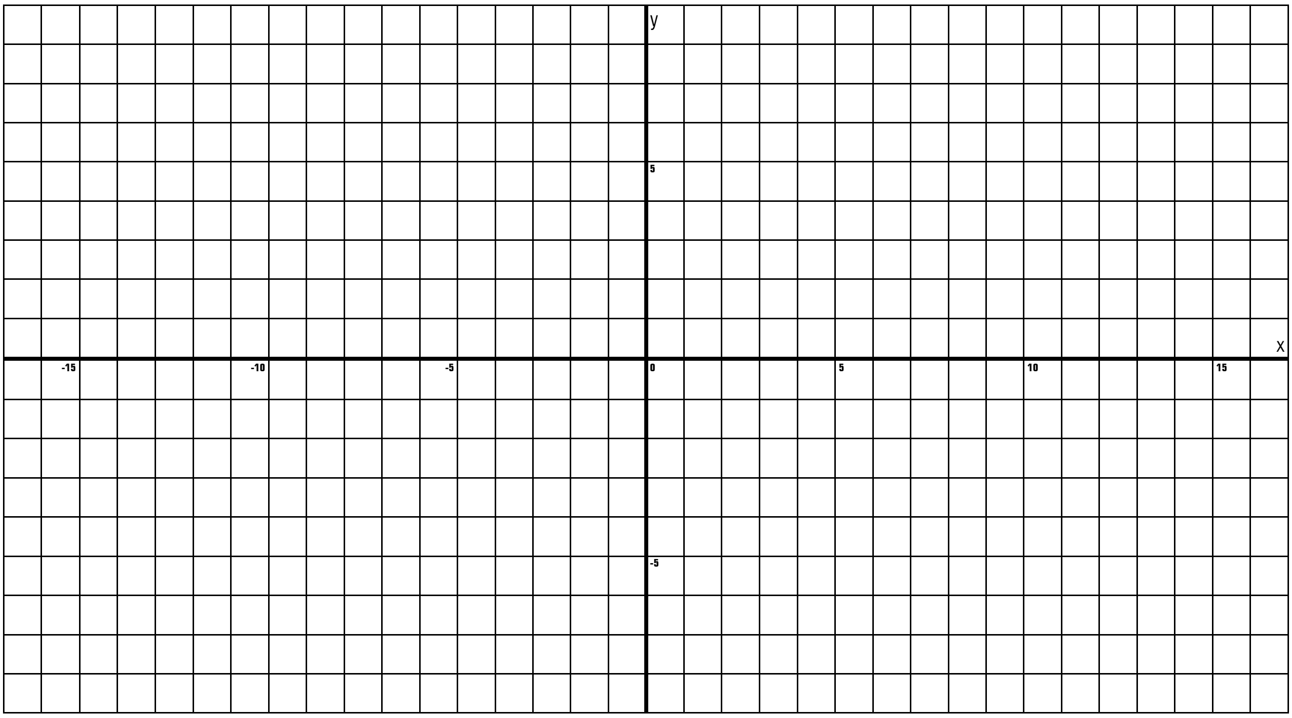
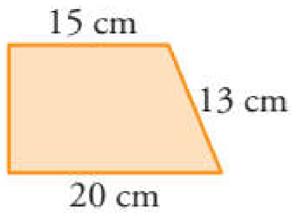
1.- Representa las funciones: $f(x) = 5 - 3x$ $g(x) = 2$ $h(x) = x + 1$ **(1,5 puntos)**

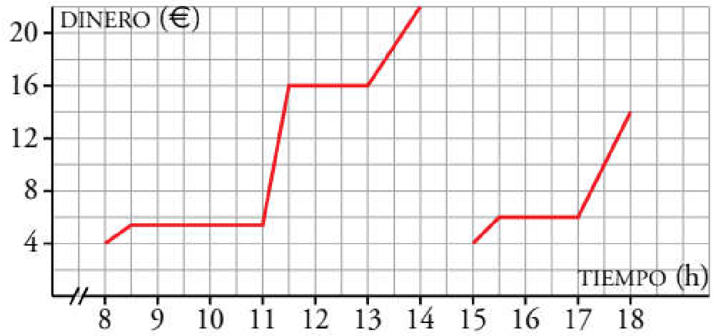


2.- Calcula el perímetro del triángulo cuya base coincide con la base menor de este trapecio y que se obtiene al prolongar los lados no paralelos hasta que se corten. ***(2 puntos)***



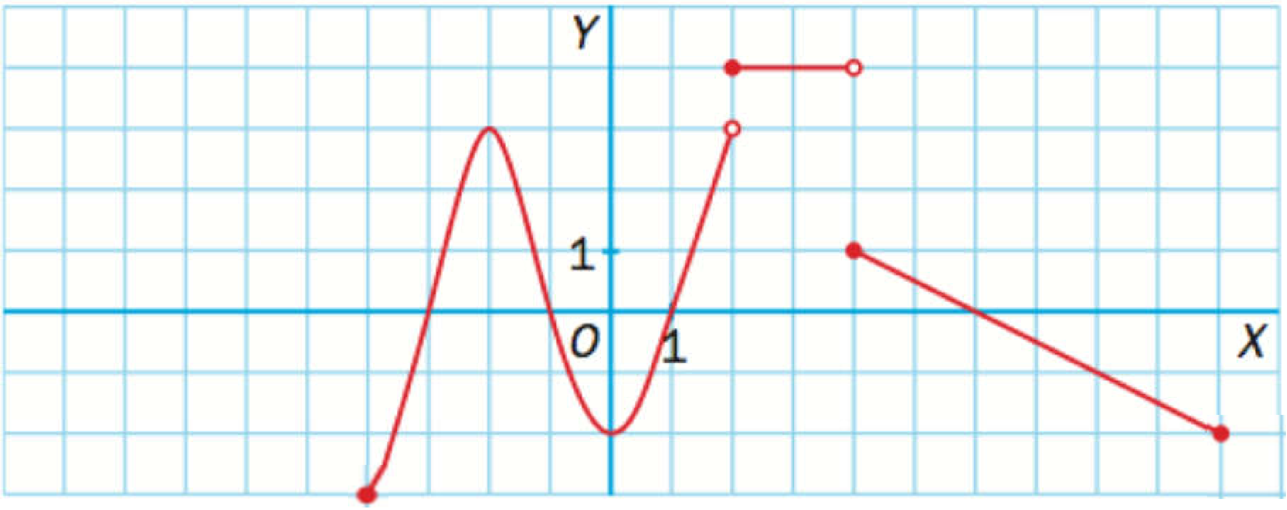
3.- Entre Fátima, de 152 cm de altura, y un árbol, hay un pequeño charco en el Fátima ve reflejada su copa. Calcula la altura de dicho árbol sabiendo que las distancias que separan a Fátima del reflejo en el charco y del árbol son de 3,2 m y 10,7 m, respectivamente. ***(2 puntos)***

4.- En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En la siguiente gráfica se refleja la cantidad de dinero que hay en la caja registradora a lo largo de un día: **(1,5 puntos)**



a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?
b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?
c) El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?
d) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?
e) ¿Es esta una función continua o discontinua?
f) ¿Cuánto dinero ha recaudado en todo el día?

5.- *Estudia de la siguiente función:* Dominio y recorrido, continuidad, puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos. **(2 puntos)**

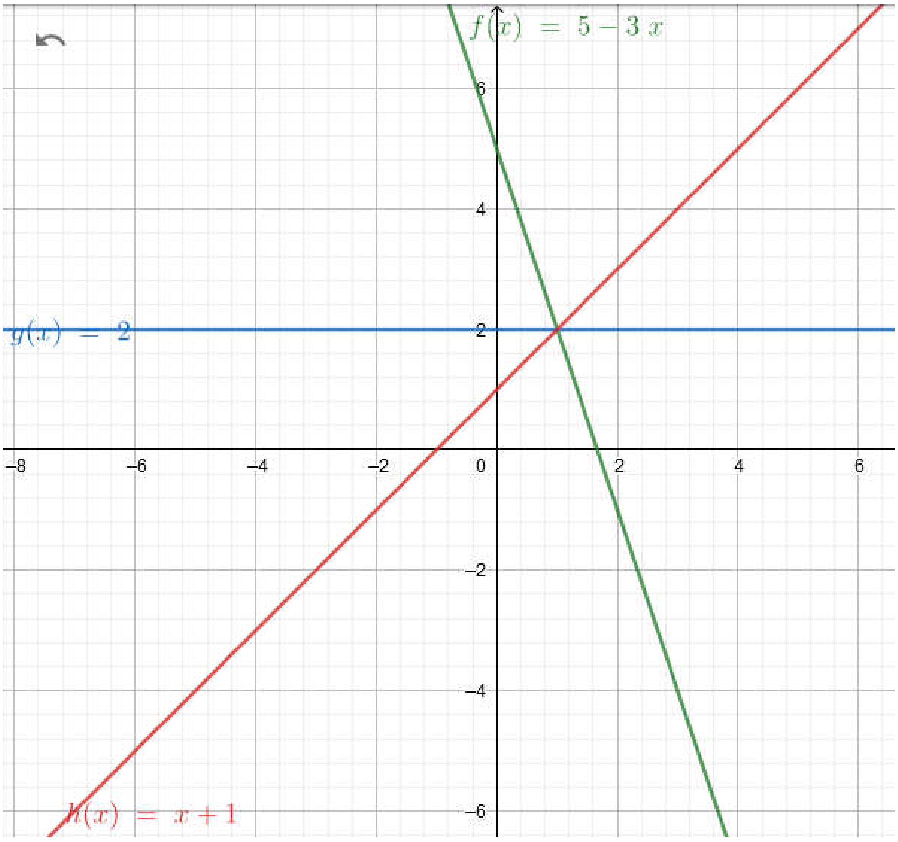


6.- Escribe el área de un rectángulo de perímetro 16 cm en función de su base x. ¿Cuál es el dominio de definición de esa función? ***(1 punto)***

Soluciones

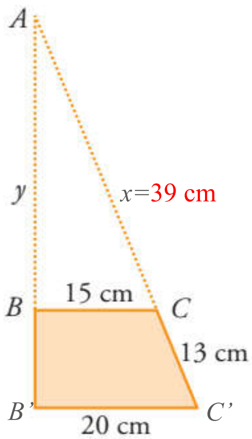
1.- Representa las funciones: $f(x) = 5 - 3x$ $\quad g(x) = 2$ $\quad h(x) = x + 1$ **(1,5 puntos)**

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.4.1.1) (B.4.4.1)



2.- Calcula el perímetro del triángulo cuya base coincide con la base menor de este trapecio y que se obtiene al prolongar los lados no paralelos hasta que se corten. ***(2 puntos)***

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.1.2) (B.3.2.1) (B.3.3.2) (B.3.4.1)



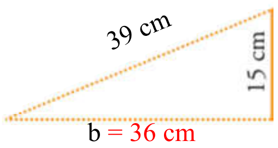
Si prolongamos los lados no paralelos del trapecio obtenemos un triángulo rectángulo dentro de otro. Los triángulos ABC y el AB'C' son triángulos semejantes por encontrarse en posición ***Thales***, uno dentro de otro y sus bases son paralelas.

Por tanto, al ser ***semejantes,*** sus lados son proporcionales. Si llamamos x a la hipotenusa del triángulo ABC, utilizando la proporcionalidad, podremos calcular x:

$$\frac{20}{15} = \frac{13+x}{x} \quad \rightarrow \quad 20x = 15(13+x) \quad \rightarrow \quad 20x = 195 + 15x \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 20x - 15x = 195 \quad \rightarrow \quad 5x = 195 \quad \rightarrow \quad x = \frac{195}{5} = 39\ cm$$

Conocida la hipotenusa del triángulo pequeño y uno de sus catetos, podemos calcular el otro, y, mediante Pitágoras para poder calcular su perímetro (la suma de sus lados).



Para calcular el cateto que nos falta utilizamos el ***Teorema de Pitágoras*** que dice que, en un triángulo rectángulo, la hipotenusa (el lado mayor) al cuadrado es igual que la suma de los cuadrados de sus catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

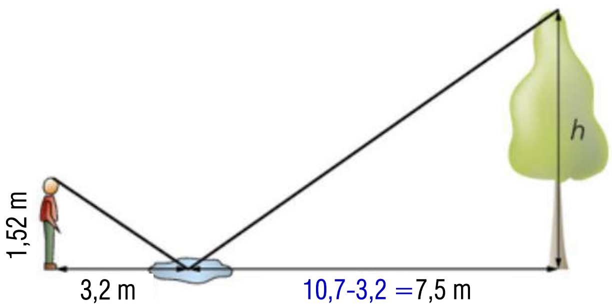
$$\rightarrow \quad y = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1296} = 36\ cm$$

Por tanto, el perímetro pedido es: $P = 15 + 39 + 36 = 90\ cm$

3.- Entre Fátima, de 152 cm de altura, y un árbol, hay un pequeño charco en el que Fátima ve reflejada su copa. Calcula la altura de dicho árbol sabiendo que las distancias que separan a Fátima del reflejo en el charco y del árbol son de 3,2 m y 10,7 m, respectivamente. ***(2 puntos)***

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.4.1.1) (B.4.4.1)

Si representamos en un dibujo lo expresado en el enunciado del problema llegamos a la figura siguiente,



donde tenemos dos triángulos opuestos por el vértice. Como ambos son triángulos rectángulos, y los ángulos opuestos por el vértice son iguales, entonces todos sus ángulos son iguales y por tanto los triángulos son semejantes.

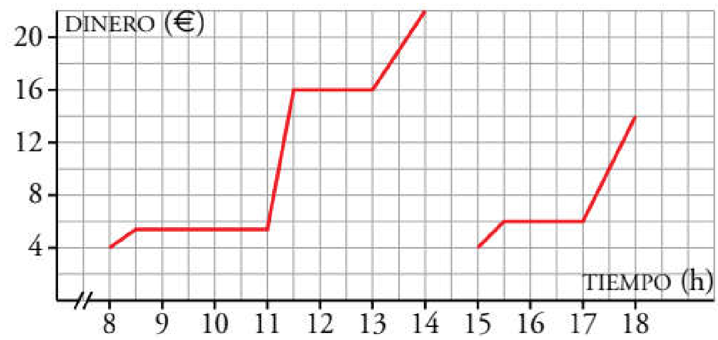
Al ser ***semejantes,*** sus lados son proporcionales, así que, si escribimos las razones altura entre distancia al charco y las igualamos, llegamos a:

$$\frac{1,52}{3,2} = \frac{h}{7,5} \quad \xrightarrow[\text{en cruz}]{\text{Multiplicando}} \quad 1,52 \cdot 7,5 = 3,2 \cdot h \quad \xrightarrow[\text{la altura}]{\text{Despejando}} \quad h = \frac{1,52 \cdot 7,5}{3,2} = 3,5625\ m$$

Por tanto, la altura del árbol pedida es de 3,56 metros.

4.- En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En la siguiente gráfica se refleja la cantidad de dinero que hay en la caja registradora a lo largo de un día: **(1,5 puntos)**

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.4.1.1) (B.4.4.1) (B.4.4.4)



a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?

Las clases comienzan a las 8:30 horas.

b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?

Entre las 11:00 y las 11:30 horas.

c) El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?

Si en la caja había 4 € y a las 14:00 h hay 22 €, los ingresos de la mañana ascienden a 18 €.

d) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

De 15:30 h a 17:00 horas

e) ¿Es esta una función continua o discontinua?

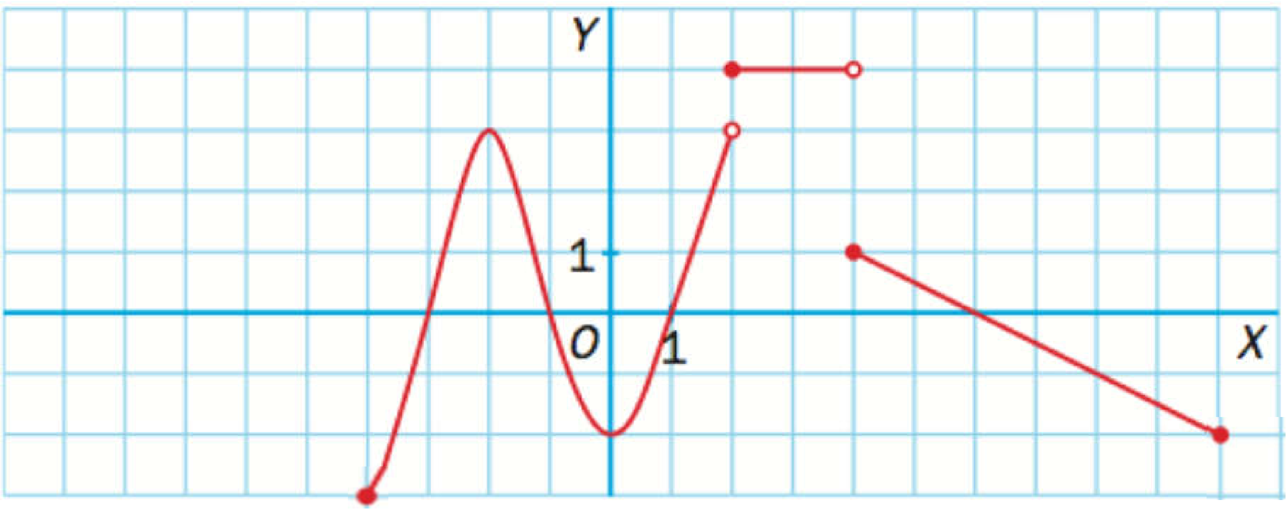
Es claramente discontinua puesto que entre las 14:00 h y las 15:00 horas no tenemos información ninguna.

f) ¿Cuánto dinero ha recaudado en todo el día?

Pues 18 de la mañana, y 14-4=10 € de la tarde hacen: 18+10=28 €

5.- *Estudia de la siguiente función:* Dominio y recorrido, continuidad, puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos. **(2 puntos)**

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.4.3.2)



a) **Dominio:** El dominio son los valores de x para los que existe y, o para los que existe dibujo. Por tanto, tenemos dibujo desde x=-4 (incluido), hasta x=10 (también incluido), así que: $dom(f)=[-4,10]$

b) **Recorrido:** El recorrido son los valores de y para los que hay dibujo, (lo mismo que el dominio, pero fijándonos en el eje y). Por tanto, tenemos dibujo desde y=-3 hasta y=3 ambos incluidos y luego en y=4, así que: $\mathrm{Im}(f)=[-3,3]\cup[4,4]$

c) **Continuidad:** La función *f(x)* es *continua* en todo su dominio *menos* en los puntos de abscisas *x=2 y x=4* donde presenta *dos discontinuidades de salto*.

d) **Puntos de corte con los ejes:** Son los puntos donde la función corta con los ejes cartesianos.

1) Con el eje x: En los puntos x=-3, x=-1, x=1 y x=6
2) Con el eje y: En el punto (0,-2)

e) ***Monotonía:*** Son los intervalos donde la función es creciente, decreciente o constante.

1) $f \text{ es creciente en}: (-4,-2)\cup(0,2)$
2) $f \text{ es decreciente en}: (-2,0)\cup(4,10)$
3) $f \text{ es constante en}: (2,4)$

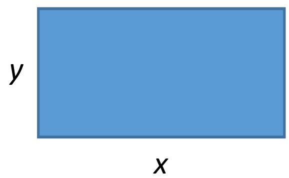
f) ***Máximos y Mínimos:*** *Máximo relativo en el punto (-2,3) y mínimo relativo en (0,-2).* No hay ni máximo ni mínimo absolutos.

6.- Escribe el área de un rectángulo de perímetro 16 cm en función de su base x. ¿Cuál es el dominio de definición de esa función? ***(1 punto)***

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.4.1.1) (B.4.4.1)

Sabemos que el área de un rectángulo se calcula multiplicando su base por su altura, por tanto, si llamamos x a la base, la altura será y.

Pero con el dato del perímetro podemos escribir esa altura en función de x. Veamos como se hace:



Si la base es x, y la altura es y, entonces el perímetro será:

$$P = 2x + 2y = 16$$

Por tanto, si despejamos y llegamos a:

$$2x + 2y = 16 \qquad 2y = 16 - 2x \quad \rightarrow \quad y = \frac{16-2x}{2} = 8 - x$$

Así que la base del rectángulo es x, mientras que la altura es 8-x.

Si sumamos todos sus lados, $x + x + (8-x) + (8-x) = 2x + 16 - 2x = 16$ obtenemos 16 cm que es su perímetro, luego vamos por buen camino.

Una vez que tenemos los dos lados en función de la variable x, ya podemos calcular su área también en función de x.

$$A(x) = base\ x\ altura = x\cdot(8-x) = 8x - x^2 \quad \rightarrow \quad A(x) = 8x - x^2$$

Para calcular el dominio, no podemos olvidar que x es la longitud de la base, así que no puede ser negativa, pero tampoco puede ser infinita.

Para saber cuál es el mayor valor de x, basta con calcular los puntos de corte con los ejes, y para ello igualamos la función a cero:

$$A(x) = 8x - x^2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x(8-x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ 8 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = 8 \end{cases}$$

Obtenemos una ecuación de segundo grado incompleta que al resolver nos da como soluciones 0 y 8. Por tanto la variable independiente x, la base, estaría comprendida entre 0 y 8, por tanto:

$$dom(A) = (0,8)$$

El intervalo es abierto porque la base ha de ser mayor que 0 y menor que 8 para que se verifique que el perímetro es 16. Si la base es 0 entonces el área es cero y si es 8 también sería cero.

Así que el dominio de definición de la función área A(x) es: $dom(A) = (0,8)$

Observación, como este ejercicio no lo ha resuelto nadie y su dificultad quizás era demasiado elevada, he decidido quitarlo del examen y añadir a todo el mundo un punto más en su nota.