, 5, -1)$ y $\vec{w} = (6, 7, -6)$. Considerando que la base es el paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ¿cuál es la altura del paralelepípedo?

58) Determina el valor de "K" sabiendo que el tetraedro de vértices $A(3,5,7)$, $B(1,0,-1)$, $C(7,-1,4)$ y $D(K,4,-6)$ tiene un volumen de $107\,u^3$

59) Dados los vectores $\vec{u} = (2,-2,0)$ y $\vec{v} = (1,1,-4)$, encuentra los vectores unitarios $\vec{w}$ que sean coplanarios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y perpendiculares a $\vec{v}$.

60) Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ linealmente independientes calcula los productos mixtos:

a) $[\vec{a}+\vec{c}, \vec{a}-\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]$; b) $[\vec{a}-\vec{c}, \vec{b}-\vec{c}, \vec{c}-\vec{a}]$

c) ¿Qué puedes decir de $[\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}]$?

1) Dados los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,1)$ y $C(4,3,2)$ calcula:

a) Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} = (2,3,1)-(1,2,1) = (1,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4,3,2)-(1,2,1) = (3,1,1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (4,3,2)-(2,3,1) = (2,0,1)$$

b) El vector $(3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC})$

$$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC} = 3\cdot(1,1,0) - 4\cdot(2,0,1) = (3,3,0)-(8,0,4) = (-5,3,-4)$$

c) La distancia entre los puntos A y B

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ u.$$

d) Los módulos de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2+1^2+1^2} = \sqrt{11} \quad ; \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

e) Un vector unitario en la dirección del vector $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{u_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{1}{|\overrightarrow{BC}|}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(2,0,1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

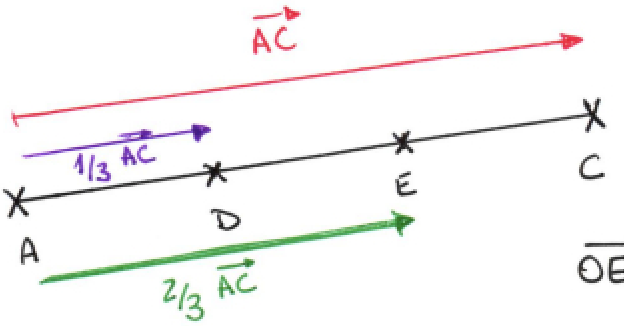
f) El vector $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}$ siendo M_{AB} y M_{BC} los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente

$$M_{AB} = \left(\frac{a_x+b_x}{2}, \frac{a_y+b_y}{2}, \frac{a_z+b_z}{2}\right) = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$$

$$M_{BC} = \left(\frac{b_x + c_x}{2}, \frac{b_y + c_y}{2}, \frac{b_z + c_z}{2} \right) = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+3}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = \left(3, 3, \frac{3}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \left(3, 3, \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1 \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

g) Los puntos D y E que dividen al segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} =$$
$$= (1, 2, 1) + \frac{1}{3}(3, 1, 1) = \left(2, \frac{7}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} =$$
$$= (1, 2, 1) + \frac{2}{3}(3, 1, 1) = \left(3, \frac{8}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

Los puntos pedidos son $D\left(2, \frac{7}{3}, \frac{4}{3} \right)$ y $E\left(3, \frac{8}{3}, \frac{5}{3} \right)$

2) Halla dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que verifiquen simultáneamente las siguientes condiciones:

$\vec{u} + \vec{v} = (-2, 2, 3)$; $2\vec{u} - \vec{v} = (5, -2, 3)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} + \vec{v} = (-2, 2, 3) \\ 2\vec{u} - \vec{v} = (5, -2, 3) \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1 + E_2} 3\vec{u} = (3, 0, 6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{3} \cdot (3, 0, 6) = (1, 0, 2)$$

$$\vec{v} = (-2, 2, 3) - \vec{u}$$

$$\vec{v} = (-2, 2, 3) - (1, 0, 2) = (-3, 2, 1)$$

3) Determina los valores de "m" para que el módulo del vector $\vec{a} = (3, 4, m)$ sea 13.

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2+m^2} = \sqrt{25+m^2}$$

$$|\vec{a}| = 13 \Rightarrow \left(\sqrt{25+m^2}\right)^2 = (13)^2 \Rightarrow 25+m^2 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 = 144 \Rightarrow m = \pm\sqrt{144} \begin{cases} m = -12 \\ m = 12 \end{cases}$$

4) Determina dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tengan módulo 9 y que tengan la misma dirección que el vector $\vec{a} = (2, 5, -1)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+5^2+1^2} = \sqrt{30}$$

obtenemos el vector unitario:

$$\vec{u_a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (2, 5, -1)$$

Y por tanto, los vectores pedidos son:

$$\vec{u} = 9 \cdot \vec{u_a} = \frac{9}{\sqrt{30}} \cdot (2, 5, -1) = \left(\frac{18}{\sqrt{30}}, \frac{45}{\sqrt{30}}, \frac{-9}{\sqrt{30}} \right)$$

$$\vec{v} = -9 \cdot \vec{u_a} = \frac{-9}{\sqrt{30}} \cdot (2, 5, -1) = \left(\frac{-18}{\sqrt{30}}, \frac{-45}{\sqrt{30}}, \frac{9}{\sqrt{30}} \right)$$

5) Calcula α y β para que se cumpla $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$ siendo $\vec{a} = (2, 10, -4)$, $\vec{b} = (-1, 3, -2)$ y $\vec{c} = (11, 15, -2)$

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

$$(11, 15, -2) = \alpha(2, 10, -4) + \beta(-1, 3, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha - \beta = 11 \\ 10\alpha + 3\beta = 15 \\ -4\alpha - 2\beta = -2 \end{array}\right\} \quad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 11 \\ 10 & 3 & 15 \\ -4 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Rango (A):

$|2| = 2 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A) = 2$

Rango (A*):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 11 \\ 10 & 3 & 15 \\ -4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 2 \\ n^o incóg = 2 \end{array}\right\}$$

T^{ma} ROUCHÉ $\Downarrow$ Sistema Compatible Determinado

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha - \beta = 11 \\ 10\alpha + 3\beta = 15 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 3} \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{l} 6\alpha - 3\beta = 33 \\ 10\alpha + 3\beta = 15 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1 + E_2} \begin{array}{l} 16\alpha = 48 \\ \alpha = 3 \end{array}$$

$$\beta = 2\alpha - 11 = 2 \cdot 3 - 11 = -5$$

Portanto $\vec{c} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$ ($\vec{c}$ es combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$)

6) Estudia si los vectores $\vec{a} = (2, -1, 3)$ y $\vec{b} = (6, -3, 9)$ son paralelos

Dos vectores son paralelos cuando sus componentes guardan la misma relación de proporcionalidad. Así:

$$\frac{6}{2} = \frac{-3}{-1} = \frac{9}{3} \Rightarrow$$ Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son proporcionales entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

7) Averigua si existe algun valor de m para que los vectores $\vec{a}=(m,1,2)$ y $\vec{b}=(6,2,4)$ son paralelos

$$\frac{6}{m}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2} \Rightarrow \frac{6}{m}=2 \Rightarrow m=3$$

$\Rightarrow$ Si $m=3$ los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

8) ¿Qué relación deben cumplir "m" y "n" para que sean paralelos los vectores $\vec{a}=(m,2,n)$, $\vec{b}=(3,m,5)$ y $\vec{c}=(1,-n,-1)$

$$\text{Si } \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{m}{3}=\frac{2}{m}=\frac{n}{5} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} m^2=6 \\ 5m=3n \\ 10=m\cdot n \end{array}\right\} m^2=6 \begin{cases} m=-\sqrt{6} \\ m=\sqrt{6} \end{cases}$$

Si $m=-\sqrt{6}$:

$$5(-\sqrt{6})=3n \longrightarrow n=\frac{-5\sqrt{6}}{3}$$

$$10=-\sqrt{6}\cdot n \longrightarrow n=-\frac{10}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{-10\sqrt{6}}{6}=-\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

Si $m=\sqrt{6}$

$$5\cdot\sqrt{6}=3n \longrightarrow n=\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

$$10=\sqrt{6}\cdot n \longrightarrow n=\frac{10}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{10\sqrt{6}}{6}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Por tanto, si } \left\{\begin{array}{l} m=-\sqrt{6} \text{ y } n=-\frac{5\sqrt{6}}{3} \\ \\ m=\sqrt{6} \text{ y } n=\frac{5\sqrt{6}}{3} \end{array}\right\} \vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ son paralelos.}$$

Veamos si para esos valores $\vec{a}$ y $\vec{c}$ también son paralelos:

$$\boxed{\text{Si } m = -\sqrt{6} \wedge n = -\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$

$$\vec{a} = \left(-\sqrt{6}, 2, -\frac{5\sqrt{6}}{3}\right) \; ; \; \vec{c} = \left(1, \frac{5\sqrt{6}}{3}, -1\right)$$

$$\frac{-\sqrt{6}}{1} \neq \frac{2}{\frac{5\sqrt{6}}{3}} \neq \frac{\frac{-5\sqrt{6}}{3}}{-1} \Rightarrow$$ $\vec{a}$ y $\vec{c}$ no son paralelos cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ lo son.

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ no son paralelos

$$\boxed{\text{Si } m = \sqrt{6} \wedge n = \frac{5\sqrt{6}}{3}}$$

$$\vec{a} = \left(\sqrt{6}, 2, \frac{5\sqrt{6}}{3}\right) \; ; \; \vec{c} = \left(1, -\frac{5\sqrt{6}}{3}, -1\right)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{1} \neq \frac{2}{-\frac{5\sqrt{6}}{3}} \neq \frac{\frac{5\sqrt{6}}{3}}{-1} \Rightarrow$$ $\vec{a}$ y $\vec{c}$ no son paralelos cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ lo son.

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ no son paralelos

$\Rightarrow$ Los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ no son paralelos en ningún caso.

9) Deduce si existe algún valor de "α" para que los vectores $\vec{a} = (2+\alpha, 1, 2)$ y $\vec{b} = (2, 1+\alpha, -4)$ sean paralelos

$$\frac{2+\alpha}{2} = \frac{1}{1+\alpha} = \frac{2}{-4} \Rightarrow -2 = 1+\alpha \Rightarrow \alpha = -3$$

Si $\alpha = -3 \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{2}{-4} \Rightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos

10) Calcula los valores de "K" para que el vector $\vec{a}=\left(\frac{1}{2},2K,-\frac{1}{2}\right)$ tenga módulo $|\vec{a}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2K)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+4K^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{4K^2+\frac{1}{2}}$$

$$|\vec{a}|=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\sqrt{4K^2+\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\Rightarrow 4K^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4K^2=0\Rightarrow K^2=0\Rightarrow K=0$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ si } K=0$$

11) Expresa el vector $\vec{x}=(6,-7,-8)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}=(3,-2,-1)$ y $\vec{b}=(0,1,2)$

El vector $\vec{x}$ se puede escribir como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si existen los escalares α y $\beta\in\mathbb{R}$ tales que $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Así:

$$(6,-7,-8)=\alpha\cdot(3,-2,-1)+\beta\cdot(0,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l}3\alpha=6\\-2\alpha+\beta=-7\\-\alpha+2\beta=-8\end{array}\right\}\quad A^*=\left(\begin{array}{cc:c}3&0&6\\-2&1&-7\\-1&2&-8\end{array}\right)$$

Rango(A):

$|3|=3\neq0$

$$\begin{vmatrix}3&0\\-2&1\end{vmatrix}=3\neq0\Rightarrow rg(A)=2$$

Rango(A*):

$$\begin{vmatrix}3&0&6\\-2&1&-7\\-1&2&-8\end{vmatrix}=0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}rg(A)=2\\rg(A^*)=2\\n^o\,incóg=2\end{array}\right\}$$

$T^{\underline{ma}}$ ROUCHE

⇓

Sistema Compatible Determinado

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{l} 3\alpha = 6 \\ -2\alpha + \beta = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \alpha = 2 \\ \longrightarrow -4 + \beta = -7 \Rightarrow \beta = -3 \end{array}$$

Por tanto $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

12) Determina para qué valores de "m" son linealmente independientes los vectores $\vec{a} = (2, 1, -3)$, $\vec{b} = (2, m+3, -4)$ y $\vec{c} = (-2, 2, m-1)$.

Un conjunto de 3 vectores es linealmente independiente si su rango es 3. Es decir:

$$S = \{(2,1,-3), (2, m+3, -4), (-2, 2, m-1)\} \longleftrightarrow rg(S) = 3$$

La matriz del sistema S es:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & m+3 & 2 \\ -3 & -4 & m-1 \end{pmatrix}$$, y será $rg(S) = 3$ cuando sea $\det(S) \neq 0$

Así:

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & m+3 & 2 \\ -3 & -4 & m-1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 4m - 10 \,;\quad 2m^2 - 4m - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16+80}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{96}}{4} = \frac{4 \pm 4\sqrt{6}}{4} = 1 \pm \sqrt{6} \begin{array}{l} \nearrow m = 1 + \sqrt{6} \\ \searrow m = 1 - \sqrt{6} \end{array}$$

Y por tanto:

Si $m \neq 1+\sqrt{6} \wedge m \neq 1-\sqrt{6} \Rightarrow \det(S) \neq 0 \Rightarrow rg(S) = 3 \Rightarrow S$ es un sistema linealmente independiente $\Rightarrow$ Los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independiente.

13) Dados los vectores $\vec{u} = (1,-3,2)$; $\vec{v} = (2,0,1)$; $\vec{w} = (5,-3,4)$ y $\vec{x} = (-2,6,-4)$, estudia la dependencia/independencia lineal del sistema de vectores $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ y expresa los que sean linealmente dependientes como combinación lineal de aquellos que son linealmente independientes.

$$S = \{(1,-3,2), (2,0,1), (5,-3,4), (-2,6,-4)\}$$

$$S = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} & \vec{x} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rango (S):

$|1| = 1 \neq 0 \rightarrow \{\vec{u}\}$ es l.i

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es l.i

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es l.d. $\Rightarrow \vec{w}$ depende linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}\}$ es l.d $\Rightarrow \vec{x}$ depende linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$\Rightarrow rg(S) = 2 \Rightarrow$ S es un sistema linealmente dependiente

Según hemos visto, $\vec{w}$ depende linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y por tanto podremos escribir $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ según:

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

$$(5,-3,4) = \alpha \cdot (1,-3,2) + \beta (2,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha + 2\beta = 5 \\ -3\alpha = -3 \\ 2\alpha + \beta = 4 \end{array}\right\} A^* = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Fíjate que al haber estudiado el rango del sistema S, ya tienes estudiados los rangos de las matrices A y A^* de este sistema

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 2 \\ n^o\ incóg = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} T^{MA}\ ROUCHE \\ \Downarrow \\ \text{Sistema Compatible} \\ \text{Determinado} \end{array} \Rightarrow$$

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha + 2\beta = 5 \\ -3\alpha = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow 1 + 2\beta = 5 \Rightarrow \beta = 2 \\ \longrightarrow \alpha = 1 \end{array}$$

Con lo que $\vec{w} = 1\vec{u} + 2\vec{v}$

Del mismo modo:

$$\vec{x} = \gamma \vec{u} + \delta \vec{v}$$

$$(-2,6,-4) = \gamma \cdot (1,-3,2) + \delta \cdot (2,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\gamma+2\delta=-2\\-3\gamma=6\\2\gamma+\delta=-4\end{array}\right\} \quad A^*=\left(\begin{array}{cc|c}1&2&-2\\-3&0&6\\2&1&-4\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l}rg(A)=2\\rg(A^*)=2\\n^o\,incóg=2\end{array}\right\}$$

T^{ma} ROUCHE $\Downarrow$ Sistema Compatible Determinado

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma+2\delta=-2\\-3\gamma=6\end{array}\right\} \longrightarrow -2+2\delta=-2 \longrightarrow \delta=0$$

$$-3\gamma=6 \longrightarrow \gamma=-2$$

Con lo que $\vec{x}=-2\vec{u}$

14) ¿Para qué valores de "a" el sistema de vectores dado por $S=\{(1,1,1),(a,1,1),(1,a,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$?

En $\mathbb{R}^3$, cualquier sistema de 3 vectores que sea linealmente independiente es una base. Así, S será base de $\mathbb{R}^3$ si es l.i, y será l.i si $rg(S)=3$. Por tanto:

$$S=\begin{pmatrix}1&a&1\\1&1&a\\1&1&0\end{pmatrix} \longrightarrow det(S)=\begin{vmatrix}1&a&1\\1&1&a\\1&1&0\end{vmatrix}=a^2-a$$

$$det(S)=0 \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \begin{cases} a=0 \\ a-1=0 \rightarrow a=1\end{cases}$$

Por tanto:

si $a\neq 0 \wedge a\neq 1 \Rightarrow det(S)\neq 0 \Rightarrow rg(S)=3 \Rightarrow$ S es base de $\mathbb{R}^3$

15) Dados $\vec{v_1} = (0,-1,2)$, $\vec{v_2} = (0,4,-2)$, $\vec{v_3} = (1,3,1)$ y $\vec{v_4} = (-1,1,-15)$ encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ formada por tres de estos vectores y expresa el cuarto vector como combinación lineal de los vectores de la base que hayas construido.

Sea el sistema:

$$S = \{(0,-1,2), (0,4,-2), (1,3,1), (-1,1,-15)\}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} & \vec{v_4} \end{array} \\ S = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -15 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rango(S).

$|-1| = -1 \neq 0 \rightarrow \{\vec{v_1}\}$ es l.i

$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ es l.i

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\} \text{ es l.i} \Rightarrow rg(S) = 3$$

Como $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ es un sistema de 3 vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$, entonces $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

Podremos por tanto expresar $\vec{v_4}$ como combinación lineal de los vectores de la base B según:

$$\vec{v_4} = \alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2} + \gamma \vec{v_3}$$

$$(-1,1,-15) = \alpha(0,-1,2) + \beta(0,4,-2) + \gamma \cdot (1,3,1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \gamma=-1 \\ -\alpha+4\beta+3\gamma=1 \\ 2\alpha-2\beta+\gamma=-15 \end{array}\right\} A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -15 \end{array}\right)$$

Esta es la matriz del sistema de vectores S y ya hemos estudiado los rangos!!

$$\left.\begin{array}{l} rg(A)=3 \\ rg(A^*)=3 \\ n^o\ incóg=3 \end{array}\right\} \text{T}^{\underline{\text{MA}}}\ \text{ROUCHÉ} \Downarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \text{Regla de Cramer}$$

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -15 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{48}{-6}=-8\ ;\ \beta=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -15 & 1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{6}{-6}=-1$$

$$\gamma=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -15 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{6}{-6}=-1$$

Y por tanto $\vec{v_4}=-8\vec{v_1}-1\vec{v_2}-1\vec{v_3}$

16) Sabiendo que el sistema de vectores $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. ¿también será una base de $\mathbb{R}^3$ el sistema $S=\{(\vec{u}+\vec{v}),(\vec{u}-\vec{v}),(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})\}$?

Si $B=\{(u_x,u_y,u_z),(v_x,v_y,v_z),(w_x,w_y,w_z)\}$ es una base entonces $rg(B)=3$, y por tanto $\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}\neq 0$

Veamos el rango del sistema S:

$$\begin{vmatrix} u_x+v_x & u_x-v_x & u_x+v_x+w_x \\ u_y+v_y & u_y-v_y & u_y+v_y+w_y \\ u_z+v_z & u_z-v_z & u_z+v_z+w_z \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & C_1+C_2 & C_2+C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} u_x+v_x & 2u_x & 2u_x+w_x \\ u_y+v_y & 2u_y & 2u_y+w_y \\ u_z+v_z & 2u_z & 2u_z+w_z \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & C_3-C_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} u_x+v_x & 2u_x & w_x \\ u_y+v_y & 2u_y & w_y \\ u_z+v_z & 2u_z & w_z \end{vmatrix} \end{array} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. 6} \\ \text{determinantes}}}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} u_x & 2u_x & w_x \\ u_y & 2u_y & w_y \\ u_z & 2u_z & w_z \end{vmatrix}}_{0\ (\text{Prop. } 5)} + \begin{vmatrix} v_x & 2u_x & w_x \\ v_y & 2u_y & w_y \\ v_z & 2u_z & w_z \end{vmatrix} =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. 4}}}{2} \cdot \begin{vmatrix} v_x & u_x & w_x \\ v_y & u_y & w_y \\ v_z & u_z & w_z \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_1}{=} -2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}}_{\neq 0} \neq 0$$

Como $\det(S) \neq 0 \Rightarrow rg(S) = 3 \Rightarrow S$ es una base de $\mathbb{R}^3$

17) Dada la base canónica $B_C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ comprueba que $B_1 = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), (0,0,1)\right\}$ es también una base de $\mathbb{R}^3$. Si un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ referido a la base canónica tiene por coordenadas $\vec{x}_{B_C} = (1,1,1)$, ¿cuáles son sus coordenadas respecto a la base B_1?

B_1 será una base de $\mathbb{R}^3$ si es un sistema linealmente independiente, es decir si $rg(B_1)=3$, es decir, si $det(B_1)\neq 0$

Así:

$$B_1=\begin{pmatrix}1/2 & 3/2 & 0\\ 3/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ det(B_1)=\begin{vmatrix}1/2 & 3/2 & 0\\ 3/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\frac{5}{2}\neq 0$$

$\Rightarrow rg(B_1)=3 \Rightarrow B_1$ es l.i $\Rightarrow B_1$ es base de $\mathbb{R}^3$

Las coordenadas de un vector respecto a una base no son más que los escalares que permiten escribir al vector en cuestión como combinación lineal de los vectores de la base considerada. Así:

$$(1,1,1)=\alpha\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right)+\beta\cdot\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2},0\right)+\gamma\cdot(0,0,1)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\beta&=1\\ \frac{3}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta&=1\\ \gamma&=1\end{aligned}\right\}\ A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1/2 & 3/2 & 0 & 1\\ 3/2 & -1/2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\quad \left.\begin{aligned}rg(A)&=3\\ rg(A^*)&=3\\ n^{\circ}\text{ incóg}&=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $T^{\underline{MA}}$ ROUCHÉ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Regla de Cramer:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-5/2} = \frac{-2}{-5/2} = \frac{4}{5} \; ; \; \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-5/2} = \frac{-1}{-5/2} = \frac{2}{5}$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-5/2} = \frac{-5/2}{-5/2} = 1$$

Y por tanto $\vec{X} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right) + 1 \cdot (0,0,1)$

$\Longrightarrow \overrightarrow{X_{B_1}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$

18) Determina el producto escalar y el ángulo que forman los vectores $\vec{a} = \left(\frac{3}{4}, \sqrt{3}, -5\right)$ y $\vec{b} = \left(\frac{2}{3}, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\frac{3}{4}, \sqrt{3}, -5\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\sqrt{3}, \frac{-1}{2}\right) = \frac{6}{12} - 3 + \frac{5}{2} = 0$

Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 90°.

19) Sabiendo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ siendo $\vec{u} = (K, 5, -1)$ y $\vec{v} = (8, -3, 2)$, calcula el valor de K. Para el valor de K obtenido, calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (K,5,-1)\cdot(8,-3,2) = 8K-15-2 = 8K-17$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 \Rightarrow 8K-17 = -1 \Rightarrow 8K = 16 \Rightarrow K = 2$

Para $K=2$:

$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+5^2+1^2} = \sqrt{30}$; $|\vec{v}| = \sqrt{8^2+3^2+2^2} = \sqrt{77}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{77}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2310}}\right) = 91'19^\circ$$

20) Determina el valor de "m" sabiendo que los vectores $\vec{u} = (1,m,3)$ y $\vec{v} = (0,2,-5)$ forman un ángulo de 120°

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1,m,3)\cdot(0,2,-5) = 2m-15$

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+m^2+3^2} = \sqrt{m^2+10}$; $|\vec{v}| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow 2m-15 = \sqrt{m^2+10}\cdot\sqrt{29}\cdot\cos 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2m-15 = \sqrt{29m^2+290}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow (30-4m)^2 = \left(\sqrt{29m^2+290}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 900-240m+16m^2 = 29m^2+290 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13m^2+240m-610 = 0 \text{ ; } m = \frac{-240\pm\sqrt{89320}}{26} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{-240\pm 2\sqrt{22330}}{26} = \frac{-120\pm\sqrt{22330}}{13} \begin{cases} m = \dfrac{-120+\sqrt{22330}}{13} \\ m = \dfrac{-120-\sqrt{22330}}{13} \end{cases}$$

21) Determina los valores de "m" para que los vectores $\vec{u} = (m, -1, -m)$ y $\vec{v} = (m, 4, -3)$ sean perpendiculares.

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Así:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (m, -1, -m) \cdot (m, 4, -3) = (m^2 - 4 + 3m = m^2 + 3m - 4$$

$\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$

$$m^2 + 3m - 4 = 0 \quad \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares si $m = 1$ o $m = -4$

22) ¿Existe algún valor de "K" para que los vectores $\vec{a} = (3, K, 5)$ y $\vec{b} = (2, -7, K)$ sean perpendiculares? ¿Y paralelos?

$\vec{a} \perp \vec{b}$ si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (3, K, 5) \cdot (2, -7, K) = 6 - 7K + 5K = 6 - 2K$$

$$0 = 6 - 2K \Rightarrow K = 3$$

$\Rightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares si $K = 3$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ si $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{K}{-7} = \frac{5}{K} \quad \begin{cases} -21 = 2K \Rightarrow K = \dfrac{-21}{2} \\ 3K = 10 \Rightarrow K = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists\, K \in \mathbb{R}$ para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean paralelos.

23) Demuestra que $\vec{a} = (k^3, -1, k^2-1)$ y $\vec{b} = (2, -3, 1-2k)$ son perpendiculares independientes del valor de k.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (k^3, -1, k^2-1) \cdot (2, -3, 1-2k) = 2k^3 + 3 + (k^2-1) \cdot (1-2k) =$$

$$= \cancel{2k^3} + 3 + k^2 - \cancel{2k^3} - 1 + 2k = k^2 + 2k + 2$$

$$\text{Si } \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$k^2 + 2k + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow \nexists k \in \mathbb{R}$$

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ NO son perpendiculares para ningún valor del parámetro k.

24) Se dan las bases de $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 = \{(1,3,-1), (0,1,0), (-1,0,2)\}$$

$$B_2 = \{(-2,1,1), (1,2,0), (-2,1,-5)\}$$

$$B_3 = \left\{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

¿Cuál de ellas es ortogonal? ¿Y ortonormal?

Una base se llama ORTOGONAL cuando está formada por vectores perpendiculares entre sí. Una base se llama

ORTONORMAL cuando está formada por vectores unitarios que además son perpendiculares entre si.

Base B_1:

$\vec{u} = (1,3,-1)$; $\vec{v} = (0,1,0)$; $\vec{w} = (-1,0,2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,3,-1) \cdot (0,1,0) = 3 \neq 0$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares $\Rightarrow$ La base B_1 no es ni ortogonal ni ortonormal.

Base B_2:

$\vec{u} = (-2,1,1)$; $\vec{v} = (1,2,0)$; $\vec{w} = (-2,1,-5)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = (-2,1,1) \cdot (1,2,0) = -2+2 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = (-2,1,1) \cdot (-2,1,-5) = 4+1-5 = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (1,2,0) \cdot (-2,1,-5) = -2+2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ son} \\ \text{perpendiculares entre si} \end{array}$$

$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$; $|\vec{v}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$; $|\vec{w}| = \sqrt{2^2+1^2+5^2} = \sqrt{30}$

$\Rightarrow$ La base B_2 es ortogonal

Base B_3:

$\vec{u} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\vec{v} = (1, 0, 0)$; $\vec{w} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}\cdot\vec{v} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(1,0,0) = 0 \\ \vec{u}\cdot\vec{w} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \\ \vec{v}\cdot\vec{w} = (1,0,0)\cdot\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0 \end{array}\right\}$$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares entre si

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \\ |\vec{v}| = \sqrt{1^2} = 1 \\ |\vec{w}| = \sqrt{0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = 1 \end{array}\right\}$$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores unitarios

$\Rightarrow$ La base B_3 es ortonormal

25) Encuentra un vector $\vec{a} = (x, y, 0)$ que sea unitario y que sea perpendicular al vector $\vec{b} = (2, 1, 2)$

Si $\vec{a} = (x, y, 0)$ es unitario:

$|\vec{a}| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$ (Ecuación 1)

Si $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow (x, y, 0)\cdot(2, 1, 2) = 0 \Rightarrow 2x + y = 0$ (Ecuación 2)

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\} \; y=-2x \longrightarrow x^2+(-2x)^2=1 \Rightarrow 5x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{5}$$

$$x=-\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow y=-2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow (x,y)=\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow y=-2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow (x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

Los vectores pedidos son:

$$\vec{a}=\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0\right) \quad y \quad \vec{a}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}},0\right)$$

26) Sean dos vectores $\vec{a}=(-1,-3,2)$ y $\vec{b}=(-3,-3,4)$ tales que el vector $\vec{c}=(x,y,6)$ es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$. Calcula x e y.

Si $\vec{a}\perp\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$$(-1,-3,2)\cdot(x,y,6)=0 \Rightarrow -x-3y+12=0 \text{ (Ecuación 1)}$$

Si $\vec{b}\perp\vec{c} \Rightarrow \vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$$(-3,-3,4)\cdot(x,y,6)=0 \Rightarrow -3x-3y+24=0 \text{ (Ecuación 2)}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=12 \\ -3x-3y=-24 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} -2x=-12 \Rightarrow x=6$$

$$y=\frac{12-x}{3}=\frac{12-6}{3}=2$$

Los valores pedidos son $x=6$ e $y=2$

27) Demuestra que si $|\vec{u}|=|\vec{v}|$, los vectores $(\vec{u}+\vec{v})$ y $(\vec{u}-\vec{v})$ son perpendiculares

$$(\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v}) \text{ si } (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=0$$

llamando "α" al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=$$

$$=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ}-\cancel{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha}+\cancel{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\alpha}-|\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ}=$$

$$=|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2 \underset{|\vec{u}|=|\vec{v}|}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Cuando $|\vec{u}|=|\vec{v}| \Rightarrow (\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$ al cumplirse que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=0$

28) Dados dos vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$, demuestra que

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$$

Sabemos que el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \quad \text{con } \alpha \equiv \text{ángulo } (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

Por tanto:

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \Big||\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\Big| \underset{\substack{|\vec{u}|>0\\|\vec{v}|>0}}{=} |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot|\cos\alpha|$$

Y Así:

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$$

$$\cancel{|\vec{u}|}\cdot\cancel{|\vec{v}|}\cdot|\cos\alpha| \leq \cancel{|\vec{u}|}\cdot\cancel{|\vec{v}|}\cdot 1 \Rightarrow |\cos\alpha| \leq 1$$

Sabemos que $\cos\alpha$ es una función acotada según:

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \Rightarrow |\cos\alpha| \leq 1 \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

Como $|\cos\alpha| \leq 1 \ \forall\alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \ \forall\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$

tal y como queríamos demostrar.

29) Dados dos vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$, demuestra que $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|$. ¿Cómo tienen que ser $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que se cumpla $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}|+|\vec{v}|$?

Veamos el módulo del vector $|\vec{u}+\vec{v}|$ utilizando la definición de producto escalar:

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = |\vec{u}+\vec{v}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|\cdot \cancel{\cos 0^\circ}^{\,1} \Rightarrow$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \Rightarrow \text{Hacemos los productos:}$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 \Rightarrow \text{Siendo } \alpha = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha + |\vec{v}|^2 \Rightarrow \text{como } -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha + |\vec{v}|^2 \leq \underbrace{|\vec{u}|^2 + 2\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| + |\vec{v}|^2}_{\text{Producto Notable}}$$

$$\downarrow$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 \leq (|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2 \Rightarrow \text{Haciendo la raíz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}| \text{ como queríamos demostrar}$$

Del desarrollo anterior:

Si $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}|+|\vec{v}| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(|\vec{u}+\vec{v}|\right)^2 = \left(|\vec{u}|+|\vec{v}|\right)^2 \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| + |\vec{v}|^2 \Rightarrow$$

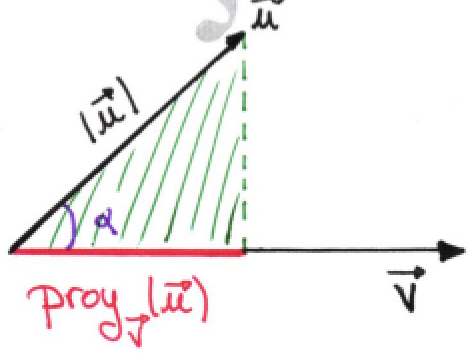
$$\Rightarrow \cancel{|\vec{u}|^2} + 2\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha + \cancel{|\vec{v}|^2} = \cancel{|\vec{u}|^2} + 2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| + \cancel{|\vec{v}|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\,\cancel{|\vec{u}|}\cdot\cancel{|\vec{v}|}\cdot\cos\alpha = \cancel{2}\,\cancel{|\vec{u}|}\cdot\cancel{|\vec{v}|} \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos(1) = 0^\circ$$

Es decir, que $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}|+|\vec{v}|$ solo cuando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 0°, es decir, cuando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos y con el mismo sentido.

30) Calcula la proyección y el vector proyección del vector $\vec{u} = (3,1,2)$ sobre el vector $\vec{v} = (2,1,1)$



$$\cos\alpha = \frac{proy_{\vec{v}}(\vec{u})}{|\vec{u}|} \Rightarrow proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\cdot\cos\alpha$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}|\cdot\underbrace{|\vec{u}|\cdot\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}|\cdot proy_{\vec{v}}(\vec{u}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}|} = \frac{(2,1,1)\cdot(3,1,2)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{6+1+2}{\sqrt{6}} = \frac{9}{\sqrt{6}}$$

Para el vector proyección necesitamos el vector unitario en la dirección de $\vec{v}$:

$$\vec{u_v} = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(2,1,1)$$

Y por tanto:

$$\overrightarrow{proy_{\vec{v}}(\vec{u})} = proy_{\vec{v}}(\vec{u})\cdot\vec{u_v} = \frac{9}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(2,1,1) = \frac{3}{2}(2,1,1) = \left(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

31) Calcula el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $\vec{u}=(1,2,0)$ y $proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

Tal y como hemos visto en el ejercicio anterior:

$$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{proy_{\vec{v}}(\vec{u})}{|\vec{u}|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-2/\sqrt{5}}{\sqrt{1^2+2^2}} = -\frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-2}{5}\right) = 113'58^\circ$$

32) De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ y que forman un ángulo de $\alpha=120^\circ$. Calcula $|\vec{a}-\vec{b}|$

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}-\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ} - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 120 + |\vec{b}|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 5^2 \Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}| = 7$$

33) Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = -11$, calcula $|\vec{v}|$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}\ \cancel{-\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u}} - \vec{v}\cdot\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

$$\Rightarrow (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ} - |\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ}$$

$$\Rightarrow (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 \Rightarrow -11 = 3^2 - |\vec{v}|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{v}|^2 = 20 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{20}$$

34) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores perpendiculares que verifican $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 5$. Calcula $|\vec{u}+\vec{v}|$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = |\vec{u}+\vec{v}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} \Longrightarrow$$ Como $\vec{u} \perp \vec{v} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \\ \vec{v}\cdot\vec{u} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$\Longrightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ} + |\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \Longrightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{34}$$

35) Si $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y $|\vec{u}+\vec{v}| = 5$, ¿qué ángulo forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = |\vec{u}+\vec{v}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} \Longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

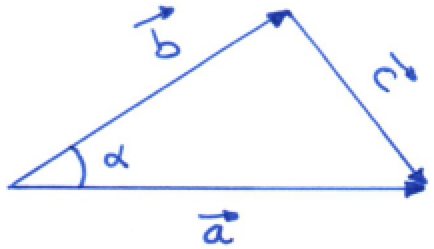
$$\Longrightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ} + 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha + |\vec{v}|^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 5^2 = 4^2 + 2\cdot 4\cdot 3\cdot\cos\alpha + 3^2 \Longrightarrow 25 = 16 + 24\cos\alpha + 9 \Longrightarrow$$

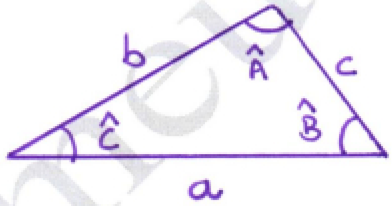
$$\Rightarrow 24\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \arccos(0) = 90^\circ$$

36) Dado el triángulo de la figura:



Demuestra el teorema del coseno utilizando el cálculo vectorial.

¡Recuerda!! TEOREMA DEL COSENO $\Rightarrow$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$$

Como vemos en la figura, $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

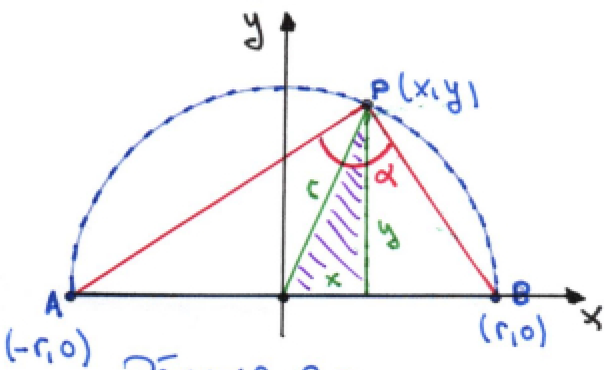
$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}-\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|\cdot \cancelto{1}{\cos 0^\circ} = |\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ} - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha + |\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cancelto{1}{\cos 0^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

37) Demostrar que cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.



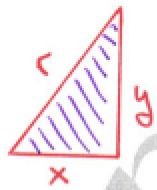
$$\overrightarrow{PA} = (-r, 0) - (x, y) = (-r-x, -y)$$

$$\overrightarrow{PB} = (r, 0) - (x, y) = (r-x, -y)$$

Si el ángulo en P es de 90°, los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son perpendiculares y por tanto $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$. Veámoslo:

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-r-x,-y)\cdot(r-x,-y)=(-r-x)\cdot(r-x)+y^2=$$

$$=-(r+x)(r-x)+y^2=-(r^2-x^2)+y^2=x^2+y^2-r^2=r^2-r^2=0$$



$\longrightarrow$ PITÁGORAS $r^2=x^2+y^2$

Como $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0 \Rightarrow \overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB} \Rightarrow$ El ángulo en P es un ángulo recto como queríamos demostrar.

38) Encuentra todos los vectores $\vec{u}=(a^2,-1,a-1)$ perpendiculares a $\vec{v}=(1,1,1)$ y paralelos al vector $\vec{w}=(-8,2,6)$

Si $\vec{u}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$(a^2,-1,a-1)\cdot(1,1,1)=0 \Rightarrow a^2-1+a-1=0 \Rightarrow a^2+a-2=0$

(Ecuación 1)

Si $\vec{u}\parallel\vec{w} \Rightarrow \vec{u}=k\,\vec{w}$

$$\frac{a^2}{-8}=\frac{-1}{2}=\frac{a-1}{6}$$

$\longrightarrow 2a^2=8 \Rightarrow a^2=4$ (Ec. 2)

$\longrightarrow -6=2a-2 \Rightarrow 2a=-4$ (Ec. 3)

$\longrightarrow 6a^2=-8a+8 \Rightarrow 6a^2+8a-8=0$ (Ec. 4)

Veamos qué valores de "a" verifican simultáneamente las cuatro ecuaciones:

$$a^2+a-2=0 \rightarrow a=1,\ a=-2$$

$$a^2=4 \rightarrow a=-2,\ a=2$$

$$2a=-4 \longrightarrow a=-2$$

$$6a^2+8a-8=0 \rightarrow a=2/3,\ a=-2$$

El único valor que verifica todas las ecuaciones es $a=-2$ y por tanto el vector $\vec{u}$ pedido es:

$$\vec{u}=(4,-1,-3)$$

39) Determina el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si los vectores $(\vec{u}+\vec{v})$ y $(\vec{u}-\vec{v})$ son perpendiculares, $|\vec{u}|=2$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\sqrt{3}$

Si $(\vec{u}+\vec{v})\perp(\vec{u}-\vec{v}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot \overset{1}{\cancel{\cos 0^\circ}} \cancel{-2\sqrt{3}} \cancel{+2\sqrt{3}} -|\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot \overset{1}{\cancel{\cos 0^\circ}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2=0 \Rightarrow |\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{u}|=|\vec{v}|=2$$

Por otro lado:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cancel{2}\sqrt{3}=\cancel{2}\cdot 2\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

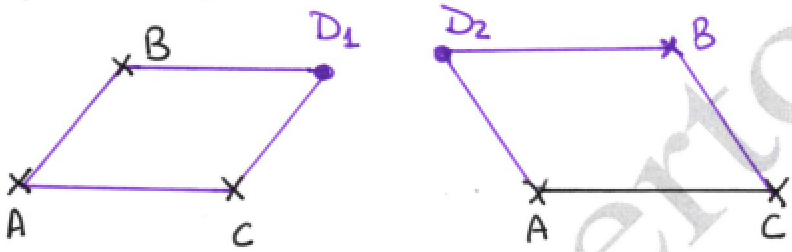
$$\Rightarrow \alpha=30^\circ$$

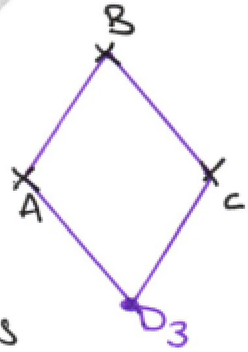
40) Dados los puntos $A(0,-1,2)$, $B(-1,3,0)$ y $C(0,-2,0)$ calcula

a) las coordenadas del punto D que hacen que ABCD sea un paralelogramo

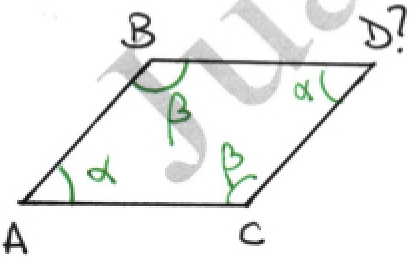
b) El perímetro del paralelogramo y sus ángulos

Ojo!! → Hay varios puntos D que harán que ABCD sea un paralelogramo ya que:





Vamos a resolver solo una de las opciones al no darnos el enunciado datos para decidir qué opción hacer. Tomemos por ejemplo:



$$\vec{AC} = (0,-2,0)-(0,-1,2) = (0,-1,-2)$$

Y por tanto:

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD} = \vec{OB} + \vec{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{OD} = (-1,3,0)+(0,-1,-2) = (-1,2,-2) \Rightarrow D(-1,2,-2)$$

Para calcular el perímetro:

$$\vec{AB} = (-1,3,0)-(0,-1,2) = (-1,4,-2)$$

Y el perímetro:

$$P = |\vec{AB}| + |\vec{BD}| + |\vec{CD}| + |\vec{AC}| = 2 \cdot |\vec{AB}| + 2 \cdot |\vec{AC}| =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{1^2+4^2+2^2} + 2 \cdot \sqrt{1^2+2^2} = 2\sqrt{21} + 2\sqrt{5} \approx 13'64 \text{ u.}$$

Para el ángulo α:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{(-1,4,-2) \cdot (0,-1,-2)}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4+4}{\sqrt{105}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Con lo que $\beta = 90^\circ$, y la figura era un rectángulo.

No olvides que en este ejercicio puede haber otras soluciones para el punto D, el perímetro y los ángulos.

41) Dados los vectores $\vec{u} = (-1,2,2)$ y $\vec{v} = (3,2,-5)$, calcula

a) El ángulo que forman (α)

b) El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$

c) El módulo $|\vec{u} \times \vec{v}|$

d) Comprueba que se verifica $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{(-1,2,2)\cdot(3,2,-5)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+5^2}} = \frac{-3+4-10}{3\sqrt{38}} = \frac{-9}{3\sqrt{38}} = \frac{-3}{\sqrt{38}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{38}}\right) = 119'12^\circ = 119^\circ 7' 17.65''$$

b) $$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -14\vec{i}+\vec{j}-8\vec{k} = (-14,1,-8)$$

c) $|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{14^2+1^2+8^2} = \sqrt{261} \approx 16'1555$

d) $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}\alpha = 3\sqrt{38}\cdot\operatorname{sen}(119^\circ 7' 17.65'') = 16'1555$

Con lo que efectivamente $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}\alpha$

42) Dados los vectores $\vec{a} = (3,-4,5)$ y $\vec{b} = (-2,3,1)$ comprueba que se cumple que $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-19,-13,1)$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{19^2+13^2+1^2} = \sqrt{531} \simeq 23'04$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (3,-4,5)\cdot(-2,3,1) = -6-12+5 = -13$$

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = 13^2 = 169 \\ |\vec{u}| = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = \sqrt{50} \\ |\vec{v}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}\end{array}\right\} \quad |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \sqrt{50}\cdot\sqrt{14} - 169 = -142'54$$

Y por tanto, no se verifica:

$$|\vec{u}\times\vec{v}| \neq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$

43) Demuestra que $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$

Sean los vectores:

$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$; $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$; $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$

$$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x+w_x & v_y+w_y & v_z+w_z \end{vmatrix} = (\text{Prop. 6 determinantes}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w} \text{ como}$$

queríamos demostrar.

44) Encuentra dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que tengan módulo 5 y que sean perpendiculares simultáneamente a los vectores $\vec{u} = (2, 0, -1)$ y $\vec{v} = (6, -3, 2)$

El vector producto $\vec{u} \times \vec{v}$ será perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-3, -10, -6)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{3^2 + 10^2 + 6^2} = \sqrt{145}$$

Obtenemos el vector unitario en la dirección de $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\overrightarrow{u_{u \times v}} = \frac{1}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{145}} \cdot (-3, -10, -6)$$

y por tanto, los vectores pedidos son:

$$\vec{a} = 5 \cdot \overrightarrow{u_{u \times v}} = \frac{5}{\sqrt{145}} \cdot (-3, -10, -6)$$

$$\vec{b} = -5 \cdot \overrightarrow{u_{u \times v}} = \frac{-5}{\sqrt{145}} \cdot (-3, -10, -6)$$

45) Dados los vectores $\vec{a}=(-4,1,1)$ y $\vec{b}=(-2,-3,-5)$, calcula un vector $\vec{c}$ para que el sistema de vectores $B=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ sea una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. A partir de la base B, obtén otra base B' que sea ortonormal.

Primero veamos si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-4,1,1)\cdot(-2,-3,-5)=8-3-5=0$$

Como $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

Ahora buscamos un vector $\vec{c}$ que sea perpendicular a ambos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto, $\vec{c}$ será:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 1 & 1\\ -2 & -3 & -5\end{vmatrix}=(-2,-22,14)$$

Y por tanto:

$$B=\{(-4,1,1),(-2,-3,-5),(-2,-22,14)\}$$ es base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

Para construir la base B', solo nos falta que los vectores sean unitarios. Así:

$$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+1^2+1^2}=\sqrt{18} \Rightarrow \vec{u}_a=\frac{1}{\sqrt{18}}\cdot(-4,1,1)=\left(\frac{-4}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+3^2+5^2}=\sqrt{38} \Rightarrow \vec{u}_b=\frac{1}{\sqrt{38}}\cdot(-2,-3,-5)=\left(\frac{-2}{\sqrt{38}},\frac{-3}{\sqrt{38}},\frac{-5}{\sqrt{38}}\right)$$

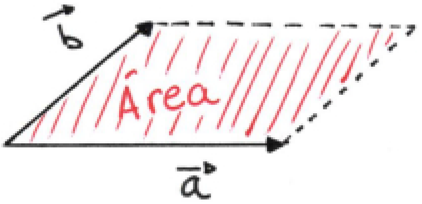
$$|\vec{c}| = \sqrt{2^2+22^2+14^2} = \sqrt{684} = 6\sqrt{19} \Rightarrow \vec{u_c} = \frac{1}{6\sqrt{19}} \cdot (-2,-22,14) = \left(\frac{-1}{3\sqrt{19}}, \frac{-11}{3\sqrt{19}}, \frac{7}{3\sqrt{19}}\right)$$

Y por tanto:

$$B' = \left\{\left(\frac{-4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-2}{\sqrt{38}}, \frac{-3}{\sqrt{38}}, \frac{-5}{\sqrt{38}}\right), \left(\frac{-1}{3\sqrt{19}}, \frac{-11}{3\sqrt{19}}, \frac{7}{3\sqrt{19}}\right)\right\}$$ es una

base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

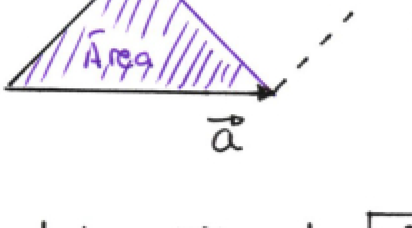
46) Calcula el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{a} = (1,5,-2)$ y $\vec{b} = (2,0,1)$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (5,-5,-10)$$

$$\text{Área} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2+5^2+10^2} = \sqrt{150}\ u^2 \approx 12'25\ u^2$$

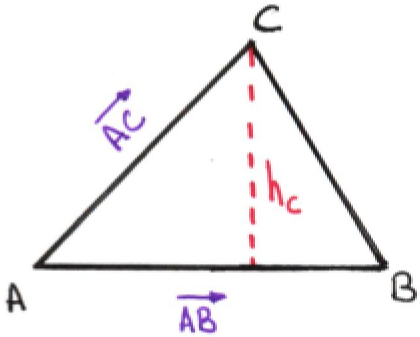
47) Calcula el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ siendo $\vec{a} = (1,0,2)$ y $\vec{b} = (1,1,-1)$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,3,1)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14}\ u^2 \approx 1'87\ u^2$$

48) Determina el área del triángulo determinado por los puntos $A(-2,-2,0)$, $B(1,0,-1)$ y $C(0,4,-1)$. ¿Cuál es la altura correspondiente al vértice C?



$\vec{AB} = (1,0,-1) - (-2,-2,0) = (3,2,-1)$

$\vec{AC} = (0,4,-1) - (-2,-2,0) = (2,6,-1)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = (4,1,14)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2+1^2+14^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{213}\ u^2 \approx 7'3\ u^2$$

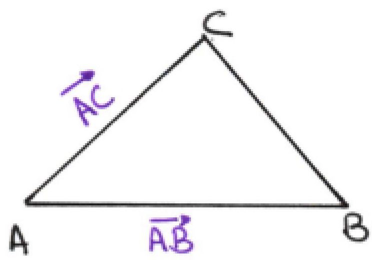
Para la altura h_c:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot h_c \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \sqrt{213} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3^2+2^2+1^2} \cdot h_c \Rightarrow \sqrt{213} = \sqrt{14} \cdot h_c \Rightarrow h_c = \sqrt{\frac{213}{14}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_c = 3'9\ u$$

49) Determina el valor de "m" para que los puntos $A(1,0,1)$ $B(1,1,1)$ y $C(1,6,m)$ determinen un triángulo de área $\frac{3}{2}\ u^2$



$\vec{AB} = (1,1,1) - (1,0,1) = (0,1,0)$

$\vec{AC} = (1,6,m) - (1,0,1) = (0,6,m-1)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1, 0, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(m-1)^2}$$

$$\text{Área} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{(m-1)^2} \Rightarrow \left(\sqrt{(m-1)^2}\right)^2 = (3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 = 9 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 9 \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases}$$

50) Dado $\vec{u} = (6, 4, -3)$, encuentra $\vec{v} = (x, y, z)$ que verifique que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$ y que $\vec{u} \times \vec{v} = (17, -15, 14)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 \Rightarrow (6, 4, -3) \cdot (x, y, z) = 12$$

$$6x + 4y - 3z = 12 \quad \text{(Ecuación 1)}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (17, -15, 14) \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 4 & -3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (4z + 3y, -6z - 3x, 6y - 4x)$$

$$\Rightarrow (4z + 3y, -6z - 3x, 6y - 4x) = (17, -15, 14) \begin{cases} 3y + 4z = 17 & \text{(Ec. 2)} \\ 3x + 6z = 15 & \text{(Ec. 3)} \\ -4x + 6y = 14 & \text{(Ec. 4)} \end{cases}$$

Veamos si el sistema de 4 ecuaciones admite solución:

$$\left.\begin{aligned} 6x+4y-3z&=12\\ 3y+4z&=17\\ 3x \qquad +6z&=15\\ -4x+6y \qquad &=14\end{aligned}\right\} \quad A^{*}=\left(\begin{array}{ccc:c} 6 & 4 & -3 & 12\\ 0 & 3 & 4 & 17\\ 3 & 0 & 6 & 15\\ -4 & 6 & 0 & 14\end{array}\right)$$

Rango (A):

$$|6|=6\neq 0\,; \quad \begin{vmatrix} 6 & 4\\ 0 & 3\end{vmatrix}=18\neq 0\,; \quad \begin{vmatrix} 6 & 4 & -3\\ 0 & 3 & 4\\ 3 & 0 & 6\end{vmatrix}=183\neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$$

Rango (A*):

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & -3 & 12\\ 0 & 3 & 4 & 17\\ 3 & 0 & 6 & 15\\ -4 & 6 & 0 & 14\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -3 & 12\\ 0 & 3 & 4 & 17\\ 0 & -2 & 15/2 & 9\\ 0 & \frac{26}{3} & -2 & 22\end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 17\\ -2 & 15/2 & 9\\ \frac{26}{3} & -2 & 22\end{vmatrix} = 6\cdot 0 = 0$$

$-\frac{1}{3}F_1+F_3$

$\frac{2}{3}F_1+F_4$

$$\Rightarrow rg(A^{*})=3$$

$$\left.\begin{aligned} rg(A)&=3\\ rg(A^{*})&=3\\ n^{o}\,incóg&=3\end{aligned}\right\}$$

T^{ma} ROUCHÉ
$\Downarrow$
Sistema Compatible Determinado

$\Rightarrow$ Cogemos las ecuaciones determinadas y resolveremos por Cramer:

$$\left.\begin{aligned} 6x+4y-3z&=12\\ 3y+4z&=17\\ 3x \qquad +6z&=15\end{aligned}\right\} \quad A^{*}=\left(\begin{array}{ccc:c} 6 & 4 & -3 & 12\\ 0 & 3 & 4 & 17\\ 3 & 0 & 6 & 15\end{array}\right), \quad det(A)=183$$

(ya calculado!!)

Aplicamos Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 4 & -3 \\ 17 & 3 & 4 \\ 15 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{183} = \frac{183}{183} = 1 \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 0 & 17 & 4 \\ 3 & 15 & 6 \end{vmatrix}}{183} = \frac{549}{183} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & 17 \\ 3 & 0 & 15 \end{vmatrix}}{183} = \frac{366}{183} = 2$$

El vector $\vec{v}$ pedido es $\vec{v} = (1, 3, 2)$

51) Encuentra las componentes de un vector $\vec{u}$ sabiendo que $|\vec{u}| = \sqrt{6}$ y que $\vec{u} \times (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$

Sea $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{6} \Rightarrow u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 6 \quad \text{(Ec. 1)}$$

$$\vec{u} \times (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 3, 5) \Longrightarrow (-u_y - u_z, u_x + 2u_z, u_x - 2u_y) = (1, 3, 5)$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} -u_y - u_z &= 1 \\ u_x \quad + 2u_z &= 3 \\ u_x - 2u_y &= 5 \end{aligned}\right\} \text{(Sistema 1)}$$

Al ser la ecuación 1 NO LINEAL y al ser el sistema 1 un sistema de ecuaciones LINEALES, resolveremos el sistema y luego veremos si la solución verifica la ecuación 1. Así:

$$\left.\begin{array}{l} -u_y - u_z = 1 \\ u_x + 2u_z = 3 \\ u_x - 2u_y = 5 \end{array}\right\} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Rango(A):

$$|1| = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Rango(A*):

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A^*) = 2 \\ n^o\ inc\acute{o}g = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} T^{\underline{ma}}\ ROUCHÉ \\ \Downarrow \\ \text{Sistema Compatible} \\ \text{Indeterminado} \end{array}$$

Cogemos las ecuaciones determinadas por el rango:

$$\left.\begin{array}{l} -u_y - u_z = 1 \\ u_x + 2u_z = 3 \end{array}\right\} u_z = \lambda \begin{array}{l} \nearrow u_y = -1 - \lambda \\ \searrow u_x = 3 - 2\lambda \end{array}$$

Los vectores $\vec{u}$ que verifican el sistema son los dados por el conjunto:

$$\left\{ (u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{u} = (3-2\lambda, -1-\lambda, \lambda)\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Ahora se trata de ver cuál o cuáles de esos vectores $\vec{u}$ verifican también la ecuación 1. Así:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = (3-2\lambda, -1-\lambda, \lambda)$$

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 6 \Rightarrow (3-2\lambda)^2 + (-1-\lambda)^2 + \lambda^2 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 - 12\lambda + 4\lambda^2 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 = 6 \Rightarrow 6\lambda^2 - 10\lambda + 10 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2/3 \end{cases}$$

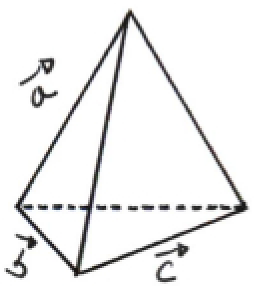
Los vectores pedidos son por tanto:

$$\vec{u} = (3-2\lambda, -1-\lambda, \lambda) \quad \begin{cases} \xrightarrow{\lambda = 1} \vec{u}_1 = (1, -2, 1) \\ \xrightarrow{\lambda = 2/3} \vec{u}_2 = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

52) Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{a} = (5, 3, -1)$ $\vec{b} = (-2, -1, 2)$ y $\vec{c} = (0, -1, 3)$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

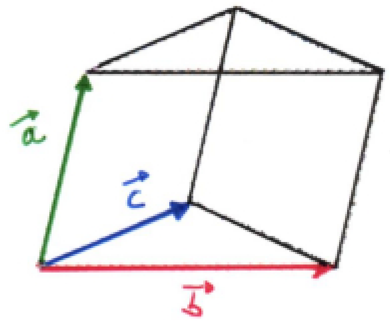
53) Encuentra el volumen del tetraedro las aristas del cual son los vectores $\vec{a} = (5, 1, -2)$, $\vec{b} = (3, 4, 2)$ y $\vec{c} = (4, 1, 3)$



$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 75$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot \left| [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \right| = \frac{1}{6} \cdot 75 = 12'5 \; u^3$$

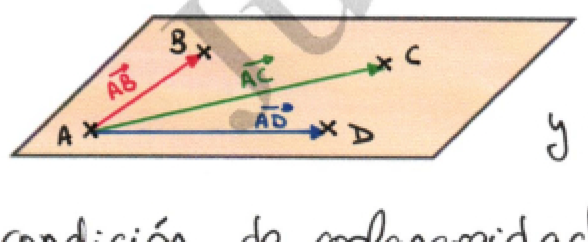
54) Encuentra el volumen del prisma triangular las aristas del cual son $\vec{a} = (-1, 1, -2)$, $\vec{b} = (6, -1, 2)$ y $\vec{c} = (0, -2, 0)$



$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 20$$

$$V_{prisma} = \frac{1}{2} \cdot \left| [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \right| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \; u^3$$

55) ¿Son coplanarios los puntos $A(1,1,-1)$, $B(-3,0,-7)$, $C(1,4,5)$ y $D(-2,3,5)$?



Si los cuatro puntos A, B, C, y D son coplanarios, los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AD}$ son coplanarios también. La condición de coplanareidad de tres vectores es que su producto mixto sea nulo. Evaluamos por tanto el producto mixto $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$:

$\vec{AB} = (-3,0,-7)-(1,1,-1) = (-4,-1,-6)$

$\vec{AC} = (1,4,5)-(1,1,-1) = (0,3,6)$

$\vec{AD} = (-2,3,5)-(1,1,-1) = (-3,2,6)$

$$[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}] = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -60$$

Como $[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}] \neq 0 \Rightarrow$ Los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AD}$ no son coplanarios $\Rightarrow$ Los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

56) Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ que tienen el mismo módulo "K", ¿Cuál es el máximo y el mínimo valor que puede tomar el producto mixto $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$?

Se tiene que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = K$

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}\times\vec{c}|\cdot\cos\varphi$, siendo φ el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $(\vec{b}\times\vec{c})$

A su vez, $|\vec{b}\times\vec{c}| = |\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot \text{sen}\,\alpha$, siendo α el ángulo que forman los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

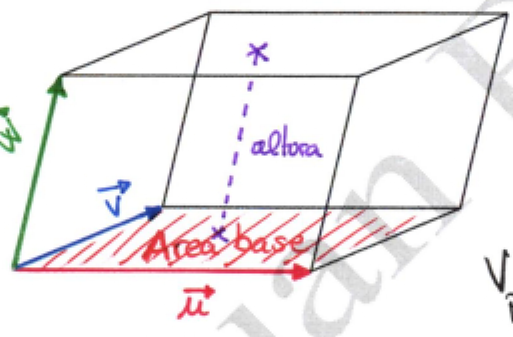
Así, $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot \text{sen}\,\alpha\cdot\cos\varphi = K^3\cdot \text{sen}\,\alpha\cdot\cos\varphi$

Como sen(α) y cos(φ) son funciones acotadas cuyo máximo valor es 1 y cuyo mínimo valor es -1 se tendrá:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]_{máx} = K^3 \cdot 1 \cdot 1 = K^3$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]_{min} = K^3 \cdot (-1) \cdot 1 = -K^3$$

57) Un paralelepípedo tiene por aristas a los vectores $\vec{u} = (-3, 9, 2)$, $\vec{v} = (1, 5, -1)$ y $\vec{w} = (6, 7, -6)$. Considerando que la base es el paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ¿cuál es la altura del paralelepípedo?



$$[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 6 & 7 & -6 \\ -3 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 23$$

$$V_{paralelepípedo} = \left| [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] \right| = |23| = 23\, u^3$$

Por otro lado:

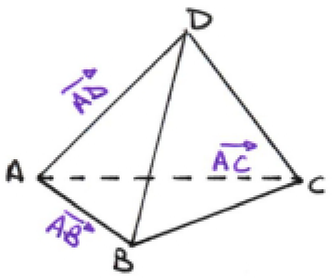
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-19, -1, -24)$$

$$Área_{base} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{19^2 + 1^2 + 24^2} = \sqrt{938}\; u^2$$

Y como $V_{paralelepípedo} = Área_{base} \cdot altura \Rightarrow altura = \dfrac{V_{paralelepípedo}}{Área_{base}}$

$$\Rightarrow h = \frac{|[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{23}{\sqrt{938}} \simeq 0'751\ u.$$

58) Determina el valor de "K" sabiendo que el tetraedro de vértices $A(3,5,7)$, $B(1,0,-1)$, $C(7,-1,4)$ y $D(K,4,-6)$ tiene un volumen de $107\ u^3$



$\vec{AB} = (1,0,-1)-(3,5,7) = (-2,-5,-8)$

$\vec{AC} = (7,-1,4)-(3,5,7) = (4,-6,-3)$

$\vec{AD} = (K,4,-6)-(3,5,7) = (K-3,-1,-13)$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -2 & -5 & -8 \\ 4 & -6 & -3 \\ K-3 & -1 & -13 \end{vmatrix} = -33K-279$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot \left|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]\right| \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot |-33K-279| = 107 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-33K-279| = 642$$

$$-33K-279 = \pm 642 \begin{cases} -33K-279 = 642 \Rightarrow K = -\dfrac{307}{11} \\ -33K-279 = -642 \Rightarrow K = 11 \end{cases}$$

59) Dados los vectores $\vec{u}=(2,-2,0)$ y $\vec{v}=(1,1,-4)$, encuentra los vectores unitarios $\vec{w}$ que sean coplanarios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y perpendiculares a $\vec{v}$.

Sean los vectores $\vec{w}=(x,y,z)$

$\vec{w}$ es unitario $\Rightarrow |\vec{w}|=1$:

$$|\vec{w}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=1 \quad (\text{Ec. } 1)$$

$\vec{w}$, $\vec{u}$, y $\vec{v}$ son coplanarios $\Rightarrow [\vec{w},\vec{u},\vec{v}]=0$:

$$[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}=8x+8y+4z \Rightarrow 8x+8y+4z=0 \quad (\text{Ec. } 2)$$

$\vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{v}=0$

$$\vec{w}\cdot\vec{v}=(x,y,z)\cdot(1,1,-4)=x+y-4z \Rightarrow x+y-4z=0 \quad (\text{Ec. } 3)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales (Ec. 2 y Ec. 3)

$$\left.\begin{array}{r} 8x+8y+4z=0 \\ x+y-4z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} 9x+9y=0 \longrightarrow x=-y \quad \begin{cases} y=\lambda \\ x=-\lambda \end{cases}$$

$$4z=x+y \longrightarrow 4z=-\lambda+\lambda \Rightarrow 4z=0 \Rightarrow z=0$$

Los vectores $\vec{w}$ que verifican las ecuaciones 2 y 3 son los del conjunto $\{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 / \vec{w} = (-\lambda, \lambda, 0)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$. De entre ellos, los que verifican además la ecuación 1:

$$(-\lambda)^2 + \lambda^2 + 0^2 = 1 \Rightarrow 2\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \begin{cases} \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Y por tanto, los vectores $\vec{w}$ pedidos son:

$$\vec{w}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \quad y \quad \vec{w}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

60) Dados tres vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ linealmente independientes calcula los productos mixtos:

a) $[\vec{a}+\vec{c}, \vec{a}-\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]$

b) $[\vec{a}-\vec{c}, \vec{b}-\vec{c}, \vec{c}-\vec{a}]$

c) ¿Qué puedes decir de $[\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}]$?

Sea el sistema de vectores $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Como S es linealmente independiente, entonces se tendrá que $rg(S) = 3$ y por tanto será $\det(S) \neq 0$. Es decir:

$$rg(S) = rg\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$

a) $\left[\vec{a}+\vec{c}, \vec{a}-\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_x+c_x & a_y+c_y & a_z+c_z \\ a_x-c_x & a_y-c_y & a_z-c_z \\ a_x+b_x+c_x & a_y+b_y+c_y & a_z+b_z+c_z \end{vmatrix} =$

$$\underset{F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix} a_x+c_x & a_y+c_y & a_z+c_z \\ 2a_x & 2a_y & 2a_z \\ a_x+b_x+c_x & a_y+b_y+c_y & a_z+b_z+c_z \end{vmatrix} \underset{-F_1+F_3}{=} 2\cdot \begin{vmatrix} a_x+c_x & a_y+c_y & a_z+c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$\underset{-F_2+F_1}{=} 2\cdot \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 2\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}_{\neq 0} \neq 0$$

b) $\left[\vec{a}-\vec{c}, \vec{b}-\vec{c}, \vec{c}-\vec{a}\right] = \begin{vmatrix} a_x-c_x & a_y-c_y & a_z-c_z \\ b_x-c_x & b_y-c_y & b_z-c_z \\ c_x-a_x & c_y-a_y & c_z-a_z \end{vmatrix} =$

$$\underset{F_1+F_3}{=} \begin{vmatrix} a_x-c_x & a_y-c_y & a_z-c_z \\ b_x-c_x & b_y-c_y & b_z-c_z \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

c) $\left[\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} a_x+c_x & a_y+c_y & a_z+c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x+b_x & a_y+b_y & a_z+b_z \end{vmatrix} =$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ -F_2+F_3 \end{array} \begin{vmatrix} a_x+c_x & a_y+c_y & a_z+c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \overset{-F_3+F_1}{=} \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= - \underbrace{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}_{\neq 0} \neq 0$$