

Fórmulas de Derivadas e Integrales

ALGUNAS IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS:

$$1. \begin{cases} \sin^2 u + \cos^2 u = 1 \\ \cos^2 u = 1 - \sin^2 u \\ \sin^2 u = 1 - \cos^2 u \end{cases}$$

$$2. 1 + \tan^2 u = \sec^2 u ; \quad \tan^2 u = \sec^2 u - 1$$

$$3. 1 + \operatorname{ctg}^2 u = \operatorname{csc}^2 u ; \quad \operatorname{ctg}^2 u = \operatorname{csc}^2 u - 1$$

$$4. \sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$5. \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$6. \sin u = \frac{1}{\operatorname{csc} u} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{csc} u = \frac{1}{\sin u} \\ \operatorname{csc} u \sin u = 1 \end{cases}$$

$$7. \cos u = \frac{1}{\operatorname{sec} u} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sec} u = \frac{1}{\cos u} \\ \operatorname{sec} u \cos u = 1 \end{cases}$$

$$8. \tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{cos} u}$$

$$9. \operatorname{ctg} u = \frac{\operatorname{cos} u}{\operatorname{sen} u}$$

$$10. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$11. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$12. \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$13. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$14. \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$15. \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

PROPIEDADES DE LOGARITMOS:

$$1. \operatorname{Log}_b(A.B) = \operatorname{Log}_b A + \operatorname{Log}_b B$$

$$2. \operatorname{Log}_b\left(\frac{A}{B}\right) = \operatorname{Log}_b A - \operatorname{Log}_b B$$

$$3. \operatorname{Log}_b A^n = n \operatorname{Log}_b A$$

$$4. \operatorname{Log}_e A = \ln A$$

$$5. \ln(A.B) = \ln A + \ln B$$

$$6. \ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$$

$$7. \ln A^n = n \ln A$$

$$8. \ln \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \ln A$$

$$8. e^{\ln N} = N$$

$$9. b^{\operatorname{Log}_b N} = N$$

FORMULAS ELEMENTALES DE DERIVADAS

Sea las funciones $u = u(x)$; $v = v(x)$. Entonces:

$$1. \frac{d}{dx} C = 0, \text{ donde } C \text{ es una constante}$$

$$2. \frac{d}{dx} u^n = n u^{n-1} \frac{du}{dx}, \text{ donde } n \in \mathbb{R}$$

$$3. \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}, \text{ donde } n \in \mathbb{R}$$

$$4. \frac{d}{dx} (u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$5. \frac{d}{dx} (k u) = k \frac{du}{dx}, \text{ donde } k \text{ es una constante}$$

$$6. \frac{d}{dx} (u \cdot v) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$7. \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Consecuencias particulares de la fórmula 2, esto es:

8. $\frac{d}{dx} \sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$

9. $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10. $\frac{d}{dx} \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \frac{du}{dx}$, donde $n \in \mathbb{R}$

11. $\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, donde $n \in \mathbb{R}$

Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas:

12. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$; ($a > 0$)

13. $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$

14. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$

15. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

16. $\frac{d}{dx} \text{Log}_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}$

17. $\frac{d}{dx} \text{Log}_a x = \frac{1}{x \ln a}$

18. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

19. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

20. $\frac{d}{dx} u^v = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$

Derivada de funciones trigonométricas:

21. $\frac{d}{dx} \text{sen } u = \cos u \frac{du}{dx}$

22. $\frac{d}{dx} \text{sen } x = \cos x$

23. $\frac{d}{dx} \text{cos } u = -\text{sen } u \frac{du}{dx}$

24. $\frac{d}{dx} \text{cos } x = -\text{sen } x$

25. $\frac{d}{dx} \text{tan } u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

26. $\frac{d}{dx} \text{tan } x = \sec^2 x$

27. $\frac{d}{dx} \text{ctg } u = -\text{csc}^2 u \frac{du}{dx}$

28. $\frac{d}{dx} \text{ctg } x = -\text{csc}^2 x$

29. $\frac{d}{dx} \text{sec } u = \text{sec } u \text{tan } u \frac{du}{dx}$

30. $\frac{d}{dx} \text{sec } x = \text{sec } x \text{tan } x$

31. $\frac{d}{dx} \text{csc } u = -\text{csc } u \text{ctg } u \frac{du}{dx}$

32. $\frac{d}{dx} \text{csc } x = -\text{csc } x \text{ctg } x$

Derivada de funciones trigonométricas inversas:

33. $\frac{d}{dx} \text{arcsen } u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$

34. $\frac{d}{dx} \text{arcsen } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

35. $\frac{d}{dx} \text{arc cos } u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$

36. $\frac{d}{dx} \text{arc cos } x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

37. $\frac{d}{dx} \text{arc tan } u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$

38. $\frac{d}{dx} \text{arc tan } x = \frac{1}{1+x^2}$

39. $\frac{d}{dx} \text{arc ctg } u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$

40. $\frac{d}{dx} \text{arc ctg } x = \frac{-1}{1+x^2}$

41. $\frac{d}{dx} \text{arc sec } u = \frac{1}{|u| \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$

42. $\frac{d}{dx} \text{arc sec } x = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}$

43. $\frac{d}{dx} \text{arc csc } u = \frac{-1}{|u| \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$

44. $\frac{d}{dx} \text{arc csc } x = \frac{-1}{|x| \sqrt{x^2-1}}$

RECTAS TANGENTES Y NORMALES

Recta Tangente.- La recta tangente a la gráfica de f en el punto $P = (a, f(a))$, está dada por:

$$L_T : y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Recta Normal.- La recta normal a la gráfica de f en el punto $P = (a, f(a))$, está dada por:

$$L_T : y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

APLICACIONES DE LA DERIVADA:

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Teorema 1. Si f es continua sobre $[a, b]$ y si $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, entonces f es **creciente**

(**estrictamente**) sobre $[a, b]$.

Teorema 2. Si f es continua sobre $[a, b]$ y si $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$, entonces f es **decreciente**

(**estrictamente**) sobre $[a, b]$.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Definición 1. Sea f una función definida en I , se llaman **punto crítico de f** a aquellos puntos c del intervalo I , y cumple:

i) $f'(c) = 0$ ó

ii) $f'(c)$ no existe ó

iii) c es uno de los extremos. Si es que éstos estuvieron considerados en el intervalo I .

Criterio de la Primera derivada:

Teorema 3.- Sea c un punto crítico de f . Si existe un intervalo $[a, b]$, donde f es continua tal que $c \in \langle a, b \rangle$, entonces:

i) $\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0, x \in \langle a, c \rangle \text{ y} \\ f'(x) < 0, x \in \langle c, b \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow f(c) \text{ es un Máximo relativo de } f.$

ii) $\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0, x \in \langle a, c \rangle \text{ y} \\ f'(x) > 0, x \in \langle c, b \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow f(c) \text{ es un Mínimo relativo de } f.$

iii) $\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0, x \in \langle a, c \rangle \text{ y} \\ f'(x) > 0, x \in \langle c, b \rangle \end{array} \right\} \text{ ó } \left. \begin{array}{l} f'(x) > 0, x \in \langle a, c \rangle \text{ y} \\ f'(x) > 0, x \in \langle c, b \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow f(c) \text{ no es máximo y}$

mínimo de f .

Observaciones: Si c un punto crítico de f . De teorema se desprende:

1. Si cambia de “+” (antes de c) a “-” (después de c), entonces se tiene un **máximo relativo**.

2. Si cambia de “-” (antes de c) a “+” (después de c), entonces se tiene un **mínimo relativo**.

Criterio de la Segunda derivada:

Teorema 4.- Sea f una función diferenciable en el entorno de c . Si $f'(c) = 0$ y si $f''(c)$, entonces:

i) $f''(c) < 0 \Rightarrow f(c)$ es un **máximo relativo**.

ii) $f''(c) > 0 \Rightarrow f(c)$ es un **mínimo relativo**.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n} \right) dx$$

Luego se determina las constantes

$$A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$$

Caso IV.- Si $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^n$; $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)^1} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n} \right) dx$$

Luego se determina las constantes

$$A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$$

B. Si el grado $(P(x)) >$ grado $(Q(x))$, entonces se procede a dividir, para luego aplicarlos casos anteriores.

INTEGRACION DE ALGUNAS FUNCIONES IRRACIONALES

A. Integrales de la forma:

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_1/n_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_k/n_k} \right) dx; \quad n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

Para evaluar éste tipo de integral, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ donde } n = M.C.M.\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$$

B. Integrales de la forma:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{px^2 + qx + r}}; \quad n \in \mathbb{N}$$

Para evaluar éste tipo de integral, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$x - a = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$$

C. Integrales de la forma:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx; \quad a \neq 0, b \neq 0 \text{ (Integrales del binomio diferencial)}$$

Esta integral se reduce a la integral de función racional de una variable solamente en los siguientes casos:

Caso I.- Si $p \in \mathbb{Z}$, hacemos la sustitución: $x = t^k$,

donde $k = M.C.M.$ [denominador de m y n]

Caso II.- Si $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, hacemos la sustitución: $a + bx^n = t^s$,

donde " s " es el denominador de " p " ($p = \frac{r}{s}$; siendo r y s son primos entre si).

Caso III.- Si $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$,

hacemos la sustitución: $a + bx^n = x^n t^s$ ó $ax^{-n} + b = t^s$,

donde " s " es el denominador de " p " ($p = \frac{r}{s}$; siendo r y s son primos entre si).

FORMULAS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

Primer Grupo de Fórmulas:

$$1. \int du = u + C$$

$$2. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1, n \in \mathbb{R}$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$4. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \quad a > 0, a \neq 1$$

$$5. \int e^u du = e^u + C$$

Segundo Grupo de Fórmulas

$$6. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$7. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$8. \int \tan u du = \ln |\sec u| + C = -\ln |\cos u| + C$$

$$9. \int \cot u du = \ln |\sin u| + C$$

$$10. \int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$$

$$11. \int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + C$$

$$12. \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$13. \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$14. \int \tan u \sec u du = \tan u + C$$

$$15. \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

Tercer Grupo de Fórmulas:

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C; \quad (a > 0)$$

$$17. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C; \quad (a > 0)$$

$$18. \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec \frac{|u|}{a} + C; \quad (a > 0)$$

$$19. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C; \quad (a > 0)$$

$$20. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$21. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} \left[u \sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsen \frac{u}{a} \right] + C; \quad (a > 0)$$

$$22. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{2} \left[u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| \right] + C$$

Fórmulas adicionales:

23. $\int \sinh u \, du = \cosh u + C$

24. $\int \cosh u \, du = \sinh u + C$

25. $\int \tanh u \, du = \ln |\cosh u| + C$

26. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$

27. $\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\operatorname{ctgh} u + C$

28. $\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$

29. $\int \operatorname{csch} u \operatorname{ctgh} u \, du = -\operatorname{csch} u + C$

INTEGRALES DE ALGUNAS FUNCIONES QUE CONTIENEN TRINOMIO CUADRADO**Caso I:**

* $\int \frac{dx}{px^2 + qx + r}$, para determinar ésta integral, será suficiente completar a cuadrados en el trinomio y luego aplicar las fórmulas (17) o (19).

* $\int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$ para determinar ésta integral, será suficiente completar a cuadrados en el trinomio y luego aplicar las fórmulas (16) o (20).

Caso II. - Para calcular las integrales:

$$I_1 = \int \frac{(ax + b) dx}{px^2 + qx + r} \quad I_2 = \int \frac{(ax + b) dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$$

Usaremos el artificio siguiente: $ax + b = \frac{a}{2p}(2px + q) - \frac{aq}{2p} + b$

Donde $(2px + q)$ es la derivada del trinomio cuadrado.

Entonces:

$$\begin{aligned} * \int \frac{(ax + b) dx}{px^2 + qx + r} &= \frac{a}{2p} \int \frac{(2px + q) dx}{px^2 + qx + r} + \left(b - \frac{aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{px^2 + qx + r} \\ &= \frac{a}{2p} \ln |px^2 + qx + r| + \left(b - \frac{aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{px^2 + qx + r} \end{aligned}$$

Para determinar la última integral se usa el caso anterior

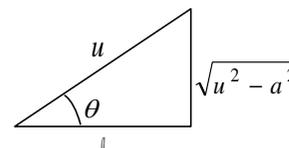
$$\begin{aligned} * \int \frac{(ax + b) dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}} &= \frac{a}{2p} \int \frac{(2px + q) dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}} + \left(b - \frac{aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}} \\ &= \frac{a}{p} \sqrt{px^2 + qx + r} + \left(b - \frac{aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}} \end{aligned}$$

Para determinar la última integral se usa el caso anterior

Se elimina el radical:

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} = a \sqrt{\tan^2 \theta} = a \tan \theta$$

Para retornar a la variable "u" construimos el triángulo: $\sec \theta = \frac{u}{a}$



Observación. - Cuando los integrandos contiene:

1. $\sqrt{a^2 - u^2}$, se hace la sustitución: $u = a \tanh t$

Se elimina el radical:

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2(1 - \tanh^2 t)} = a \operatorname{sech} t$$

2. $\sqrt{a^2 + u^2}$, se hace la sustitución: $u = a \sinh t$

Se elimina el radical:

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2(1 + \sinh^2 t)} = a \cosh t$$

3. $\sqrt{u^2 - a^2}$, se hace la sustitución: $u = a \cosh t$

Se elimina el radical:

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = a \sinh t$$

METODO DE INTEGRACION POR FRACCIONES PARCIALES

Para integrar $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, procedemos del siguiente modo:

A. Si el grado $(Q(x)) > \text{grado}(P(x))$, entonces descomponemos en fracciones parciales, esto es:

Caso I. - Si $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$, entonces:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} \right) dx$$

Luego se determina las constantes A_1, A_2, \dots, A_n

Caso II. - Si $Q(x) = (x - a)^n$; $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n} \right) dx$$

Luego se determina las constantes A_1, A_2, \dots, A_n

Caso III. - Si

$Q(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \dots (a_nx^2 + b_nx + c_n)$, entonces:

Para evaluar éste tipo de integrales se usa la identidad trigonométrica siguiente:

$$\operatorname{sen}(Au) \cos(Bu) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(A+B)u + \operatorname{sen}(A-B)u)$$

$$* I_2 = \int \cos(Au) \cos(Bu) du$$

Para evaluar éste tipo de integrales se usa la identidad trigonométrica siguiente:

$$\cos(Au) \cos(Bu) = \frac{1}{2}(\cos(A-B)u + \cos(A+B)u)$$

$$* I_3 = \int \operatorname{sen}(Au) \operatorname{sen}(Bu) du$$

Para evaluar éste tipo de integrales se usa la identidad trigonométrica siguiente:

$$\operatorname{sen}(Au) \operatorname{sen}(Bu) = \frac{1}{2}(\cos(A-B)u - \cos(A+B)u)$$

INTEGRACION POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICA

A. Si la integral contiene: $\sqrt{a^2 - u^2}$

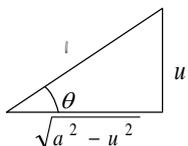
Entonces se hace la sustitución:

$$u = a \operatorname{sen} \theta \Rightarrow du = a \cos \theta d\theta$$

Se elimina el radical:

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} = a \sqrt{\cos^2 \theta} = a \cos \theta$$

Para retornar a la variable "u" construimos el triángulo: $\operatorname{sen} \theta = \frac{u}{a}$



B. Si la integral contiene: $\sqrt{a^2 + u^2}$

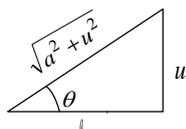
Entonces se hace la sustitución:

$$u = a \tan \theta \Rightarrow du = a \sec^2 \theta d\theta$$

Se elimina el radical:

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} = a \sqrt{\sec^2 \theta} = a \sec \theta$$

Para retornar a la variable "u" construimos el triángulo: $\tan \theta = \frac{u}{a}$



C. Si la integral contiene: $\sqrt{u^2 - a^2}$

Entonces se hace la sustitución:

$$u = a \sec \theta \Rightarrow du = a \sec \theta \tan \theta d\theta$$

METODO DE INTEGRACION POR PARTES

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Para aplicar esta fórmula, se debe descomponer el integrando en dos factores u i dv de los cuales debe elegirse que "u" se tenga que derivar y "dv" integrar de manera que sea posible la integración.

INTEGRALES QUE CONTIENEN POTENCIAS EN LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

A. Integrales de la forma:

$$I_1 = \int \operatorname{sen}^n u du; \quad I_2 = \int \cos^n u du \quad \text{donde } n \in \mathbb{N}$$

Para evaluar éste tipo de integrales se presentan dos casos:

Caso I.- Si $n = \text{Número IMPAR}$, entonces:

$$n = 2k + 1, \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$* I_1 = \int \operatorname{sen}^n u du = \int (\operatorname{sen}^2 u)^k \operatorname{sen} u du = \int (1 - \cos^2 u)^k \operatorname{sen} u du, \quad \text{luego para calcular hacemos el cambio variable: } w = \cos u.$$

$$* I_2 = \int \cos^n u du = \int (\cos^2 u)^k \cos u du = \int (1 - \operatorname{sen}^2 u)^k \cos u du, \quad \text{luego para calcular hacemos el cambio variable: } w = \operatorname{sen} u.$$

Caso II.- Si $n = \text{Número PAR}$, entonces:

$$n = 2k, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

$$* I_1 = \int \operatorname{sen}^n u du = \int (\operatorname{sen}^2 u)^k du = \int \left(\frac{1 - \cos 2u}{2} \right)^k du$$

$$* I_2 = \int \cos^n u du = \int (\cos^2 u)^k du = \int \left(\frac{1 + \cos 2u}{2} \right)^k du$$

Luego se desarrolla en los integrandos la potencia k , de donde se requerirá de nuevo el uso de los casos I y II.

B. Integrales de la forma:

$$I = \int \operatorname{sen}^n u \cos^m u du$$

Para evaluar éste tipo de integrales se presentan dos casos:

Caso I.- Si "n" ó "m" es un número entero positivo **IMPAR**, de ser así el otro puede ser cualquier número, esto es:

Por ejemplo si: $n = \text{Número entero positivo IMPAR}$ y $m = \text{cualquier número}$.

Entonces: $n = 2k + 1, \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$* I = \int (\operatorname{sen}^2 u)^k \cos^m u \operatorname{sen} u du = \int (1 - \cos^2 u)^k \cos^m u \operatorname{sen} u du, \quad \text{luego para calcular hacemos el cambio variable: } w = \cos u.$$

Por ejemplo si: $m = \text{Número entero positivo IMPAR}$ y $n = \text{cualquier número}$.

Entonces: $m = 2k + 1, \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$* I = \int \sin^n u (\cos^2 u)^k \cos u \, du = \int \sin^n u (1 - \sin^2 u)^k \cos u \, du, \text{ luego para calcular hacemos el cambio variable: } w = \sin u.$$

Caso II.- Si "n" y "m" son números enteros positivos **PARES**, entonces para calcular dicha integral se utiliza las identidades siguientes:

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}; \quad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

C. Integrales de la forma:

$$I_1 = \int \tan^n u \sec^m u \, du; \quad I_2 = \int \operatorname{ctg}^n u \csc^m u \, du$$

Para evaluar éste tipo de integrales se presentan los siguientes casos:

Caso I.- Si $n =$ Número entero positivo **IMPARE** y $m =$ Cualquier número.

Entonces:

$$n = 2k + 1, \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$* I_1 = \int \tan^n u \sec^m u \, du = \int (\tan^2 u)^k \sec^{m-1} u (\tan u \sec u \, du) \\ = \int (\sec^2 u - 1)^k \sec^{m-1} u (\tan u \sec u \, du), \text{ luego para calcular hacemos el cambio variable: } w = \sec u.$$

$$* I_2 = \int \operatorname{ctg}^n u \csc^m u \, du = \int (\operatorname{ctg}^2 u)^k \csc^{m-1} u (\operatorname{ctg} u \csc u \, du) \\ = \int (\csc^2 u - 1)^k \csc^{m-1} u (\operatorname{ctg} u \csc u \, du), \text{ luego para calcular hacemos el cambio variable: } w = \csc u.$$

Caso II.- Si $m =$ Número **PAR** y $n =$ Cualquier número.

Entonces:

$$n = 2k, \forall k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$* I_1 = \int \tan^n u \sec^m u \, du = \int \tan^n u (\sec^2 u)^{(m-2)/2} \sec^2 u \, du \\ = \int \tan^n u (1 + \tan^2 u)^{(m-2)/2} \sec^2 u \, du, \text{ luego para calcular hacemos el cambio variable: } w = \tan u.$$

$$* I_2 = \int \operatorname{ctg}^n u \csc^m u \, du = \int \operatorname{ctg}^n u (\csc^2 u)^{(m-2)/2} \csc^2 u \, du \\ = \int \operatorname{ctg}^n u (1 + \operatorname{ctg}^2 u)^{(m-2)/2} \csc^2 u \, du, \text{ luego para calcular hacemos el cambio variable: } w = \operatorname{ctg} u.$$

Caso III.- Si $m =$ Número entero positivo **IMPARE** y

$n =$ Número entero positivo **PAR**.

Entonces la solución se determina mediante el método de **integración por partes**

D. Integrales de la forma:

$$I_1 = \int \tan^n u \, du; \quad I_2 = \int \operatorname{ctg}^n u \, du \text{ donde } n \in \mathbb{Z}^+$$

Si "n" es un número entero positivo **PAR** o **IMPARE**, procedemos de la siguiente manera:

$$* I_1 = \int \tan^n u \, du = \int \tan^{n-2} u \tan^2 u \, du = \int \tan^{n-2} u (\sec^2 u - 1) \, du \\ = \int \tan^{n-2} u \sec^2 u \, du - \int \tan^{n-2} u \, du = \frac{\tan^{n-1} u}{n-1} - \int \tan^{n-2} u \, du$$

Este proceso repetimos cuantas veces sea necesario, hasta obtener la solución.

Análogamente tenemos:

$$* I_2 = \int \operatorname{ctg}^n u \, du = \int \operatorname{ctg}^{n-2} u \operatorname{ctg}^2 u \, du = \int \operatorname{ctg}^{n-2} u (\csc^2 u - 1) \, du \\ = \int \operatorname{ctg}^{n-2} u \csc^2 u \, du - \int \operatorname{ctg}^{n-2} u \, du = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} u}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} u \, du$$

E. Integrales de la forma:

$$I_1 = \int \sec^n u \, du; \quad I_2 = \int \csc^n u \, du \text{ donde } n \in \mathbb{Z}^+$$

Para evaluar éste tipo de integrales se presentan los siguientes casos:

Caso I.- Si $n =$ Número positivo **PAR**.

Entonces:

$$n = 2k, \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

$$* I_1 = \int \sec^n u \, du = \int (\sec^2 u)^{(n-2)/2} \sec^2 u \, du \\ = \int (1 + \tan^2 u)^{(n-2)/2} \sec^2 u \, du, \text{ luego para calcular hacemos el cambio variable: } \\ w = \tan u.$$

$$* I_2 = \int \csc^n u \, du = \int (\csc^2 u)^{(n-2)/2} \csc^2 u \, du \\ = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 u)^{(n-2)/2} \csc^2 u \, du, \text{ luego para calcular hacemos el cambio variable: } \\ w = \operatorname{ctg} u.$$

Caso II.- Si $n =$ Número positivo **IMPARE**, entonces la solución se determina mediante el método de **integración por partes**.

F. Integrales de la forma:

$$* I_1 = \int \sin(Au) \cos(Bu) \, du$$