① Halla la tasa de variación media de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en los intervalos $[1,2]$ y $[1,10]$

② Dadas las funciones $f(x) = \frac{1-x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$ determina la T.V.M de ambas en los intervalos $[2,3]$ y $[-3,-2]$

③ Dada $f(x) = x^2+2x$, obtener $f'(2)$ utilizando la definición de derivada de una función en un punto.

④ Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(3)$ en las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3x-2}{7}$ b) $f(x) = x^2-4$

c) $f(x) = (x-5)^2$ d) $f(x) = \frac{2+x}{x}$

⑤ Utilizando la definición de función derivada, calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5x+1}{2}$ b) $f(x) = 3x^2-1$ c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{x-1}{x}$ e) $f(x) = x^2+2x+3$ f) $f(x) = \sqrt{x}$

g) $f(x) = \frac{3}{x}$ h) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ i) $f(x) = e^x$

j) $f(x) = \ln(x)$ k) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ l) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

⑥ Dada $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<2 \\ x-1 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$, halla $f'(1)$ y $f'(3)$ utilizando la definición de derivada.

⑦ Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3+4x & \text{si } x<1 \\ 6x-1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$, ¿existe $f'(1)$?

⑧ Expresa la función $f(x) = |x-4|$ como una función definida a trozos y luego calcula $f'(3)$, $f'(5)$, y $f'(4)$ utilizando la definición de derivada.

⑨ Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 6$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ f) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$

g) $f(x) = 6x^3$ h) $f(x) = \sqrt[3]{3x^4}$ i) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}$

j) $f(x) = 5x^2-4x^3$ k) $f(x) = x^2+\sqrt{x}$ l) $f(x) = (x^3+x^2)\cdot(1-x^3)$

m) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-1}$ n) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1}$ o) $f(x) = \dfrac{x^3-5x^2}{4}$

p) $f(x) = \dfrac{x}{2}$ q) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ r) $f(x) = \dfrac{x^4-5x^3+x^2}{2}$

s) $f(x) = (x^2+5)^3$ t) $f(x) = \dfrac{(x+8)^3}{(x-2)^2}$ u) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{(1-x)^2}$

v) $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$ w) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$ x) $f(x) = \dfrac{6}{(x^2-3)^2}$

y) $f(x) = \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^3$ z) $f(x) = \sqrt{\dfrac{24-\sqrt{3}}{\pi^2+5}}$

(10) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = e^x$ c) $f(x) = \log_3(x)$

d) $f(x) = \ln(x)$ e) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$ f) $f(x) = \dfrac{-1}{x} + x$

g) $f(x) = 3^x - \operatorname{arctg}(x)$ h) $f(x) = 2\operatorname{sen}(x) - 3\cos(x)$ i) $f(x) = \operatorname{sen}x \cdot \cos x$

j) $f(x) = x \cdot e^x$ k) $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$ l) $f(x) = (x^2+2x)\cdot \operatorname{sen}(x)$

m) $f(x) = (e^x - x)\cdot \log_3 x$ n) $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(x)$ o) $f(x) = 4x\operatorname{sen}x + x^3 \cdot \cos x$

p) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{tg}x$ q) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$ r) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$

s) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}x + 2x}{x-3}$ t) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$ u) $f(x) = (\operatorname{arcsen}(x))^3$

v) $f(x) = \ln(x^2+3)$ w) $f(x) = e^{x^2+7x-4}$ x) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{x-5}\right)$

y) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ z) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

11 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2+3}$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{(2-x)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \left(0'5 - \dfrac{x}{10}\right)^4$ e) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ f) $f(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3$

g) $f(x) = \dfrac{x}{(2x+1)^3}$ h) $f(x) = e^{4x}\cdot(x-1)$ i) $f(x) = \dfrac{(1-x)^2}{e^x}$

j) $f(x) = \sqrt{2^x}$ k) $f(x) = \ln(2x-1)$ l) $f(x) = \ln(x^2-1)$

m) $f(x) = \ln(\sqrt{1-x})$ n) $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x}$ o) $f(x) = e^{x^2+1}$

p) $f(x) = \operatorname{sen} x\cdot\cos^2 x$ q) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}$ r) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x^2)$

s) $f(x) = \cos^3(2x+1)$ t) $f(x) = \log_2\left(\dfrac{1}{x}\right)$ u) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x^2)}$

v) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ w) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ x) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

y) $f(x) = \ln(\operatorname{sen}(\sqrt{e^x}))$ z) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

12 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a_1) $f(x) = e^{4x}$ a_2) $f(x) = \log_5(7x+2)$ a_3) $f(x) = 5\cdot e^{x^2+3x}$

b_1) $f(x) = (x^3+1)\cdot(x^3-1)$ b_2) $f(x) = x^3\cdot e^x$ b_3) $f(x) = x^2\cdot\ln(x^2)$

$c_1)\ f(x) = e^x \cdot tg\,x$ $\quad c_2)\ f(x) = sen\,x \cdot \cos(2x)$ $\quad c_3)\ f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

$d_1)\ f(x) = \dfrac{-x}{x+1}$ $\quad d_2)\ f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$ $\quad d_3)\ f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2+3}$

$e_1)\ f(x) = \dfrac{\ln(x^2+5)}{x}$ $\quad e_2)\ f(x) = 5x^3-3x^2+4$ $\quad e_3)\ f(x) = (x^2+1)^3$

$f_1)\ f(x) = \sqrt[3]{x^2+3}$ $\quad f_2)\ f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ $\quad f_3)\ f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$

$g_1)\ f(x) = sen(3x)$ $\quad g_2)\ f(x) = (sen\,x)^5$ $\quad g_3)\ f(x) = e^x \cdot sen\,x$

$h_1)\ f(x) = \cos(3x+1)$ $\quad h_2)\ f(x) = e^{7x^2}$ $\quad h_3)\ f(x) = e^{sen(2x)}$

$i_1)\ f(x) = e^x + \ln x$ $\quad i_2)\ f(x) = \dfrac{\log x^2}{x}$ $\quad i_3)\ f(x) = sen(3x+1) \cdot \cos(3x+1)$

$j_1)\ f(x) = sen(x^2-5x+7)$ $\quad j_2)\ f(x) = x \cdot e^{2x+1}$ $\quad j_3)\ f(x) = \dfrac{2}{(x+3)^3}$

$k_1)\ f(x) = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^2+7x}{5}$ $\quad k_2)\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$ $\quad k_3)\ f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$l_1)\ f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ $\quad l_2)\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}$ $\quad l_3)\ f(x) = tg^3(x^2)$

$m_1)\ f(x) = \sqrt{sen(x)}$ $\quad m_2)\ f(x) = 7^{x+1} \cdot e^{-x}$ $\quad m_3)\ f(x) = \ln x + e^{\sqrt{x}}$

$n_1)\ f(x) = e^{2x} \cdot tg\,x$ $\quad n_2)\ f(x) = \log\left(\dfrac{x^2}{3-x}\right)$ $\quad n_3)\ f(x) = \sqrt{\ln x}$

$o_1)$ $f(x) = (x^2-7x)^3$ $o_2)$ $f(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2$ $o_3)$ $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$p_1)$ $f(x) = \frac{x \cdot e^{-x}}{3^x}$ $p_2)$ $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2)$ $p_3)$ $f(x) = \ln(\operatorname{tg}(2x))$

$q_1)$ $f(x) = \ln\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ $q_2)$ $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right)$ $q_3)$ $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$

$r_1)$ $f(x) = \frac{\cos x + \cos(x+1)}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x+1)}$ $r_2)$ $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}$ $r_3)$ $f(x) = \ln e^{\operatorname{sen} x}$

$s_1)$ $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$ $s_2)$ $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ $s_3)$ $f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x}}$

$t_1)$ $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x^3 \cos x}{\operatorname{sen} x}}\right)$ $t_2)$ $f(x) = \frac{e^{x+3} - 1}{x^2-9}$ $t_3)$ $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}\right)$

$u_1)$ $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ $u_2)$ $f(x) = \frac{\ln\sqrt{x+1}}{x}$ $u_3)$ $f(x) = e^{\ln(\operatorname{sen}^2 x)}$

$v_1)$ $f(x) = \operatorname{tg}(1+\operatorname{sen} x)$ $v_2)$ $f(x) = \operatorname{tg}^3(e^{x^2})$ $v_3)$ $f(x) = 27 + (x-1)^4$

$w_1)$ $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ $w_2)$ $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ $w_3)$ $f(x) = \frac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}$

$x_1)$ $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ $x_2)$ $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ $x_3)$ $f(x) = e^{5x}$

$y_1)$ $f(x) = \sqrt{\sec(x)}$ $y_2)$ $f(x) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x}\right)$ $y_3)$ $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$

$z_1)$ $f(x) = \frac{\cos(2x)+\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)-\operatorname{sen}(2x)}$ $z_2)$ $f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x}}$ $z_3)$ $f(x) = \ln(1+x)^x$

(13) Calcula la primera y la segunda derivada de las funciones:

a) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 7$ b) $f(x) = e^{x^2}$ c) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

(14) Dada la función $f(x) = 2(e^x + 2) - x - \frac{x^2}{2}$, comprueba que se cumple la ecuación $f''(x) = f'(x) + x$

(15) Resuelve la ecuación $f'(x) = 0$ siendo:

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

(16) Calcula la derivada n-ésima de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{-x}$ b) $f(x) = 2^x$ c) $f(x) = x \cdot e^x$

(17) Encuentra la derivada de las siguientes funciones expresadas en forma implícita:

a) $x^2 + y^2 = 4$ b) $x^2 + 2y^2 = 9$ c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

d) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 25 = 0$ e) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ f) $y + \cos(xy) = 0$

g) $y = tg(x \cdot y)$ h) $xy + sen(y) = 5$ i) $y^6 + y - 2x^2 = 0$

j) $y = xy + \operatorname{sen}(xy)$ k) $y = e^y + x$ l) $y = x^3 - 2xy + y^2$

m) $x = \operatorname{arctg}(x-y)$ n) $x^3 + y^3 = xy$ o) $\operatorname{sen} y = xy$

p) $y^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$ q) $\dfrac{y}{x} = 1 + \ln y$ r) $x^2 + y^2 - 2xy = 0$

s) $x = \cos(xy)$ t) $x^3 + 3y^2 - 2ay = 0$ u) $e^{2y} - \ln x^3 = 3$

v) $x^3 + y^3 + xy = 0$ w) $y^3 - 2xy + 7 = 3x + 1$ x) $(2y^2+3)^3 = 5x^3 - 3x$

y) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ z) $y^6 + y^4 - 2x^2 = 0$

18 Encuentra la derivada de las siguientes funciones

a) $y = x^x$ b) $y = x^{\ln x}$ c) $y = (\ln x)^{2x}$

d) $y = x^{\cos x}$ e) $y = (2\sqrt{x})^{\ln x}$ f) $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

g) $y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$ h) $y = x^{\operatorname{sen} x}$ i) $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg} x}$

j) $y = (\sqrt{x})^x$ k) $y = x^{\sqrt{x}}$ l) $y = (x - \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}$

m) $y = (\operatorname{sen} x)^{2x}$ n) $y = \sqrt[x]{\cos x}$ o) $y = (\operatorname{arcsen} x)^{\operatorname{sen} x}$

p) $y=(1+x^2)^x$ q) $y=(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ r) $y=\sqrt[x]{x^3}$

s) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ t) $y=(\operatorname{tg} x)^x$

(19) Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3+3x^2-5$ b) $f(x)=\sqrt{x}$ c) $f(x)=\ln(x)$

d) $f(x)=\frac{1}{x}$ e) $f(x)=\frac{e^x}{x-3}$ f) $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)}$

g) $f(x)=\operatorname{sen} x$ h) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ i) $f(x)=3^x$

(20) Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones, haciendo además su representación gráfica:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{si } x<1 \\ x^2+x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x<3 \\ x^2-4 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x\leq 2 \\ 3x+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

(21) Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x-6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1 & \text{si } x < 2 \\ -2x+5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} e^x+2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+x+3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(22) Expresa las siguientes funciones como funciones definidas a trozos para estudiar su derivabilidad:

a) $f(x) = |x+1|$ b) $f(x) = |x^2-2x|$ c) $f(x) = 2x \cdot |x-4|$

d) $f(x) = |x+2|+|x-3|$ e) $f(x) = x^2-4|x|+3$ f) $f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{1+|x|}$

(23) Estudia la continuidad de las funciones $f(x) = |x|^3 + x + 1$ y $g(x) = |x|^3 + |x| + 1$. Estudia también la derivabilidad.

(24) Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{sen} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ -x^3 + 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 1 - 3\sqrt{2x - 1} & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x(x-2) & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt[3]{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5x + 6 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 - \dfrac{1}{x} & \text{si } -1 < x < 2 \\ \dfrac{5}{4} + 2^{-x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x + 2 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

(25) Calcula el valor de los parámetros para que las siguientes funciones sean derivables en $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2-5x+a & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2+bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx-3 & \text{si } x < 1 \\ 2bx-4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x < -2 \\ x^2-bx-4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

(26) Determina, si es posible, el valor de los parámetros para que las siguientes funciones sean continuas y derivables en $\mathbb{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax & \text{si } x \leq -3 \\ \dfrac{x}{x+4} & \text{si } x > -3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x+e^{1-x} & \text{si } x < 1 \\ 1+\sqrt{x+m} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x < 0 \\ a^2-\operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1+a\cdot\sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1) & \text{si } x > 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} (x+b)^2 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{ax}{\sqrt{x+2}} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \ln(e+\operatorname{sen}x) & \text{si } x<0 \\ x^3+ax+b & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} e^{a(x-\pi)} & \text{si } x<\pi \\ 2a+b\cdot\operatorname{sen}(x-\pi) & \text{si } x\geq\pi \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} 2e^x+x+a & \text{si } x\leq 0 \\ x^2+b(x+1) & \text{si } 0<x\leq 2 \\ x^4-3a & \text{si } x>2 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} -x^3+7x+c & \text{si } x\leq -2 \\ ax^2+3x+11 & \text{si } -2<x\leq \frac{3}{2} \\ 18\sqrt{2x+1}+b & \text{si } x>\frac{3}{2} \end{cases}$

(27) Determina el valor de los parámetros para que las siguientes funciones sean continuas en $\mathbb{R}$. Para los valores obtenidos, estudia la derivabilidad:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+6x+8 & \text{si } x\leq -2 \\ 2x+4 & \text{si } -2<x\leq 0 \\ a\cdot\cos x & \text{si } x>0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}x & \text{si } x\leq 0 \\ x-ax^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si } 0\leq x<\pi \\ ax^2+b & \text{si } x\geq\pi \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } x<-1 \\ ax+b & \text{si } -1\leq x<0 \\ 3x^2+2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1$ b) $f(x) = \frac{3}{2-x}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

d) $f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{x-3}}$ e) $f(x) = \frac{3x-1}{x^3 - 25x^2}$ f) $f(x) = \frac{1}{(x-5)(x+3)}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ h) $f(x) = \frac{x-8}{\sqrt{x^4 - 1}}$ i) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}$

j) $f(x) = \frac{1}{2 - 2^{1/x}}$ k) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ l) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{4-x}\right)$

m) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$ n) $f(x) = \sqrt[5]{e^{x^2+5}}$ o) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2-4}}$

p) $f(x) = e^{x^2+3x}$ q) $f(x) = 5^{\frac{x+1}{3}}$ r) $f(x) = 2^{\frac{x^2-1}{x+3}}$

s) $f(x) = \operatorname{sen}(2x+8)$ t) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ u) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

v) $f(x) = \cos(e^x)$ w) $f(x) = \cos(\ln(x^2-1))$ x) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

y) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ z) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ α) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2-x}\right)$

β) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ γ) $f(x) = \frac{x-2}{\ln x - 4}$ δ) $f(x) = \frac{5}{\ln(|x-2|)}$

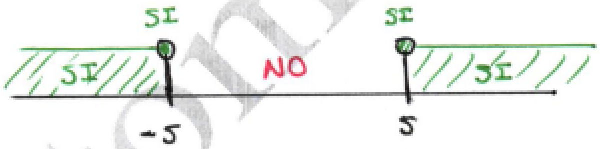
ε) $f(x) = \dfrac{x+8}{|x|-3}$ ζ) $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$ η) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{9-3^{|x|}}$

a) $f(x) = x^3+2x^2-4x-1 \longrightarrow \mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$; $2-x=0 \Longrightarrow x=2 \longrightarrow \mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}-\{2\}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-25}$; $x^2-25 \geq 0$

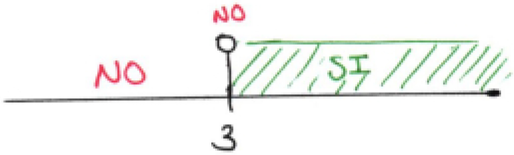
$$x^2-25=0 \begin{cases} x=-5 \\ x=+5 \end{cases}$$



$\Longrightarrow \mathrm{Dom}(f(x)) = (-\infty,-5] \cup [5,+\infty)$

d) $f(x) = \dfrac{3x-2}{\sqrt{x-3}}$; $x-3>0$

$x-3=0 \Longrightarrow x=3$



$\Longrightarrow \mathrm{Dom}(f(x)) = (3,+\infty)$

e) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^3-25x^2}$; $x^3-25x^2=0 \Longrightarrow x^2(x-25)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=25 \end{cases}$

$\Longrightarrow \mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}-\{0,25\}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)(x+3)}$; $(x-5)\cdot(x+3) = 0 \begin{cases} \to x = 5 \\ \to x = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-3, 5\}$

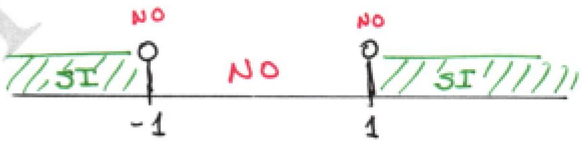
g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$; $x^2 - 7x + 12 \geq 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0 \begin{cases} \to x = 3 \\ \to x = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, 3] \cup [4, +\infty)$

h) $f(x) = \dfrac{x-8}{\sqrt{x^4 - 1}}$; $x^4 - 1 > 0$

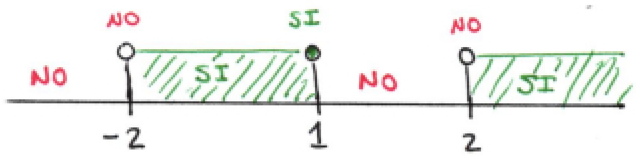
$x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \begin{cases} \to x = -1 \\ \to x = 1 \end{cases}$



$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-4}}$; $\dfrac{x-1}{x^2-4} \geq 0$

$\dfrac{x-1}{x^2-4} \geq 0 \longrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \to x = 1 \\ x^2 - 4 = 0 \begin{cases} \to x = -2 \\ \to x = +2 \end{cases} \end{cases}$



$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-2, 1] \cup (2, +\infty)$

j) $f(x) = \dfrac{1}{2 - 2^{1/x}}$

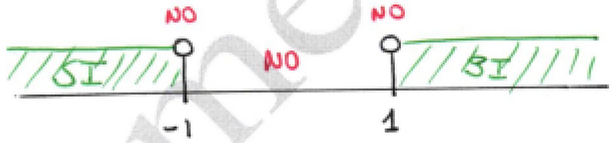
$\to x = 0$

$\to 2 - 2^{1/x} = 0 \Rightarrow 2^{1} = 2^{1/x} \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

k) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$; $x^2 - 1 > 0$

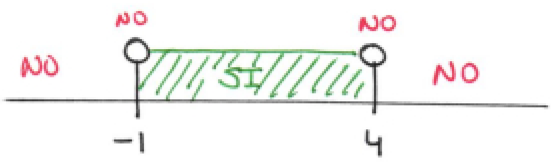
$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \to x = -1$; $x = +1$



$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

l) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{4-x}\right)$; $\dfrac{x+1}{4-x} > 0$

$\dfrac{x+1}{4-x} > 0 \to \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$



$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-1, 4)$

m) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5} \longrightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

n) $f(x) = \sqrt[5]{e^{x^2+5}} \longrightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

o) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x^2-4}}$; $x^2-4=0 \begin{cases} \to x=-2 \\ \to x=+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-2,+2\}$

p) $f(x) = e^{x^2+3x} \longrightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

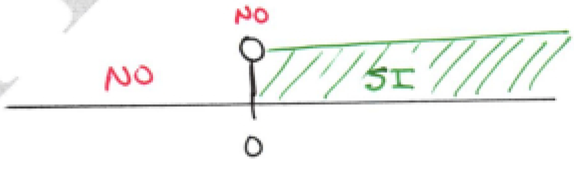
q) $f(x) = 5^{\frac{x+1}{3}} \longrightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

r) $f(x) = 2^{\frac{x^2-1}{x+3}}$; $x+3=0 \Rightarrow x=-3 \longrightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-3\}$

s) $f(x) = \text{sen}(2x+8) \longrightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

t) $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $x>0$

$x=0$



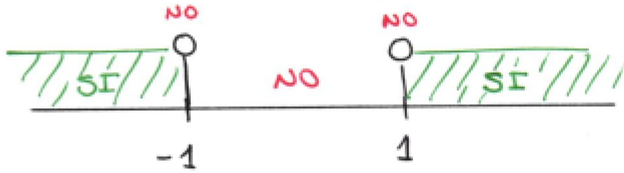
$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (0,+\infty)$

u) $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$; $x-2=0 \Rightarrow x=2 \longrightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$

v) $f(x) = \cos(e^x) \longrightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

w) $f(x) = \cos\left(\ln(x^2-1)\right)$; $x^2-1>0$

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \begin{cases} \nearrow x=-1 \\ \searrow x=+1 \end{cases}$



$\Rightarrow \mathrm{Dom}(f(x)) = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

x) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$; $x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$

y) $f(x) = tg(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$\cos x = 0 \rightarrow x = \arccos(0) \rightarrow \begin{cases} x = \pi/2 + K\cdot 2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + K\cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + K\pi$

$\Rightarrow \mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + K\pi \text{ con } K \in \mathbb{Z} \right\}$

z) $f(x) = tg\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0 \rightarrow \dfrac{x}{2} = \arccos(0) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + K\cdot 2\pi \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{2} + K\cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + K\cdot\pi$

$\Rightarrow x = \pi + K\cdot 2\pi$

$\Rightarrow \mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \left\{ \pi + K\cdot 2\pi \text{ con } K \in \mathbb{Z} \right\}$

α) $f(x) = tg\left(\frac{3}{2-x}\right) = \dfrac{sen\left(\frac{3}{2-x}\right)}{cos\left(\frac{3}{2-x}\right)}$

$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$cos\left(\frac{3}{2-x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2-x} = arcos(0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2-x} = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \\ \frac{3}{2-x} = \frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi \end{cases}$

$\frac{3}{2-x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$

$\dfrac{3}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = 2 - x \Rightarrow x = 2 - \dfrac{3}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \dfrac{\pi + k\cdot 2\pi - 3}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi - 3 + k\cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \left\{ 2, \dfrac{\pi - 3 + k\cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$

β) $f(x) = \dfrac{x}{ln\, x}$

$\nearrow x > 0$

$\searrow ln\, x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$

$\Rightarrow Dom(f(x)) = (0,1) \cup (1,+\infty)$

γ) $f(x) = \dfrac{x-2}{ln\, x - 4}$

$\nearrow x > 0$

$\searrow ln\, x - 4 = 0 \Rightarrow x = e^4$

$\Rightarrow Dom(f(x)) = (0,e^4) \cup (e^4,+\infty)$

δ) $f(x) = \dfrac{5}{\ln(|x-2|)}$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\ln|x-2| = 0 \Rightarrow |x-2| = e^0 \Rightarrow |x-2| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2 = \pm 1 \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$

ε) $f(x) = \dfrac{x+8}{|x|-3}$; $|x| - 3 = 0 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$

$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-3, +3\}$

ζ) $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$; $1 + |x| = 0 \Rightarrow |x| = -1$ (Absurdo!!)

$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

η) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{9 - 3^{|x|}}$

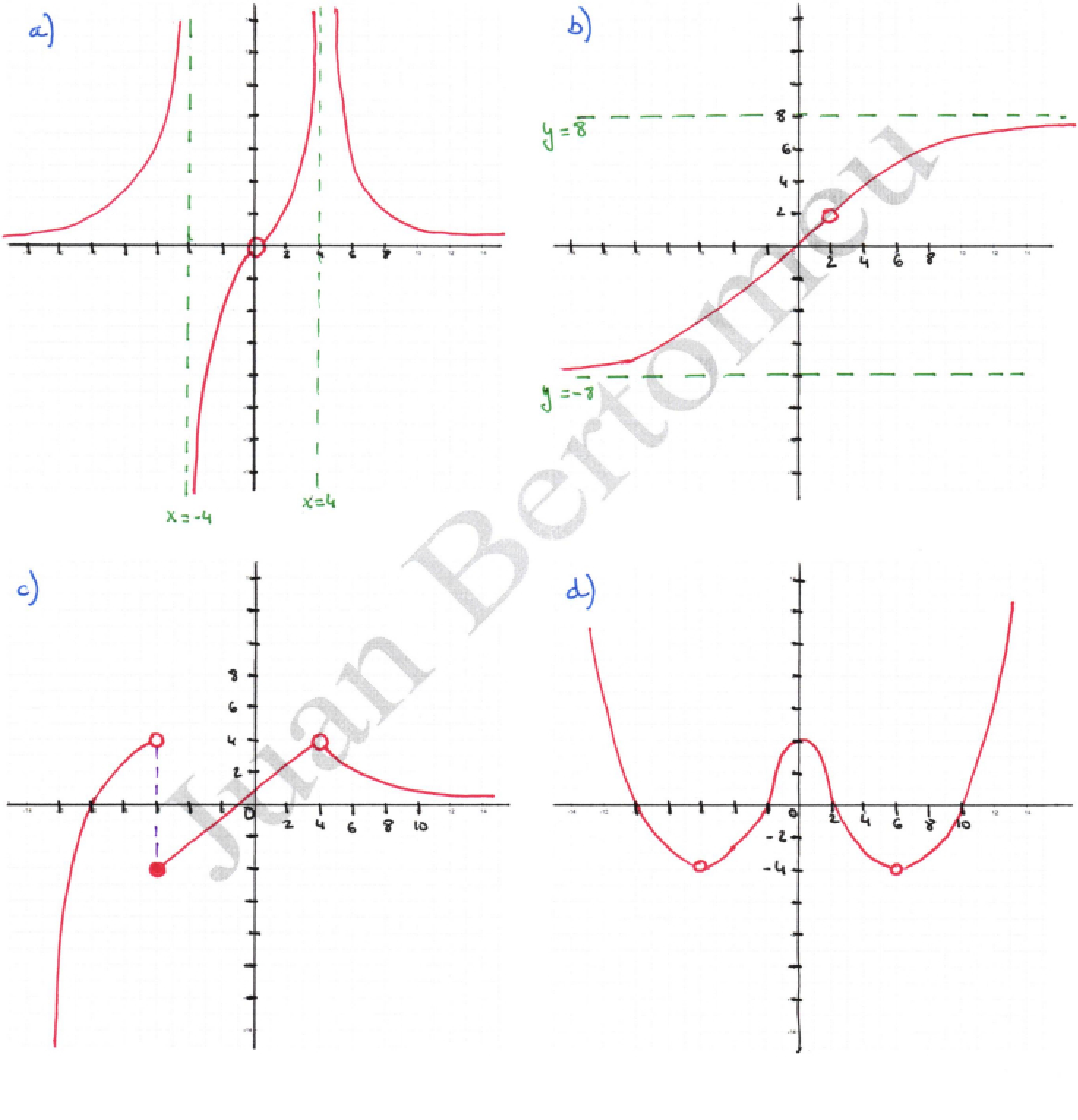
$\rightarrow x \geq 0$

$\rightarrow 9 - 3^{|x|} = 0 \Rightarrow 3^{|x|} = 9 \Rightarrow 3^{|x|} = 3^2 \Rightarrow |x| = 2 \begin{cases} x = -2 \\ x = +2 \end{cases}$

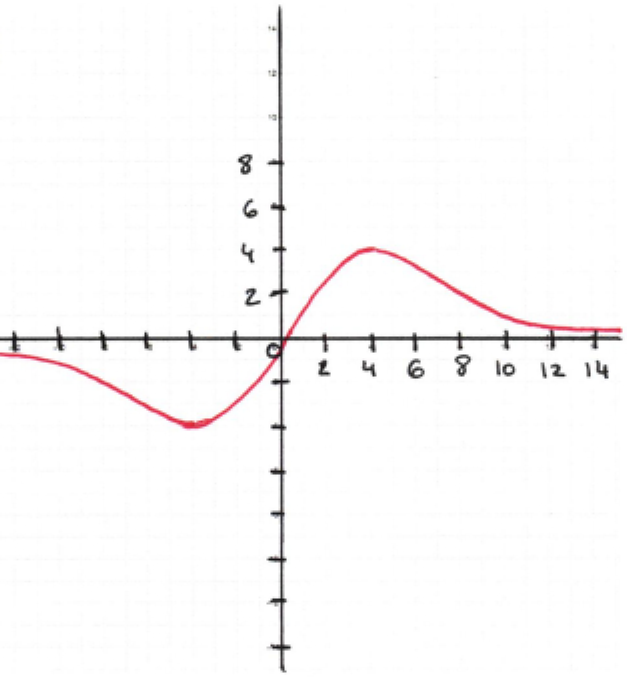
No sirve

$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [0, 2) \cup (2, +\infty)$

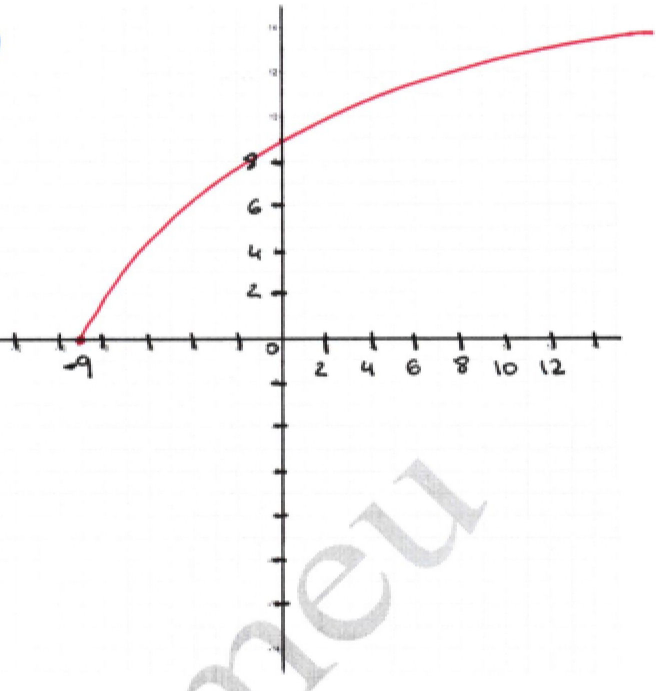
② A continuación se dan las gráficas de algunas funciones de las que debes dar su dominio y su recorrido:



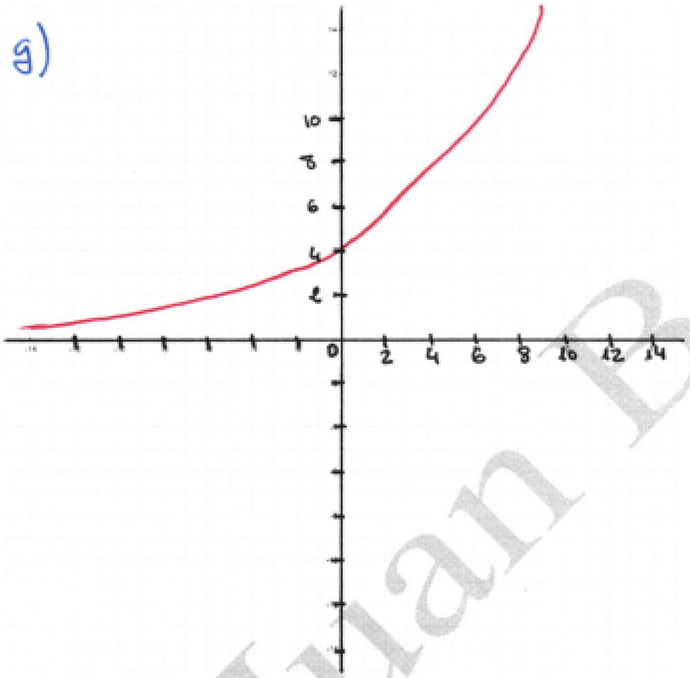
e)


0
2
4
6
8
10
12
14

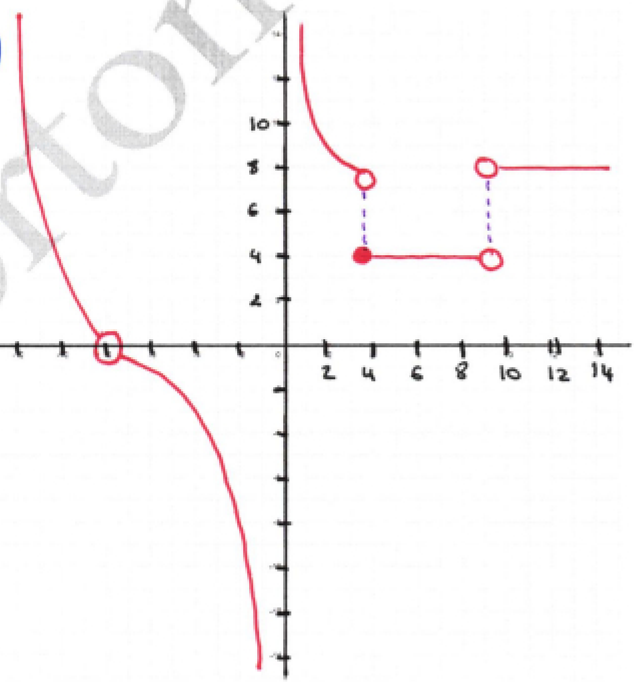
f)


-9
0
2
4
6
8
10
12

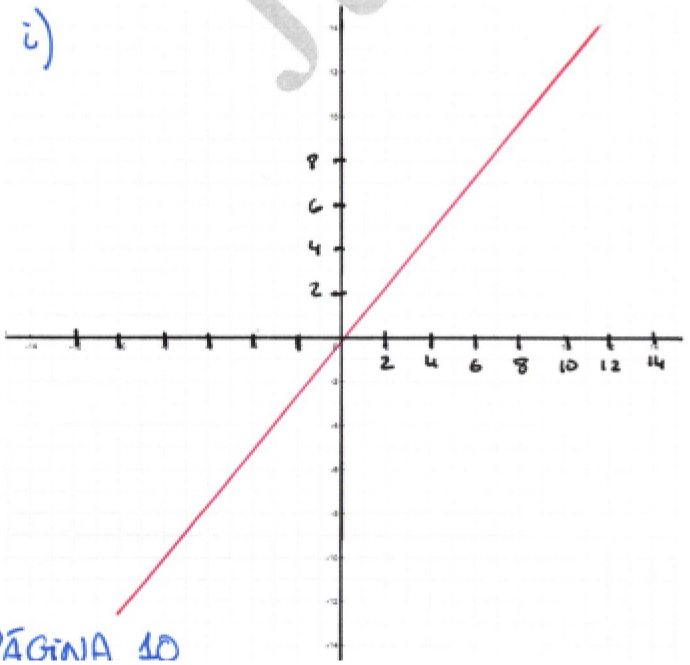
g)


0
2
4
6
8
10
12
14

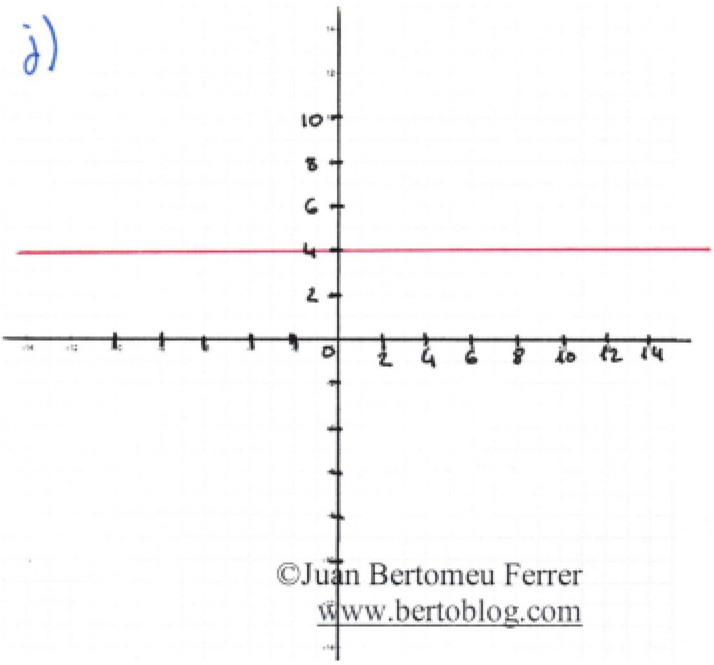
h)


2
4
6
8
10
12
14

i)


2
4
6
8
10
12
14

j)


0
2
4
6
8
10
12
14

a) $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-4, 0, 4\}$

$Img(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$

$Img(f(x)) = (-8, 2) \cup (2, 8)$

c) $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{4\}$

$Img(f(x)) = (-\infty, 4)$

d) $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-6, 6\}$

$Img(f(x)) = (-4, +\infty)$

e) $Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$Img(f(x)) = [-4, 4]$

f) $Dom(f(x)) = [-9, +\infty)$

$Img(f(x)) = [0, +\infty)$

g) $Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$Img(f(x)) = (0, +\infty)$

h) $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-8, 0, 10\}$

$Img(f(x)) = \mathbb{R} - \{0, 8\}$

i) $Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$Img(f(x)) = \mathbb{R}$

j) $Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$Img(f(x)) = 4$

3) Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x-1}$ c) $f(x) = \sqrt{1-x}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4}$ e) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-4}$ i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4-x^2}}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ k) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ l) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$

m) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+4}$ n) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$ o) $f(x) = \ln(1-x^2)$

p) $f(x) = \sqrt{e^x}$ q) $f(x) = \log_2(x+3)$ r) $f(x) = \dfrac{x+8}{\log_2(x) - 4}$

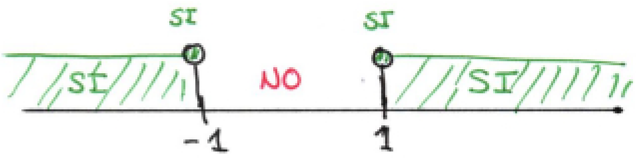
s) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x+3}$ t) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x}$ u) $f(x) = \sqrt{2x-4} \cdot \sqrt{1-x}$

v) $f(x) = \dfrac{7x}{e - \sqrt{x-5}}$ w) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-1}}{4 - \sqrt{x+1}}$ x) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

y) $f(x) = 3^{\ln x}$ z) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$

a) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$; $x^2 - 1 \geq 0$

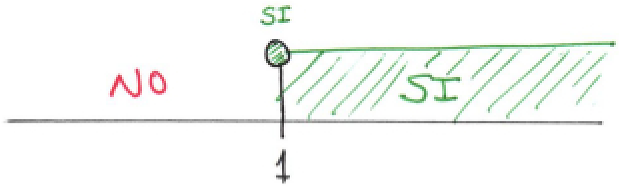
$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$



$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$; $x - 1 \geq 0$

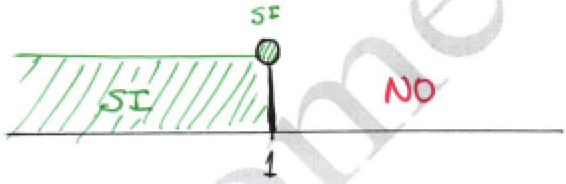
$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [1, +\infty)$

c) $f(x) = \sqrt{1-x}$; $1 - x \geq 0$

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

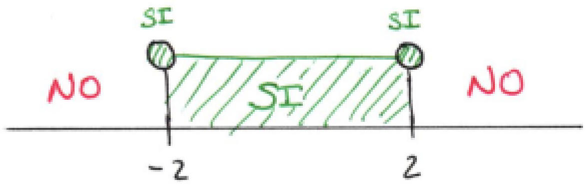


$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, 1]$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$; $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; $4 - x^2 \geq 0$

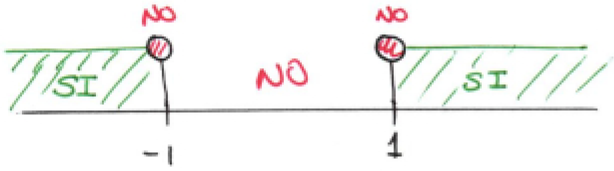
$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ → $x = -2$; → $x = +2$



$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [-2, 2]$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $x^2-1 > 0$

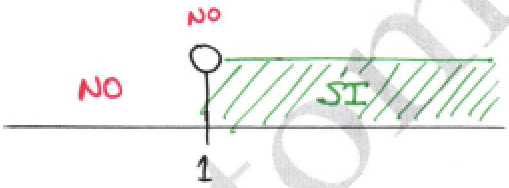
$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \begin{cases} x=-1 \\ x=+1 \end{cases}$



$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; $x-1 > 0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$



h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-4}$

$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-4=0 \Rightarrow \sqrt{x}=4 \Rightarrow x=16 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [0,16) \cup (16,+\infty)$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4-x^2}}$; $4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \begin{cases} x=-2 \\ x=+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-2,+2\}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $x^2+1 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

l) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$; $x^3+1 = 0$; $x^3 = -1$; $x = \sqrt[3]{-1} = -1$

$\Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1\}$

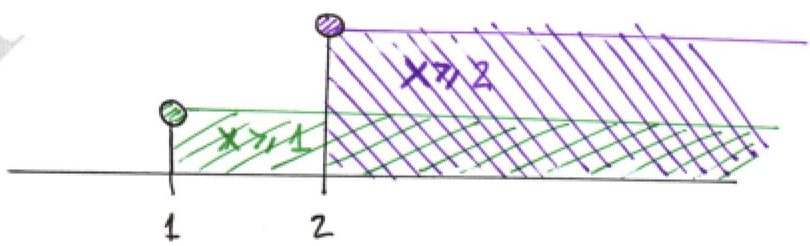
m) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+4}$; $x^2+3x+4 \geq 0$

$x^2+3x+4 = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

n) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

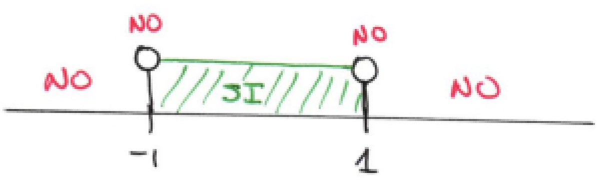
$\left.\begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{array}$



$\Rightarrow Dom(f(x)) = [2, +\infty)$

o) $f(x) = \ln(1-x^2)$; $1-x^2 > 0$

$1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \begin{array}{l} \nearrow x = -1 \\ \searrow x = 1 \end{array}$

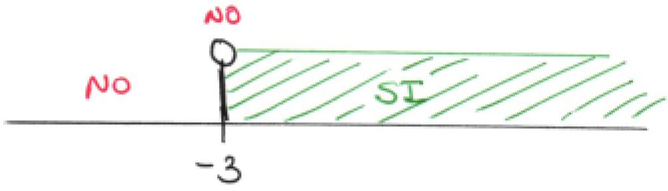


$\Rightarrow Dom(f(x)) = (-1, 1)$

p) $f(x) = \sqrt{2^x} \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

q) $f(x) = \log_2(x+3)$; $x+3>0$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$



$\Rightarrow Dom(f(x)) = (-3, +\infty)$

r) $f(x) = \dfrac{x+8}{\log_2(x)-4}$

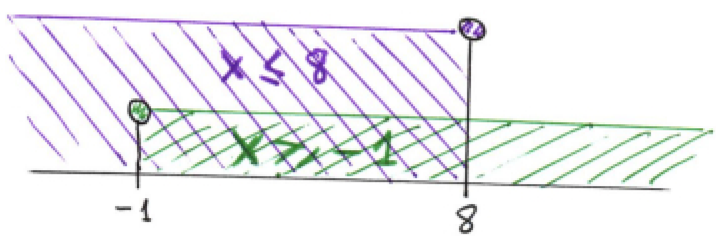
$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ \log_2(x)-4=0 \,;\; \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{array}\right\} Dom(f(x)) = (0,16) \cup (16,+\infty)$

s) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x+3}$

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \end{array}\right\} Dom(f(x)) = [-3,0) \cup (0,+\infty)$

t) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x}$

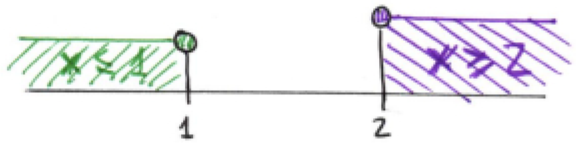
$\left.\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \geq -1 \\ -x \geq -8 \Rightarrow x \leq 8 \end{array}$



$\Rightarrow Dom(f(x)) = [-1, 8]$

u) $f(x) = \sqrt{2x-4} \cdot \sqrt{1-x}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-4 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x \geq 4 \\ -x \geq -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{array}$$



$$\Rightarrow Dom(f(x)) = \phi$$

v) $f(x) = \dfrac{7x}{2-\sqrt{x-5}}$

$$\left.\begin{array}{l} x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \\ 2-\sqrt{x-5} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow x-5 = 4 \Rightarrow x = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dom(f(x)) = [5, 9) \cup (9, +\infty)$$

w) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-1}}{4-\sqrt{x+1}}$

$$\left.\begin{array}{l} 3x-1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 1 \Rightarrow x \geq 1/3 \\ x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ 4-\sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 4 \Rightarrow x+1 = 16 \Rightarrow x = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dom(f(x)) = \left[\frac{1}{3}, 15\right) \cup (15, +\infty)$$

x) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$

y) $f(x) = 3^{\ln x}$; $x > 0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (0, +\infty)$

z) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

$x > 0$ ← No sirve $x = -1$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ → $x = -1$, $x = +1$

$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

④ Halla las funciones $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f\circ g)(x)$, y $(g\circ f)(x)$ siendo $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{x}{2}$

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{2} = \frac{2 + x(x+1)}{2(x+1)} = \frac{x^2 + x + 2}{2x+2}$$

$$(f-g)(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{2} = \frac{2 - x(x+1)}{2(x+1)} = \frac{-x^2 - x + 2}{2x+2}$$

$$(fg)(x) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2x+2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1/x+1}{x/2} = \frac{2}{x^2+x}$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\frac{x}{2}+1} = \frac{2}{x+2}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{\frac{1}{x+1}}{2} = \frac{1}{2x+2}$$

5) obtén las expresiones de $f\circ g$ y $g\circ f$ siendo:

a) $f(x) = x^2-5x+3$ y $g(x) = x^2$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = x+\frac{\pi}{2}$

c) $f(x) = 3x^2-5$ y $g(x) = \sqrt{2^{x-1}}$

a) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = (x^2)^2-5x^2+3 = x^4-5x^2+3$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-5x+3) = (x^2-5x+3)^2$

b) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{\pi}{2}$

c) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2^{x-1}}\right) = 3\cdot\left(\sqrt{2^{x-1}}\right)^2-5 = 3\cdot 2^{x-1}-5$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2-5) = \sqrt{2^{3x^2-5-1}} = \sqrt{2^{3x^2-6}}$

⑥ Dadas las funciones

$$f(x) = x^2+1 \quad ; \quad g(x) = \frac{3}{x-2} \quad ; \quad h(x) = \sqrt{x-3}$$

obtén el dominio y las expresiones de:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ h$

d) $g \circ h$ e) $h \circ f$ f) $h \circ g$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3}{x-2}\right) = \left(\frac{3}{x-2}\right)^2 + 1 = \frac{9+(x-2)^2}{(x-2)^2} =$

$= \frac{x^2-4x+13}{(x-2)^2} \Rightarrow \text{Dom}(f \circ g(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \frac{3}{x^2+1-2} = \frac{3}{x^2-1}$

$x^2-1=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=+1 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(g \circ f(x)) = \mathbb{R} - \{-1,+1\}$

c) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\sqrt{x-3}) = (\sqrt{x-3})^2 + 1 = x-2$

$\Rightarrow \text{Dom}(f \circ h(x)) = \mathbb{R}$

d) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x-3}) = \frac{3}{\sqrt{x-3}-2}$

$\nearrow x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

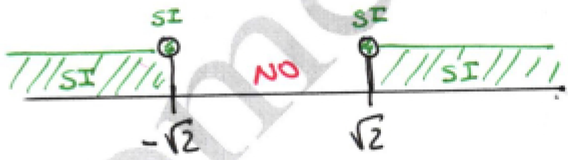
$\searrow \sqrt{x-3} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7$

$\Rightarrow \text{Dom}\,(g\circ h(x)) = [3,7) \cup (7,+\infty)$

e) $(h\circ f)(x) = h(f(x)) = h(x^2+1) = \sqrt{x^2+1-3} = \sqrt{x^2-2}$

$x^2-2 \geq 0$

$x^2-2=0 \Rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} \nearrow x = -\sqrt{2} \\ \searrow x = +\sqrt{2} \end{cases}$

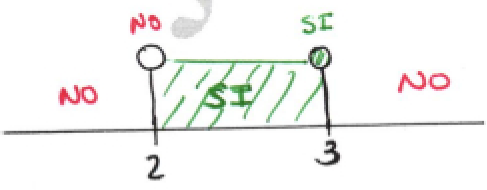


$\Rightarrow \text{Dom}\,(h\circ f(x)) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

f) $(h\circ g)(x) = h(g(x)) = h\left(\frac{3}{x-2}\right) = \sqrt{\frac{3}{x-2} - 3} = \sqrt{\frac{3-3(x-2)}{x-2}} =$

$= \sqrt{\frac{-3x+9}{x-2}}$; $\frac{-3x+9}{x-2} \geq 0$

$\frac{-3x+9}{x-2} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} -3x+9=0 \Rightarrow x = 3 \\ x-2=0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$



$\Rightarrow \text{Dom}\,(h\circ g(x)) = (2,3]$

⑥ obtén las expresiones de las funciones $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$, $(f\circ f)(x)$ y $(g\circ g)(x)$, siendo:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ y $g(x) = 3x^2-1$

b) $f(x) = \sqrt{x^5}$ y $g(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$

c) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

a) $$(f+g)(x) = \frac{x}{x+1} + 3x^2-1 = \frac{x+(3x^2-1)(x+1)}{x+1} = \frac{\cancel{x}+3x^3+3x^2\cancel{-x}-1}{x+1} =$$

$$= \frac{3x^3+3x^2-1}{x+1}$$

$$(f-g)(x) = \frac{x}{x+1} - (3x^2-1) = \frac{x-(3x^2-1)(x+1)}{x+1} = \frac{x-(3x^3+3x^2-x-1)}{x+1} =$$

$$= \frac{-3x^3-3x^2+2x+1}{x+1}$$

$$(f\cdot g)(x) = \frac{x}{x+1}\cdot 3x^2-1 = \frac{3x^3-x}{x+1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{3x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(3x^2-1)} = \frac{x}{3x^3+3x^2-x-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2-1) = \frac{3x^2-1}{3x^2-1+1} = \frac{3x^2-1}{3x^2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x+1}\right) = 3\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 1 = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - 1 =$$

$$= \frac{3x^2-(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{3x^2-(x^2+2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{\frac{x}{\cancel{x+1}}}{\frac{x+x+1}{\cancel{x+1}}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(3x^2-1) = 3\cdot(3x^2-1)^2-1 = 3(9x^4-6x^2+1)-1 =$$

$$= 27x^4-18x^2+2$$

b) $$(f+g)(x) = \sqrt{x^5} + \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{(x+1)\sqrt{x^5}+x^2+3}{x+1}$$

$$(f-g)(x) = \sqrt{x^5} - \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{(x+1)\sqrt{x^5}-x^2-3}{x+1}$$

$$(f\cdot g)(x) = \sqrt{x^5}\cdot\frac{x^2+3}{x+1} = \frac{(x^2+3)\sqrt{x^5}}{x+1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^5}}{\frac{x^2+3}{x+1}} = \frac{(x+1)\sqrt{x^5}}{x^2+3}$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right) = \sqrt{\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)^5}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x^5}\right) = \frac{\left(\cancel{\sqrt{x^5}}\right)^{\cancel{2}}+3}{\sqrt{x^5}+1} = \frac{x^5+3}{\sqrt{x^5}+1}$$

$$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x^5}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^5}\right)^5} = \sqrt{\sqrt{x^{25}}} = \sqrt[4]{x^{25}}$$

$$(g\circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)^2+3}{\frac{x^2+3}{x+1}+1} = \frac{\frac{(x^2+3)^2+3(x+1)^2}{(x+1)^{\cancel{2}}}}{\frac{x^2+3+(x+1)}{\cancel{x+1}}} =$$

$$= \frac{(x^2+3)^2+3(x+1)^2}{(x+1)\cdot(x^2+x+4)} = \frac{x^4+6x^2+9+3(x^2+2x+1)}{x^3+x^2+4x+x^2+x+4} = \frac{x^4+9x^2+6x+12}{x^3+2x^2+5x+4}$$

c) $$(f+g)(x) = x^2+\frac{1}{2x-1} = \frac{x^2(2x-1)+1}{2x-1} = \frac{2x^3-x^2+1}{2x-1}$$

$$(f-g)(x) = x^2-\frac{1}{2x-1} = \frac{x^2(2x-1)-1}{2x-1} = \frac{2x^3-x^2-1}{2x-1}$$

$$(f\cdot g)(x) = x^2\cdot\frac{1}{2x-1} = \frac{x^2}{2x-1}$$

$$\left(f/g\right)(x) = \frac{x^2}{\frac{1}{2x-1}} = x^2(2x-1) = 2x^3-x^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \left(\frac{1}{2x-1}\right)^2 = \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{2x^2-1}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{2x-1}\right)-1} = \frac{1}{\frac{2-(2x-1)}{2x-1}} = \frac{2x-1}{3-2x}$$

7) Dadas $f(x) = \sqrt{2x^3}$ y $g(x) = x-4$, determina las funciones compuestas $(f\circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. Después, calcula el valor que toman esas funciones compuestas en el punto de abcisa $x=5$. ¿Qué conclusión puedes extraer?

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-4) = \sqrt{2(x-4)^3}$$

$$\Rightarrow (f\circ g)(5) = \sqrt{2(5-4)^3} = \sqrt{2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{2x^3}\right) = \sqrt{2x^3} - 4$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(5) = \sqrt{2\cdot 125} - 4 = \sqrt{250} - 4 = 5\sqrt{10} - 4$$

Como vemos, $\sqrt{2} \neq 5\sqrt{10} - 4 \Rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa

(8) La composición entre las funciones:

$$f(x) = 2^{x-1} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x} + 2 \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{x-3}$$

tiene como resultado a las funciones:

a) $m(x) = 2^{\sqrt{x}+1}$ b) $n(x) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$ c) $p(x) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2$

d) $q(x) = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$ e) $r(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ f) $s(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}} - 1}$

Averigua que composición entre f(x), g(x), y h(x) tiene como resultado a cada una de ellas.

a) $m(x) = 2^{\sqrt{x}+1}$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}+2) = 2^{(\sqrt{x}+2)-1} = 2^{\sqrt{x}+1}$$

b) $n(x) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(2^{x-1}\right) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$$

c) $p(x) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2$

$$(g\circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2$$

d) $q(x) = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$

$$(f\circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{x-3}\right) = 2^{\frac{1}{x-3}-1} = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$$

e) $r(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

$$(h\circ g)(x) = h(g(x)) = h(\sqrt{x}+2) = \frac{1}{\sqrt{x}+2-3} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

f) $s(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}} - 1}$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^{x-1}) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$

$(h\circ(g\circ f))(x) = h((g\circ f)(x)) = h(\sqrt{2^{x-1}}+2) = \dfrac{1}{(\sqrt{2^{x-1}}+2)-3} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}} - 1}$

9 Calcula, comprobando el resultado, la función inversa $f^{-1}(x)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = 2x+4$ c) $f(x) = \dfrac{9}{x}$, $x \in [3,9]$

d) $f(x) = 2^x$, $x > 0$ e) $f(x) = \log_2 x$, $x \in [8,32]$ f) $f(x) = 3x-2$

g) $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$ h) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ i) $f(x) = 1+2^x$

j) $f(x) = 2+\log_3 x$ k) $f(x) = 4-x^2$, $x \geq 0$ l) $f(x) = 2x-1$

m) $f(x) = x^2-5$ n) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ o) $f(x) = x^2+x$, $x \geq -\dfrac{1}{2}$

p) $f(x) = \sqrt{2-5x}$ q) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ r) $f(x) = \ln(x+3)$

s) $f(x) = 3 + 4\cdot 5^x$ t) $f(x) = \dfrac{1+tg(x)}{2}$ u) $f(x) = sen(2x)$

v) $f(x) = |x+1|$ w) $f(x) = \dfrac{1+\log_2 x}{5}$ x) $f(x) = e^{x-1}$

a) $y = 2x \longrightarrow x = 2y \longrightarrow y = \dfrac{x}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$

$(f\circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2\cdot\dfrac{x}{2} = x$

b) $y = 2x+4 \longrightarrow x = 2y+4 \longrightarrow x-4 = 2y \longrightarrow y = \dfrac{x-4}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{2}$

$(f\circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{x-4}{2}\right) = \cancel{2}\cdot\left(\dfrac{x-4}{\cancel{2}}\right)+4 = x$

c) $y = \dfrac{9}{x} \longrightarrow x = \dfrac{9}{y} \longrightarrow y = \dfrac{9}{x} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{9}{x} \quad x\in[1,3]$

$\hookrightarrow x\in[3,9]$ $\rightarrow x = 3 \Rightarrow y = \dfrac{9}{3} = 3$; $\rightarrow x = 9 \Rightarrow y = \dfrac{9}{9} = 1$

$(f\circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{9}{x}\right) = \dfrac{9}{9/x} = \dfrac{9x}{9} = x$

d) $y = 2^x \longrightarrow x = 2^y \longrightarrow \log_2 x = \log_2 2^y \longrightarrow y = \log_2 x$

$\hookrightarrow x > 0 \longrightarrow y > 2^0 \longrightarrow y > 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x \ , \ x > 1$

$(f\circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = 2^{\log_2 x} = x$

e) $y = \log_2 x \longrightarrow x = \log_2 y \longrightarrow y = 2^x \Longrightarrow f^{-1}(x) = 2^x,\ x \in [3,5]$

$\hookrightarrow x \in [8, 32]$ $\nearrow x = 8 \Rightarrow y = \log_2 8 = 3$; $\searrow x = 32 \Rightarrow y = \log_2 32 = 5$

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(2^x) = \log_2 2^x = x$

f) $y = 3x - 2 \longrightarrow x = 3y - 2 \longrightarrow y = \frac{x+2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+2}{3}\right) = \cancel{3} \cdot \left(\frac{x+2}{\cancel{3}}\right) - 2 = x$

g) $y = \frac{x+3}{2} \longrightarrow x = \frac{y+3}{2} \longrightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 3$

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(2x-3) = \frac{(2x \cancel{-3}) \cancel{+3}}{2} = x$

h) $y = \sqrt{2x+1} \longrightarrow x = \sqrt{2y+1} \Rightarrow x^2 = 2y + 1 \longrightarrow y = \frac{x^2-1}{2}$

$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2}$; $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x^2-1}{2}\right) = \sqrt{\cancel{2} \cdot \left(\frac{x^2-1}{\cancel{2}}\right) + 1} = x$

i) $y = 1 + 2^x \longrightarrow x = 1 + 2^y \longrightarrow x - 1 = 2^y \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \log_2 (x-1) = \log_2 2^y \Longrightarrow y = \log_2 (x-1) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 (x-1)$

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_2 (x-1)) = 1 + 2^{\log_2 (x-1)} = 1 + x - 1 = x$

j) $f(x) = 2+\log_3(x) \Longrightarrow x = 2+\log_3 y \Longrightarrow x-2 = \log_3 y \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y = 3^{x-2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = 3^{x-2}$

$(f\circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(3^{x-2}) = 2+\log_3 3^{x-2} = 2+x-2 = x$

k) $y = 4-x^2 \longrightarrow x = 4-y^2 \longrightarrow y^2 = 4-x \longrightarrow y = +\sqrt{4-x}$

$\hookrightarrow x \geq 0 \longrightarrow y_{máx} = 4-0 = 4 \Rightarrow f^{-1}(x) = +\sqrt{4-x}$ con $x \leq 4$

$(f\circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(+\sqrt{4-x}) = 4-(\sqrt{4-x})^2 = 4-4+x = x$

l) $f(x) = 2x-1 \longrightarrow x = 2y-1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

$(f\circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \cancel{2}\cdot\left(\frac{x+1}{\cancel{2}}\right) - 1 = x$

m) $f(x) = x^2-5 \longrightarrow x = y^2-5 \Longrightarrow y^2 = x+5 \begin{cases} \nearrow y = +\sqrt{x+5} \\ \searrow y = -\sqrt{x+5} \end{cases}$

Ojo!! $\longrightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x+5}$ no es una función, ya que para cada valor de x se obtendrían dos valores para $f^{-1}(x)$.

Para poder obtener esta función inversa, el enunciado debería haber especificado qué valores puede tomar "x" para así nosotros decir cuál de nuestras opciones de función inversa es la correcta (como ha sucedido en el apartado k) de este mismo ejercicio!!)

Así, si nos hubieran dicho:

$f(x) = x^2 - 5$ con $x \geq 0$ entonces $f^{-1}(x) = +\sqrt{x+5}$ con $x \geq -5$

$\hookrightarrow x \geq 0 \rightarrow y_{min} = -5$

o bien

$f(x) = x^2 - 5$ con $x < 0$ entonces $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+5}$ con $x > -5$

$\hookrightarrow x < 0 \rightarrow y > -5$

n) $f(x) = \dfrac{1}{x+2} \rightarrow x = \dfrac{1}{y+2} \rightarrow y+2 = \dfrac{1}{x} \rightarrow y = \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{1-2x}{x}$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1-2x}{x} \; ; \; (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1-2x}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1-2x}{x}+2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1-2x+2x}{x}} = x$$

o) $y = x^2 + x \rightarrow x = y^2 + y \Rightarrow y^2 + y - x = 0$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4x}}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2} \text{ con } x \geq -\frac{1}{4}$$

$$x \geq -1/2 \Rightarrow y_{min} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}\right) = \left(\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{1+4x}}{2} + \frac{1}{4} + x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4x}}{2} = x$$

p) $y = \sqrt{2-5x} \longrightarrow x = \sqrt{2-5y} \longrightarrow x^2 = 2-5y \longrightarrow y = \dfrac{2-x^2}{5}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2-x^2}{5}$;

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{2-x^2}{5}\right) = \sqrt{2-\cancel{5}\left(\dfrac{2-x^2}{\cancel{5}}\right)} = \sqrt{2-2+x^2} = x$

q) $y = \dfrac{1}{x-2}$; $x = \dfrac{1}{y-2} \Rightarrow y-2 = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}+2 = \dfrac{1+2x}{x}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1+2x}{x}$;

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{1+2x}{x}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1+2x}{x}-2} = \dfrac{1}{\dfrac{1+2x-2x}{x}} = x$

r) $y = \ln(x+3) \longrightarrow x = \ln(y+3) \longrightarrow y+3 = e^x \longrightarrow y = e^x-3$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = e^x-3$; $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(e^x-3) =$

$= \ln(e^x-3+3) = \ln e^x = x$

s) $y = 3+4\cdot 5^x \longrightarrow x = 3+4\cdot 5^y \longrightarrow \dfrac{x-3}{4} = 5^y \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5\left(\dfrac{x-3}{4}\right) = \log_5 5^y \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_5\left(\dfrac{x-3}{4}\right)$

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\log_5\left(\dfrac{x-3}{4}\right)\right) = 3+4\cdot 5^{\log_5\left(\frac{x-3}{4}\right)} = 3+\cancel{4}\cdot\left(\dfrac{x-3}{\cancel{4}}\right) = x$

t) $y = \frac{1 + tg(x)}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + tg(y)}{2} \Rightarrow 2x = 1 + tg(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 1 = tg(y) \Rightarrow y = arctg(2x-1) \Rightarrow f^{-1}(x) = arctg(2x-1)$

$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(arctg(2x-1)\right) = \frac{1 + tg(arctg(2x-1))}{2} =$

$= \frac{1 + 2x - 1}{2} = \frac{2x}{2} = x$

u) $y = sen(2x) \Rightarrow x = sen(2y) \Rightarrow arcsen(x) = 2y \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{arcsen(x)}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{arcsen(x)}{2}$

$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\frac{arcsen(x)}{2}\right) = sen\left(\cancel{2} \cdot \frac{arcsen(x)}{\cancel{2}}\right) = sen(arcsen(x)) = x$

v) $y = |x+1| \Rightarrow x = |y+1| \Rightarrow y + 1 = \pm x$ $\begin{cases} \rightarrow y = x - 1 \\ \rightarrow y = -x - 1 \end{cases}$

Ojo!! → Como ya nos sucedió en el apartado m), tenemos dos opciones de función inversa y eso no puede ser. El enunciado debería especificar qué valores de "x" puede tomar la función dada para así nosotros poder decidir cuál de nuestras opciones de función inversa es la correcta para esos valores

Así, si nos hubieran dicho:

$f(x) = |x+1|$ con $x \geq -1$ entonces $f^{-1}(x) = x-1$ con $x \geq 0$

$\hookrightarrow x \geq -1 \rightarrow y_{min} = |-1+1| = 0$

O bien

$f(x) = |x+1|$ con $x < -1$ entonces $f^{-1}(x) = -x-1$ con $x > 0$

$\hookrightarrow x < -1 \rightarrow y_{min} = |-1+1| = 0$

w) $y = \dfrac{1+\log_2 x}{5} \Rightarrow x = \dfrac{1+\log_2 y}{5} \Rightarrow 5x = 1+\log_2 y \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x - 1 = \log_2 y \Rightarrow y = 2^{5x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^{5x-1}$

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(2^{5x-1}) = \dfrac{1+\log_2 2^{5x-1}}{5} = \dfrac{1+5x-1}{5} = x$

x) $y = e^{x-1} \Rightarrow x = e^{y-1} \Rightarrow \ln x = \ln e^{y-1} \Rightarrow \ln x = y-1$

$\Rightarrow y = \ln x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x + 1$

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\ln x + 1) = e^{\ln x + 1 - 1} = e^{\ln x} = x$

10 Comprueba si las siguientes funciones $f(x)$ y $g(x)$ dadas son inversa una de la otra.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ y $g(x) = \frac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$ y $g(x) = \frac{x^2+2}{3}$

c) $f(x) = 1 + \log_2\left(\frac{x}{3}\right)$ y $g(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

d) $f(x) = 2x-5$ y $g(x) = \frac{x+5}{2}$

e) $f(x) = \frac{3-x}{4}$ y $g(x) = 3-4x$

f) $f(x) = x^3+1$ y $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ serán una inversa de la otra si se verifica que $(f \circ g)(x) = x$. Así:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x} - 2\right) = \frac{1}{\frac{1}{x} - 2 + 2} = x$

$\Rightarrow$ Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x^2+2}{3}\right) = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{x^2+2}{3}\right) + 3} = \sqrt{\frac{2x^2+13}{3}}$

$\Rightarrow$ Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no son inversas

c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3 \cdot 2^{x-1}) = 1 + \log_2\left(\frac{\cancel{3} \cdot 2^{x-1}}{\cancel{3}}\right) =$

$= 1 + \log_2 2^{x-1} = 1 + x - 1 = x$

$\Rightarrow$ las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas.

d) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+5}{2}\right) = \cancel{2} \cdot \left(\frac{x+5}{\cancel{2}}\right) - 5 = x + 5 - 5 = x$

$\Rightarrow$ las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas.

e) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3 - 4x) = \frac{3 - (3 - 4x)}{4} = \frac{4x}{4} = x$

$\Rightarrow$ las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas.

f) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$

$\Rightarrow$ las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas.

(11) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^3 - 5$, calcula $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f^{-1} \circ g)(x)$, $(g \circ f^{-1})(x)$, $(f \circ g^{-1})(x)$, $(g^{-1} \circ f)(x)$, $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ y $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2$

$y = x^3 - 5 \Rightarrow x = y^3 - 5 \Rightarrow y^3 = x + 5 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+5} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5}$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3-5) = \sqrt{x^3-5}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^3-5 = \sqrt{x^3}-5$$

$$(f^{-1}\circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(x^3-5) = (x^3-5)^2 = x^6-10x^3+25$$

$$(g\circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = g(x^2) = (x^2)^3-5 = x^6-5$$

$$(f\circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x+5}) = \sqrt{\sqrt[3]{x+5}} = \sqrt[6]{x+5}$$

$$(g^{-1}\circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(\sqrt{x}) = \sqrt[3]{\sqrt{x}+5}$$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(\sqrt[3]{x+5}) = (\sqrt[3]{x+5})^2 = \sqrt[3]{(x+5)^2}$$

$$(g^{-1}\circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(x^2) = \sqrt[3]{x^2+5}$$

(12) Calcula $(f\circ g)(2)$ si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones que verifican que $f(10)+5=0$ y $g(2)-10=0$

$$(f\circ g)(2) = f(g(2)) = f(10) = -5$$

(13) Para cada una de las funciones $h(x)$ que se dan a continuación, encuentra dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que verifiquen que $(f\circ g)(x) = h(x)$, siendo:

a) $h(x) = \sqrt{x-3}$

b) $h(x) = \sqrt{x} - 3$

c) $h(x) = (3x-1)^4$

d) $h(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-2}+1}$

a) $h(x) = \sqrt{x-3}$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x-3 \\ f(x) = \sqrt{x} \end{array}\right\} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = \sqrt{x-3}$$

b) $h(x) = \sqrt{x} - 3$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = \sqrt{x} \\ f(x) = x-3 \end{array}\right\} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 3$$

c) $h(x) = (3x-1)^4$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = 3x-1 \\ f(x) = x^4 \end{array}\right\} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x-1) = (3x-1)^4$$

d) $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2} + 1}$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = \frac{1}{x-2} \\ f(x) = \sqrt{x+1} \end{array}\right\} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-2}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-2} + 1}$$

(14) Explica qué composición entre las funciones:

$f(x) = \sqrt{x^2+4}$; $g(x) = 5x+1$; $h(x) = \frac{2}{x+1}$

tendría como resultado a la función:

a) $m(x) = 5\sqrt{x^2+4} + 1$

c) $p(x) = \frac{x+11}{x+1}$

b) $n(x) = 25x+6$

d) $q(x) = \sqrt{x^2+8}$

a) $m(x) = 5\sqrt{x^2+4} + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x^2+4}\right) = 5 \cdot \sqrt{x^2+4} + 1$$

b) $n(x) = 25x + 6$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(5x+1) = 5 \cdot (5x+1) + 1 = 25x + 6$$

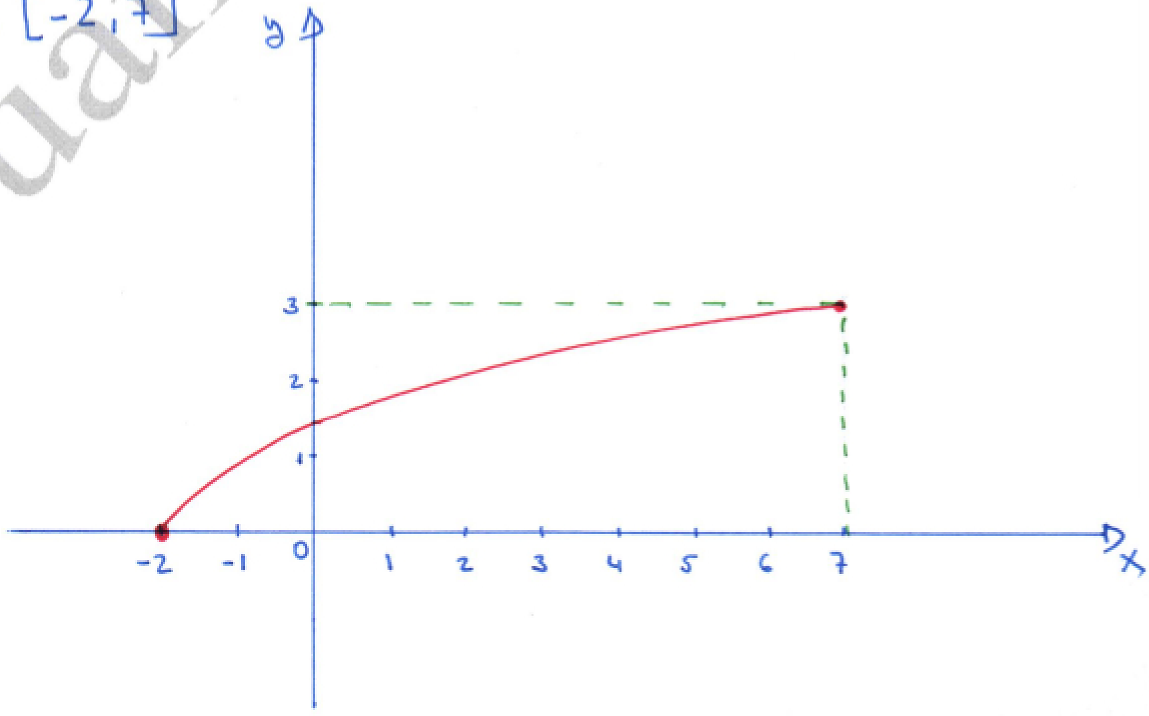
c) $p(x) = \dfrac{x+11}{x+1}$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{2}{x+1}\right) = 5 \cdot \left(\frac{2}{x+1}\right) + 1 = \frac{10 + x + 1}{x+1} = \frac{x+11}{x+1}$$

d) $q(x) = \sqrt{x^2+8}$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x^2+4}\right) = \sqrt{\left(\cancel{\sqrt{x^2+4}}\right)^{\cancel{2}} + 4} = \sqrt{x^2+8}$$

(15) A continuación se da la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ cuando $x \in [-2, 7]$



Mirando la gráfica, obtén el dominio y el recorrido de f(x). A continuación obtén analíticamente la función inversa $f^{-1}(x)$, calculando su dominio y recorrido. ¿Qué conclusión podemos obtener?

A la vista del gráfico es fácil ver que:

Dominio $\Rightarrow$ $\text{Dom}(f(x)) = [-2, 7]$

Recorrido $\Rightarrow$ $\text{Img}(f(x)) = [0, 3]$

Veamos la función inversa:

$$y = \sqrt{x+2} \Rightarrow x = \sqrt{y+2} \Rightarrow x^2 = y+2 \Rightarrow y = x^2 - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \longrightarrow y = 0 \\ x = 7 \longrightarrow y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2 \text{ con } x \in [0,3]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -2 \\ f(3) = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Dom}(f^{-1}(x)) = [0,3] \\ \text{Img}(f^{-1}(x)) = [-2,7] \end{array}$$

Moraleja $\rightarrow$ El recorrido de una función es igual al dominio de su función inversa

$$\boxed{\text{Img}(f(x)) = \text{Dom}(f^{-1}(x))}$$

(16) Obtener analíticamente el recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ b) $f(x) = 2+\sqrt{x}$ c) $f(x) = e^x - 3$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{3}{x+1}}$ e) $f(x) = \ln(x-1)$ f) $f(x) = 1 + 2^{1/x}$

a) $y = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow x \cdot y - 2x = y + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot y - y = 2x + 1 \Rightarrow y \cdot (x-1) = 2x+1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-1}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$; $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Dom}(f^{-1}(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$

$\Rightarrow \text{Img}(f(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $y = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{y} \Rightarrow y = (x-2)^2$

$\Rightarrow x \geq 0 \longrightarrow y_{min} = 2 + \sqrt{0} = 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2$ con $x \geq 2$

$\text{Dom}(f^{-1}(x)) = [2, +\infty) \Rightarrow \text{Img}(f(x)) = [2, +\infty)$

c) $y = e^x - 3 \Rightarrow x = e^y - 3 \Rightarrow x+3 = e^y \Rightarrow y = \ln(x+3)$

$x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow \text{Dom}(f^{-1}(x)) = (-3, +\infty)$

$\Rightarrow \text{Img}(f(x)) = (-3, +\infty)$

d) $y = \sqrt{\dfrac{3}{x+1}} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{3}{y+1}} \Rightarrow x^2 = \dfrac{3}{y+1} \Rightarrow y+1 = \dfrac{3}{x^2}$

$\Rightarrow y = \dfrac{3}{x^2} - 1 = \dfrac{3-x^2}{x^2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{3-x^2}{x^2}$ con $x > 0$

$\Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow y > 0$

$\Rightarrow \text{Dom}(f^{-1}(x)) = (0, +\infty)$

$\Rightarrow \text{Img}(f(x)) = (0, +\infty)$

e) $y = \ln(x-1) \Rightarrow x = \ln(y-1) \Rightarrow y-1 = e^x \Rightarrow y = e^x + 1$

$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \rightarrow y \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(x) = e^x + 1$

$\text{Dom}(f^{-1}(x)) = \mathbb{R} \Rightarrow \text{Img}(f(x)) = \mathbb{R}$

f) $y = 1 + 2^{1/x} \longrightarrow x = 1 + 2^{1/y} \Rightarrow x - 1 = 2^{1/y} \Rightarrow \log_2(x-1) = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{\log_2(x-1)}$ $\longrightarrow x \neq 0 \Rightarrow y > 0$

$\nearrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

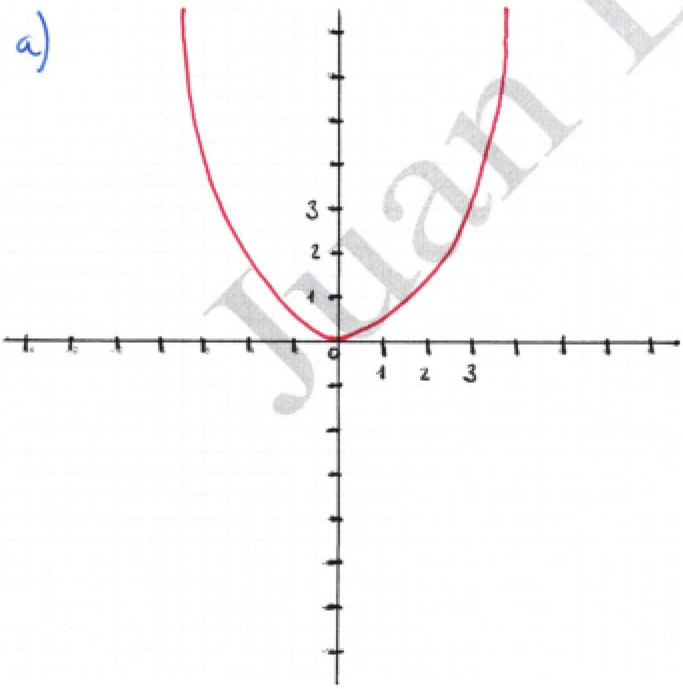
$\searrow \log_2(x-1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 2^0 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

$\text{Dom}\left(f^{-1}(x)\right) = (1,2) \cup (2,+\infty)$

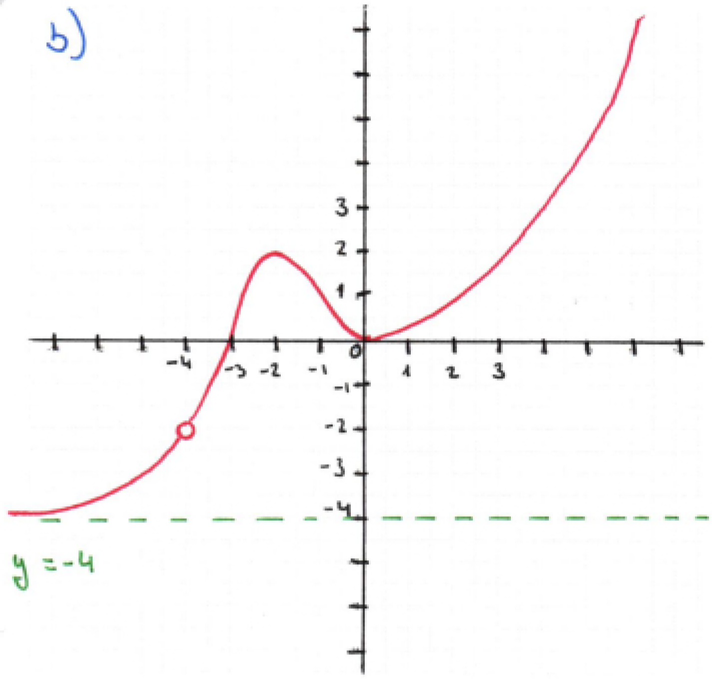
$\Rightarrow \text{Img}\left(f(x)\right) = (1,2) \cup (2,+\infty)$

(17) A continuación se dan las gráficas de algunas funciones de las que debes dar su dominio, recorrido, e intervalos de monotonía.

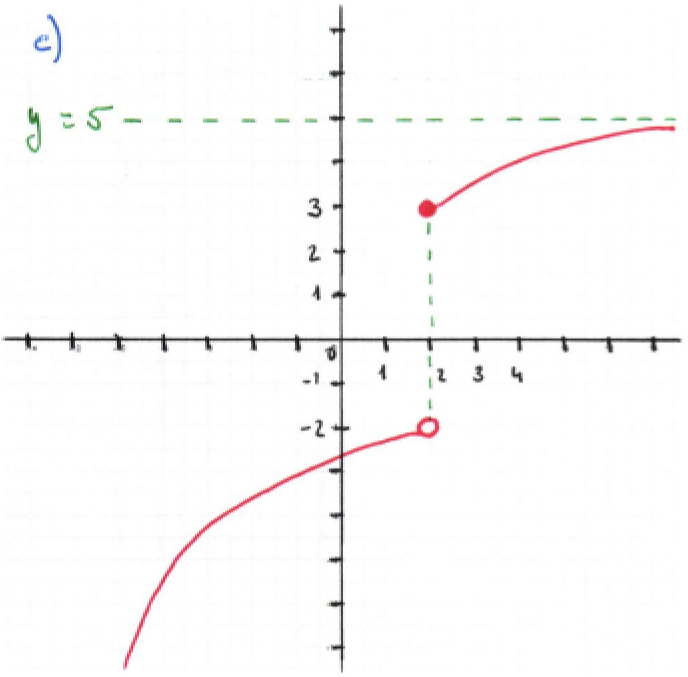
a)



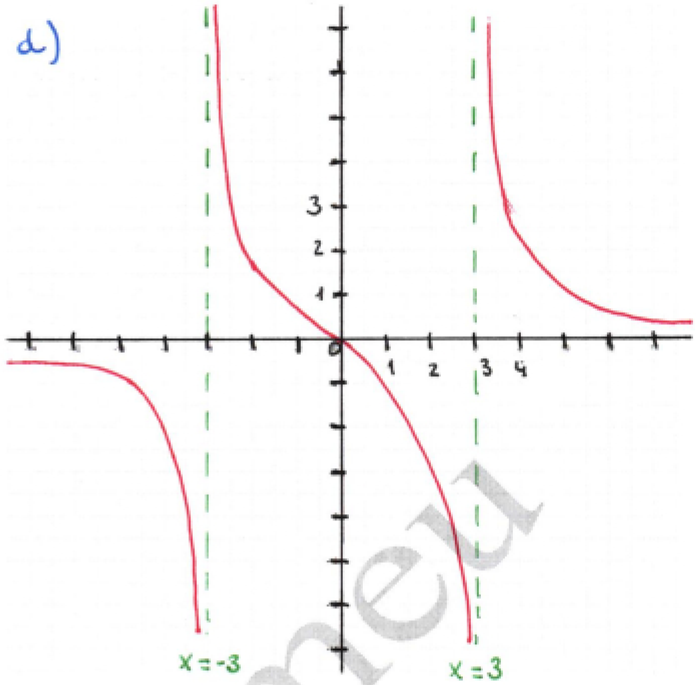
b)



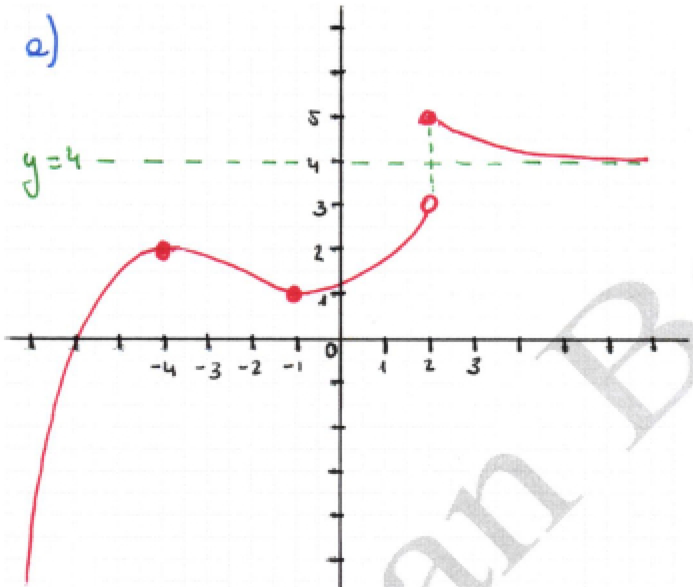
c)



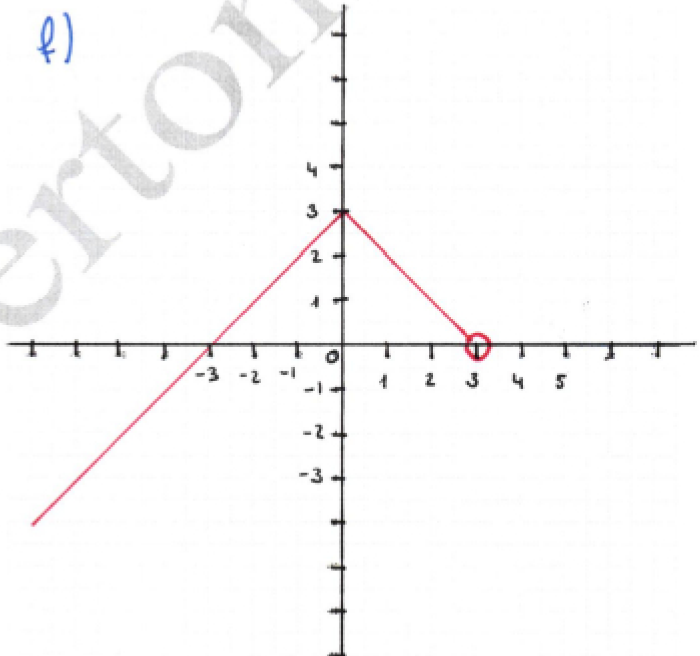
d)



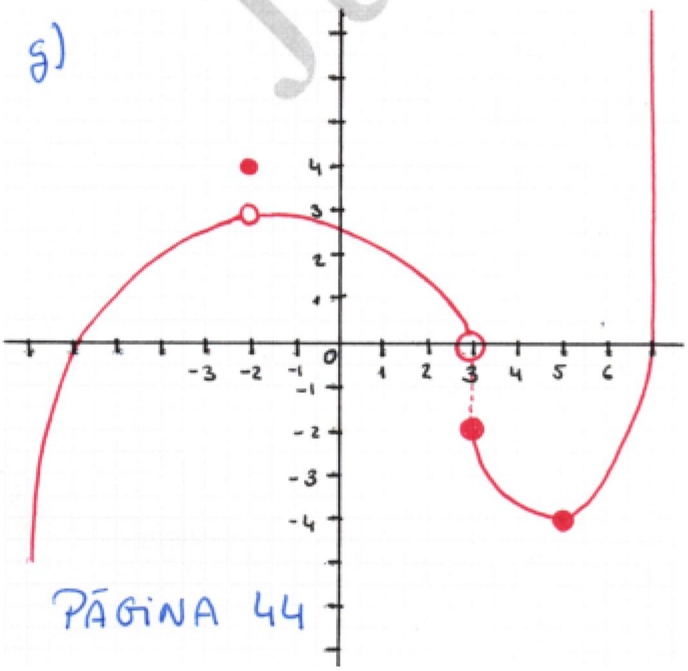
e)



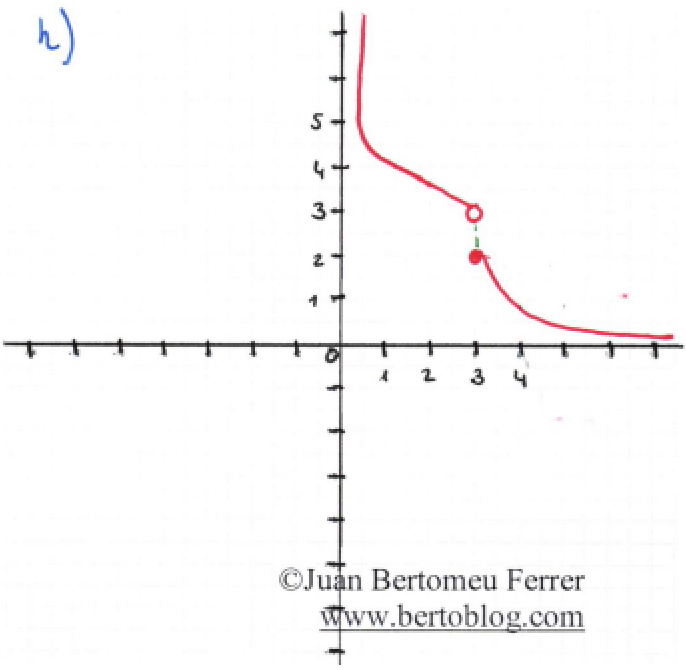
f)



g)



h)



a) $Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$Img(f(x)) = [0, +\infty)$

Creciente en $(0, +\infty)$

Decreciente en $(-\infty, 0)$

b) $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-4\}$

$Img(f(x)) = (-4, -2) \cup (-2, +\infty)$

Creciente : $(-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (0, +\infty)$

Decreciente : $(-2, 0)$

c) $Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$Img(f(x)) = (-\infty, -2) \cup [3, 5)$

Creciente : $\mathbb{R}$

d) $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$Img(f(x)) = \mathbb{R}$

Decreciente : $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

También se puede decir que f(x) es decreciente en todo su dominio

e) $Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$Img(f(x)) = (-\infty, 3) \cup (4, 5]$

Creciente : $(-\infty, -4) \cup (-1, 2)$

Decreciente : $(-4, -1) \cup (5, +\infty)$

f) $Dom(f(x)) = (-\infty, 3)$

$Img(f(x)) = (-\infty, 3]$

Creciente : $(-\infty, 0)$

Decreciente : $(0, 3)$

g) $Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$Img(f(x)) = \mathbb{R}$

Creciente : $(-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$

Decreciente : $(-2, 5)$

h) $Dom(f(x)) = (0, +\infty)$

$Img(f(x)) = (0, 2] \cup (3, +\infty)$ Decreciente : $(0, +\infty)$

(18) Di cuáles son los extremos relativos de las funciones del ejercicio anterior.

a) Mínimo relativo en $(0,0)$

b) Máximo relativo en $(-2,2)$ y mínimo relativo en $(0,0)$

c) No presenta extremos relativos

d) No presenta extremos relativos

e) Máximos relativos en $(-4,2)$ y en $(2,5)$
Mínimo relativo en $(-1,1)$

f) Máximo relativo en $(0,3)$

g) Máximo relativo en $(-2,4)$
Mínimo relativo en $(5,-4)$

h) No presenta extremos relativos.

(19) Dí cuáles son los extremos absolutos de las funciones del ejercicio 17.

a) Mínimo absoluto en $(0,0)$

b) No presenta extremos absolutos

c) No presenta extremos absolutos

d) No presenta extremos absolutos

e) Máximo absoluto en $(2,5)$

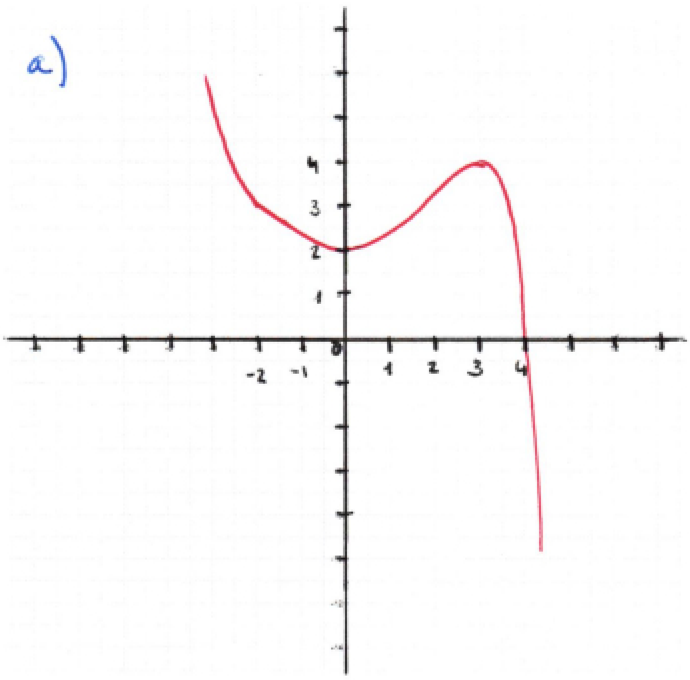
f) Máximo absoluto en $(0,3)$

g) No presenta extremos absolutos.

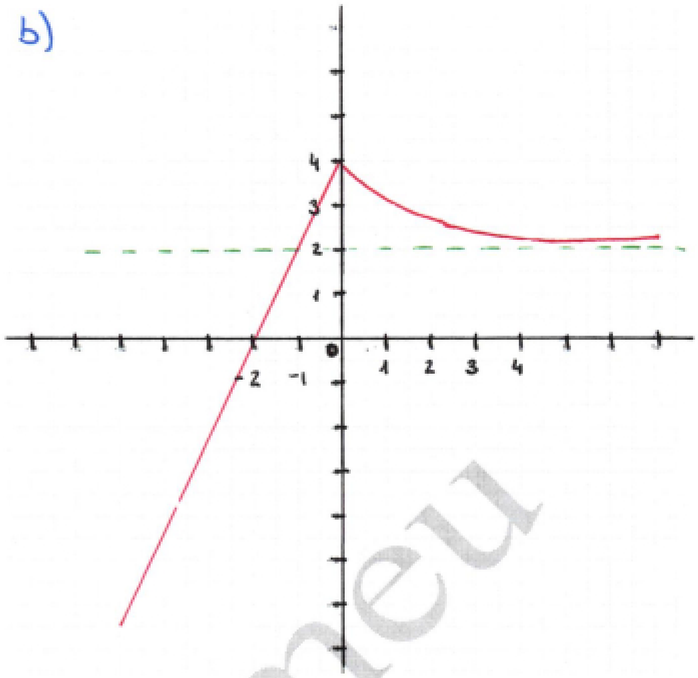
h) No presenta extremos absolutos.

(20) A continuación se dan las gráficas de algunas funciones. Dí cuales son los extremos relativos de la función, así como los extremos absolutos en el intervalo $[-2,4]$

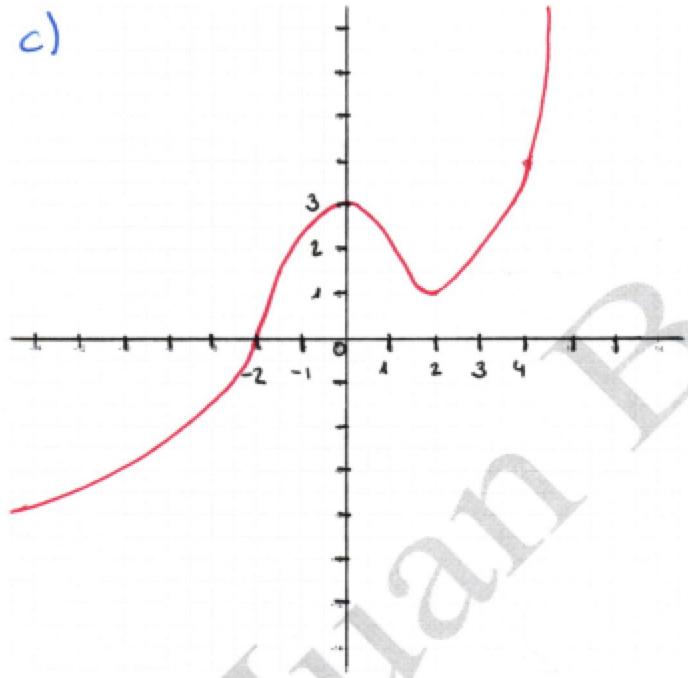
a)



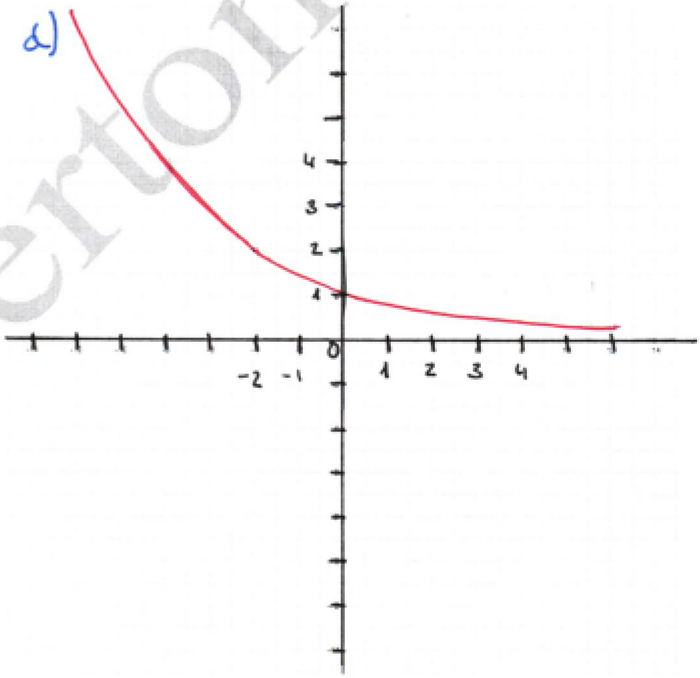
b)



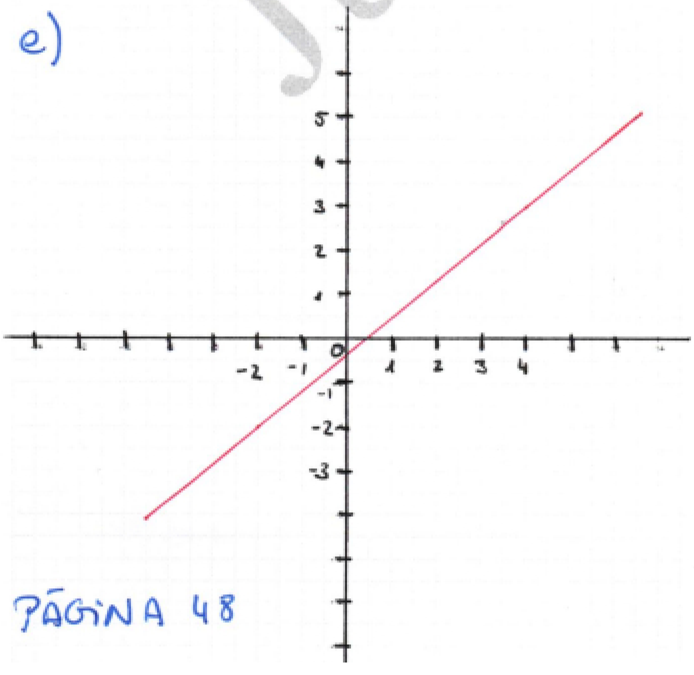
c)



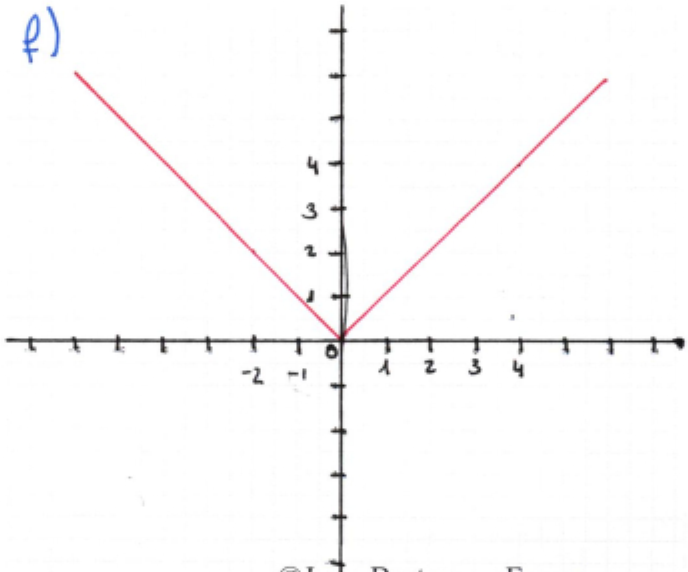
d)



e)



f)



a) Extremos relativos:

Mínimo relativo en $(0,2)$ y máximo relativo en $(3,4)$

Extremos absolutos en $[-2,4]$:

Máximo absoluto en $(3,4)$ y mínimo absoluto en $(4,0)$

b) Extremos relativos:

Máximo relativo en $(0,4)$

Extremos absolutos en $[-2,4]$:

Mínimo absoluto en $(-2,0)$ y máximo absoluto en $(0,4)$

c) Extremos relativos:

Máximo relativo en $(0,3)$ y mínimo relativo en $(2,1)$

Extremos absolutos en $[-2,4]$:

Mínimo absoluto en $(-2,0)$ y máximo absoluto en $(4,4)$

d) No presenta extremos relativos

Extremos absolutos en $[-2,4]$:

Máximo absoluto en $(-2,2)$ y mínimo absoluto en $(4,1/2)$

e) No presenta extremos relativos

Extremos absolutos en $[-2,4]$

Mínimo absoluto en $(-2,-2)$ y máximo absoluto en $(4,3)$

f) Extremos relativos:

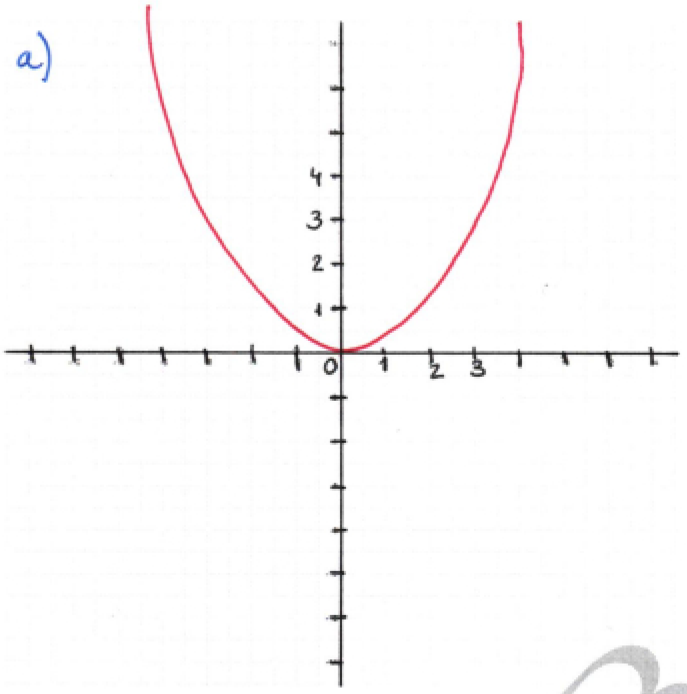
Mínimo relativo en $(0,0)$

Extremos absolutos en $[-2,4]$

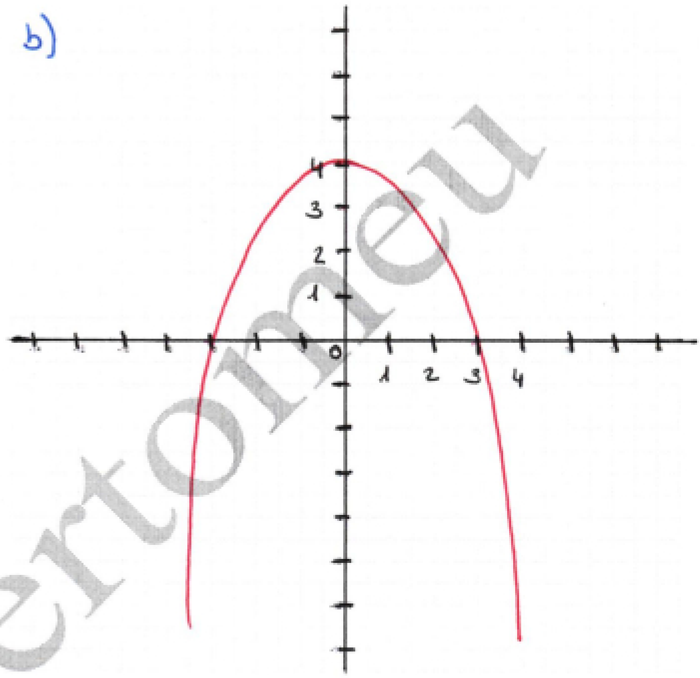
Mínimo absoluto en $(0,0)$ y máximo absoluto en $(4,4)$

(21) A continuación se dan las gráficas de algunas funciones de las que debes decir sus intervalos de curvatura y localizar sus puntos de inflexión.

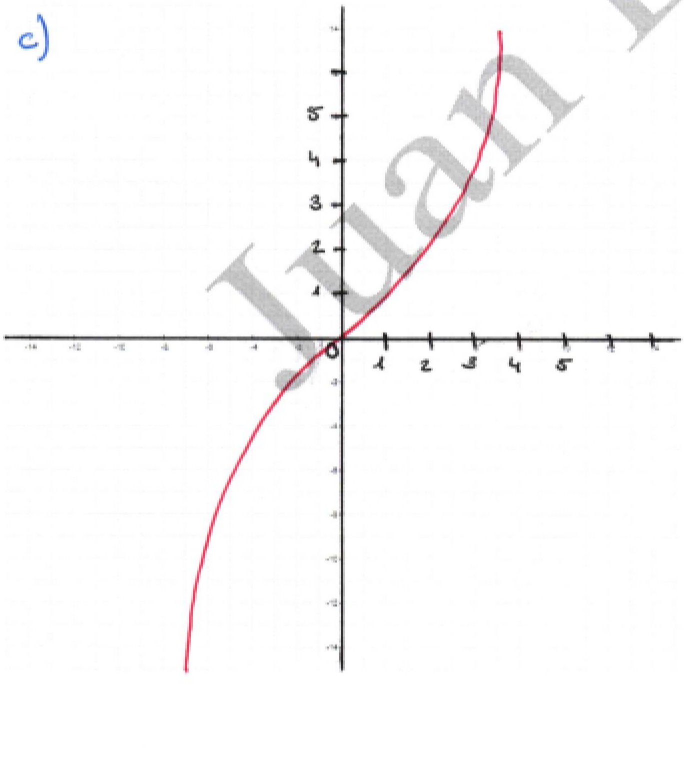
a)



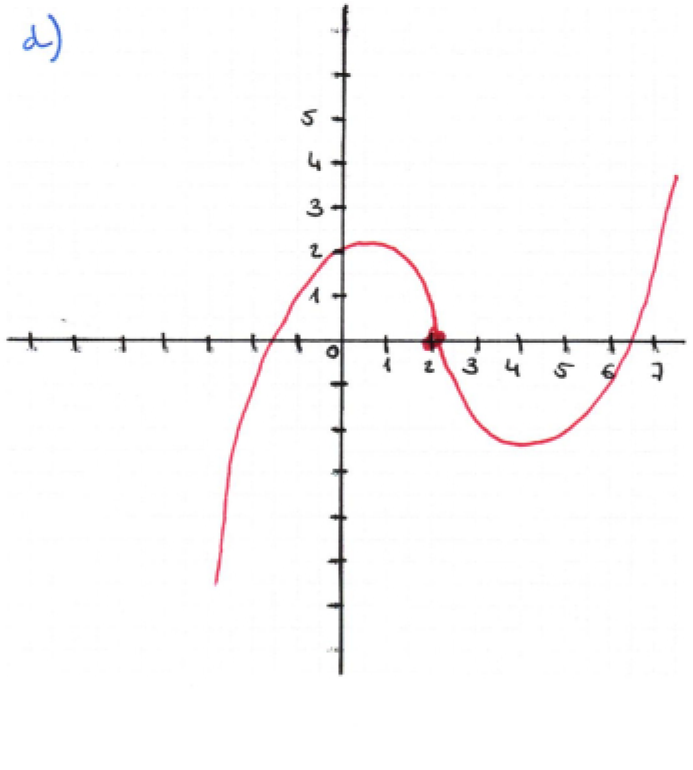
b)



c)



d)



a) La función es cóncava en $\mathbb{R}$ y no presenta puntos de inflexión.

b) La función es convexa en $\mathbb{R}$ y no presenta puntos de inflexión.

c) Cóncava: $(0,+\infty)$

Convexa: $(-\infty,0)$

Punto de inflexión en $(0,0)$

d) Cóncava: $(2,+\infty)$

Convexa: $(-\infty,2)$

Punto de inflexión en $(2,0)$