1.6 - MOVIMIENTO CIRCULAR

Explicación en YouTube del Movimiento Circular

MOVIMIENTO CIRCULAR CASO GENERAL (MC)

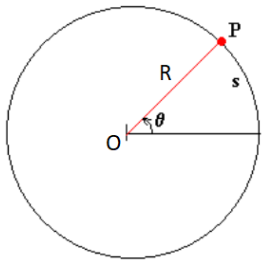
Movimiento circular (MC). Decimos que una partícula sigue un *movimiento circular* MC cuando está en movimiento y su trayectoria está contenida en una circunferencia. El movimiento circular es, por tanto, un movimiento plano. En este curso estudiaremos el movimiento circular con las siguientes simplificaciones:

1) El eje x se elegirá de manera que en el instante inicial la partícula esté situada sobre el propio eje x, en su parte positiva.
2) La partícula no cambiará de sentido de giro. Elegiremos como sentido positivo para medir ángulos el sentido de giro de la partícula.

En el movimiento circular, denotaremos por v al módulo del vector velocidad (celeridad) $v \equiv |\vec{v}|$ y por a al módulo del vector aceleración $a \equiv |\vec{a}|$.

Posición angular o ángulo recorrido θ. En un MC llamamos *posición angular* θ de la partícula en un instante al *ángulo recorrido* por la partícula desde los 0 s hasta ese instante. Es una magnitud escalar instantánea y se mide en radianes (rad) en el SI. Según la simplificación (1) anterior la posición angular inicial es nula; esto es, $\theta_0 = 0\,rad$. Según la simplificación (2) la posición angular es creciente.

Notar que a cada posición angular le corresponde un punto de la circunferencia; sin embargo, un mismo punto de la circunferencia es correspondido por infinitas posiciones angulares. Por ejemplo, las posiciones angulares 0 rad, 2π rad y 8π, como posiciones angulares son distintas, pues la primera implica cero vueltas, la segunda una vuelta y la tercera cuatro vueltas; pero ambas señalan el mismo punto de la circunferencia.



Velocidad angular o velocidad de giro ω. En un MC llamamos *velocidad angular* o *velocidad de giro* ω de la partícula en un instante a la derivada de la posición angular respecto del tiempo en dicho instante. Es una magnitud escalar instantánea, se mide en rad/s y da idea de lo rápido que cambia la posición angular.

$$\omega_i = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_i$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Se tiene que, según nuestras simplificaciones, la velocidad angular no puede ser negativa.

$$\omega_i = rapidez\ con\ que\ cambia\ \theta\ en\ t_i$$
$$\omega_i > 0 \Longrightarrow \theta\ crece\ en\ t_i$$
$$\omega \geq 0$$

Aceleración angular α. En un MC llamamos *aceleración angular* α de la partícula en un instante a la derivada de la velocidad angular respecto del tiempo en dicho instante. Es una magnitud escalar instantánea y se mide en rad/s^2 en el SI.

$$\alpha_i = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_i$$

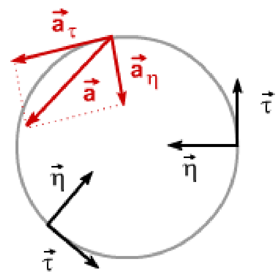
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Se cumple que:

$$|\alpha_i| = rapidez\ con\ que\ cambia\ \omega\ en\ t_i$$
$$\alpha_i > 0 \Longrightarrow \omega\ crece\ en\ t_i$$
$$\alpha_i < 0 \Longrightarrow \omega\ decrece\ en\ t_i$$
$$\alpha = 0\ \Longleftrightarrow \omega = cte$$

Versor tangente $\vec{\tau}$ y versor normal $\vec{n}$. Decimos que el *versor tangente* $\vec{\tau}$ en un instante es el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad en dicho instante; por tanto, es tangente a la trayectoria. Así, el versor tangente es un vector unitario cuya dirección depende de dónde se encuentre la partícula.

Decimos que el *versor normal* $\vec{n}$ en un instante es el vector unitario de dirección perpendicular a la trayectoria en dicho instante, cuyo sentido va de la partícula al centro de giro. Así, el versor normal es un vector unitario cuya dirección depende de dónde se encuentre la partícula. Se cumple además que el versor tangente y el versor normal son perpendiculares entre sí en todo momento; forman, por tanto, una base ortonormal.



Vector de posición $\vec{r}$. Hemos estudiado las magnitudes angulares, para las cuales no hemos necesitado el radio R de la trayectoria. Ahora estudiaremos las magnitudes lineales, para las que sí necesitaremos el radio. Primero presentamos las expresiones y luego las probaremos. Se verifica que:

$$\boxed{\vec{r} = Rcos\theta\vec{\imath} + Rsen\theta\vec{\jmath} = 0\vec{\tau} - R\vec{u}_n}$$

Distancia recorrida s. Sabemos que un arco de ángulo θ (en rad) y radio R tiene una longitud $L = R\theta$. Por ello, la *distancia recorrida* por la partícula (desde el inicio del movimiento) según nuestro convenio (por el cual no hay cambio de sentido de giro) será igual al radio por el ángulo recorrido:

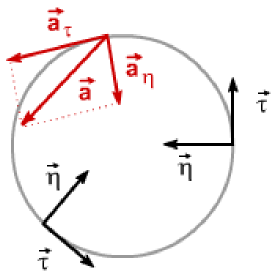
$$\boxed{s = R \cdot \theta}$$

Vector velocidad $\vec{v}$. Se verifica que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v\vec{\tau} + 0\vec{n} \quad \text{donde}$$
$$v = \frac{ds}{dt} = R \cdot \omega = \vec{v} \cdot \vec{\tau}$$

Vector aceleración $\vec{a}$. Se verifica que:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} \quad \text{donde}$$
$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\alpha = \vec{a} \cdot \vec{\tau}$$
$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = \vec{a} \cdot \vec{n}$$
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



Recordamos que el vector aceleración mide lo rápido que cambia el vector velocidad, y que el vector velocidad puede cambiar al cambiar su módulo o al cambiar su dirección (para cambiar su sentido debe cambiar el módulo). Pasamos a estudiar a_τ a_n y a.

Aceleración tangencial a_τ. Como sabemos, llamamos *aceleración tangencial* a_τ de una partícula en un instante a la derivada de la celeridad respecto del tiempo en dicho instante. Se mide en m/s^2 y es la componente de la aceleración causante de que cambie el módulo del vector velocidad. Se verifica que es igual al producto del radio de la trayectoria por la aceleración angular.

$$a_{\tau,i} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_i = R\alpha_i$$
$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\alpha$$

Ya sabemos que:

$$|a_{\tau,i}| = \ rapidez\ con\ que\ cambia\ v\ en\ t_i$$
$$a_{\tau,i} > 0 \Longrightarrow v\ crece\ en\ t_i$$
$$a_{\tau,i} < 0 \Longrightarrow v\ decrece\ en\ t_i$$
$$a_\tau = 0 \iff v = cte$$

Aceleración normal a_n. Llamamos *aceleración normal* a_n de una partícula en un instante al módulo de la celeridad al cuadrado en dicho instante dividido entre el radio de la trayectoria. Se mide en m/s^2 y es la componente de la aceleración causante de que cambie la dirección del vector velocidad. Por su propia definición, la aceleración angular no puede ser negativa.

$$a_{n,i} = \frac{(v_i)^2}{R} = R \cdot (\omega_i)^2$$
$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

Por ser $\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$ y $(\vec{\tau}, \vec{n})$ una base ortonormal, se cumple el teorema de Pitágoras, luego:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

Advertencia. En algunos textos llaman aceleración tangencial al vector $\vec{a}_\tau = a_\tau\vec{\tau}$ y llaman aceleración normal al vector $\vec{a}_n = a_n\vec{n}$, de manera que $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Nosotros llamaremos *vector aceleración tangente* a $\vec{a}_\tau$ y *vector aceleración normal* a $\vec{a}_n$.

Ecuaciones y estrategias del MC. En un MC con nuestras dos simplificaciones si conocemos $\theta = \theta(t)$ y R, podemos hallarlo todo de ese MC. También vale si conocemos $s = s(t)$ y R.

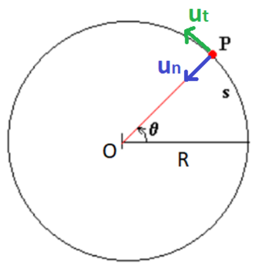
$\theta = \theta(t)$	$s = R\theta$
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$v = R\omega = \frac{ds}{dt}$
$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$a_\tau = R\alpha = \frac{dv}{dt}$
	$a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$
	$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

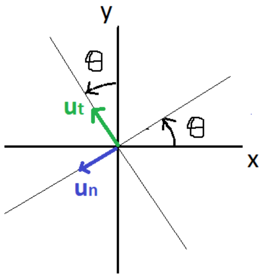
donde $v \equiv |\vec{v}|$ y $a \equiv |\vec{a}|$

Demostración de las fórmulas. Atendiendo a la figura (donde $\vec{u}_\tau$ es $\vec{\tau}$ y $\vec{u}_n$ es $\vec{n}$):

$\vec{\tau} = -sen(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$; $\vec{n} = -cos(\theta)\vec{\imath} - \operatorname{sen}(\theta)\vec{\jmath}$

Sabemos también que: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$.





Derivemos los versores tangente y normal:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -\cos(\theta)\,\omega\vec{\imath} - sen(\theta)\omega\vec{\jmath} = \omega\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \operatorname{sen}(\theta)\,\omega\vec{\imath} - cos(\theta)\omega\vec{\jmath} = -\omega\vec{\tau}$$

Vamos a por el vector de posición. El vector de posición tiene módulo R, con la misma dirección y sentido contrario que $\vec{n}$; por tanto, será $\vec{r} = -R\vec{n}$. En efecto, $-R\vec{n}$ tiene la misma dirección que $\vec{n}$, sentido contrario a $\vec{n}$ y módulo $|-R\vec{n}| = |-R||\vec{n}| = R \cdot 1 = R$.

Vamos a por el vector velocidad. El vector velocidad tiene la misma dirección y sentido que $\vec{n}$ y su módulo, lo hemos denotado por v. Luego, $\vec{v} = v\vec{\tau}$

Por otro lado, $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$.

También podíamos haberlo hecho de esta forma:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(-R\vec{n})}{dt} = -R\frac{d\vec{n}}{dt} = -R(-\omega\vec{\tau}) = R\omega\vec{\tau}.$$

Veamos que $v = \vec{v} \cdot \vec{\tau}$. En efecto,

$$\vec{v} \cdot \vec{\tau} = (v\vec{\tau}) \cdot \vec{\tau} = v \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) =$$
$$= v \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(0) = v$$

Vamos a por el vector aceleración.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(R\omega\vec{\tau})}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt}\vec{\tau} + R\omega\frac{d\vec{\tau}}{dt} =$$
$$= R\frac{d\omega}{dt}\vec{\tau} + R\omega\frac{d\vec{\tau}}{dt} = R\alpha\vec{\tau} + R\omega^2\vec{n}$$

De ahí que $a_\tau = R\alpha$ y $a_n = R\omega^2$.

Por otro lado, $\frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$.

Y también, $R\omega^2 = R\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{Rv^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$.

Veamos que $a_\tau = \vec{a} \cdot \vec{\tau}$. En efecto,

$$\vec{a} \cdot \vec{\tau} = (a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}) \cdot \vec{\tau} =$$
$$= a_\tau(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) + a_n(\vec{n} \cdot \vec{\tau}) =$$
$$= a_\tau(1 \cdot 1 \cdot \cos(0)) + a_n(1 \cdot 1 \cdot \cos(90)) =$$
$$= a_\tau \cdot 1 + a_n \cdot 0 = a_\tau.$$

La prueba de $a_n = \vec{a} \cdot \vec{n}$ es análoga. ■

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

Movimiento circular uniforme (MCU). Llamamos *movimiento circular uniforme MCU* a aquel MC cuya velocidad angular es constante a lo largo del tiempo.

$$\boxed{MCU = MC + [\omega = cte \neq 0]}$$

Las expresiones del MCU son:

$\theta = \omega t$	$s = R\theta = vt$
$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$v = R\omega = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
$\alpha = 0$	$a_\tau = 0$
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	$a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$
	$a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$

El MCU es un movimiento periódico de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. En efecto, T es el tiempo que tarda en recorrer 2π rad, luego $\omega = {}^{2\pi}/_{T}$.

Estrategias para problemas de MCU. En un MCU con nuestras simplificaciones:

- Los parámetros del MCU son ω y R. Conocidos estos podemos hallar cualquier cosa del MCU en cuestión. También valen v y R.
- La posición angular y la distancia recorrida son nulas en el instante inicial y siempre crecientes.
- La velocidad angular, la celeridad, la aceleración normal y el módulo de la aceleración son constantes y positivas.
- La aceleración angular y la aceleración tangencial son constantes y nulas.
- El vector aceleración tiene módulo constante igual a $R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$, dirección perpendicular a la trayectoria y sentido hacia el centro de giro.
- Es un movimiento periódico de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO (MCUA)

Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA). Llamamos *movimiento circular uniformemente acelerado MCUA* a aquel MC cuya aceleración angular es constante distinta de cero a lo largo del tiempo.

$$\boxed{MCUA = MC + [\alpha = cte \neq 0]}$$

Las expresiones del MCUA son:

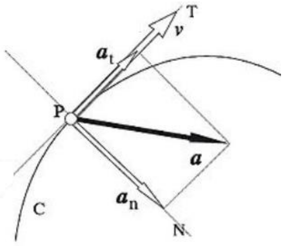
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$s = R\theta = vt + \frac{1}{2}a_\tau t^2$
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = R\omega = v_0 + a_\tau t$
$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$	$a_\tau = R\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
	$a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$
	$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$	$v^2 - v_0^2 = 2a_\tau s$

Estrategias para problemas de MCUA. En un MCUA:

- Los parámetros del MCUA son ω_0, α y R. Conocidos estos podemos hallar cualquier cosa del MCUA en cuestión. También valen v_0, a_τ y R.
- La posición angular y la distancia recorrida son nulas en el instante inicial y siempre son crecientes.
- La velocidad angular, la celeridad, la aceleración normal y el módulo de la aceleración no son constantes y no pueden ser negativas.
- La aceleración angular y la aceleración tangencial son constantes no nulas. Si inicialmente aumenta la rapidez del movimiento, entonces α y a_τ son positivas. Si inicialmente frena, entonces α y a_τ son negativas.
- El vector aceleración no es paralelo a la trayectoria ni perpendicular a la trayectoria. Su módulo tampoco es constante; aumenta si a_τ es positiva, y disminuye si a_τ es negativa.

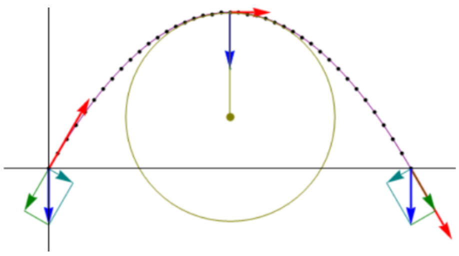
COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN

Componentes intrínsecas de la aceleración. Resulta ser que estas definiciones de aceleraciones junto sus significados son válidas para cualquier movimiento plano, no solo para los movimientos circulares. La diferencia es que en los movimientos circulares el radio R es una constante del movimiento, mientras que en un movimiento plano general este radio puede ir cambiando.



La idea es como si en cada punto pudiésemos coger un trozo de la trayectoria muy pequeño que lo contuviera y buscásemos el arco de circunferencia que más se pareciese a ese trocito; el radio de ese arco sería lo que llamamos *radio de curvatura* del movimiento en dicho punto. Un radio de curvatura infinito significa que el movimiento es rectilíneo.

Por ejemplo, en el tiro parabólico este radio de curvatura va cambiando. Vemos cómo en el punto de máxima altura el radio de curvatura es menor que en cualquier otro punto de la trayectoria.



A las componentes tangencial y normal de la aceleración se les llaman *componentes intrínsecas de la aceleración* ya que no dependen de ninguna elección de ejes x e y, sino que sólo dependen del movimiento de la propia partícula. Con esto, damos por estudiada la interpretación geométrica del vector aceleración, que no hicimos en la sección de movimiento plano general.

Tipos de movimiento según las componentes intrínsecas de la aceleración. Se cumple lo siguiente: un movimiento es MR si y solo si su aceleración normal es constante e igual a cero. Un movimiento es MRUA si y solo si su aceleración normal es constante e igual a cero y su aceleración tangencial es constante. Un movimiento es MRU Si además la aceleración tangencial es constante, se trata de un MRUA. Si además la aceleración es constante e igual a cero, se trata de un MRU.

$$MP + [a_n = 0] \iff MR$$
$$MP + [a_n = 0] + [a_\tau = cte \neq 0] \iff MRUA$$
$$MP + [a_n = 0] \;\; y \;\; [a_\tau = 0] \iff MRU$$
$$MP + [a_n = cte \neq 0] \;\; y \;\; [a_\tau = 0] \iff MCU$$

Demostración. Como vemos, tenemos dobles implicaciones. Vamos a probar las implicaciones hacia la derecha, pues las implicaciones hacia la izquierda son sencillas y se dejan a cargo del lector interesado. Vamos con los casos $a_n = 0$. Como $a_n = \frac{v^2}{R} = 0$ y estamos en movimiento ($v \neq 0$), significa que $R = \infty$; esto es MR. Tomamos como eje x el que tiene la misma dirección y sentido que $\vec{\tau}$ en el instante inicial. Así, $a_x = a_\tau$. A partir de aquí, a cargo del lector.

Vamos al caso $a_n = cte \neq 0$ y $a_\tau = 0$. Como $a_\tau = 0$ y está en movimiento, entonces $v = cte \neq 0$. Como $a_n = cte \neq 0$, entonces $\frac{v^2}{R} = cte \neq 0$. Por tanto, $R = cte \neq 0$, lo que significa MC. Como es de celeridad constante tenemos un MCU. ■

EJEMPLOS RESUELTOS

Ejemplo 1*. Una partícula sigue un movimiento circular de radio 150 cm con una posición angular instantánea de expresión $\theta(t) = t^3 + 4t$ (SI). Se pide:

a) Velocidad angular instantánea y aceleración angular instantánea.
b) Hallar en el instante 2 s las siguientes magnitudes: posición angular, velocidad angular, aceleración angular, distancia recorrida, celeridad, aceleración tangencial, aceleración normal y módulo de la aceleración.

Solución

Datos:
MC [$R = 150\,cm = 1{,}5\,m$; $\theta(t) = t^3 + 4t$ (SI)].

Si de un MC nos dan el radio R y su posición angular instantánea $\theta(t)$, podemos hallar cualquier cosa acerca del movimiento. En este ejercicio así es.

Recordamos que las ecuaciones angulares (las tres de la izquierda del cuadro) son válidas para cualquier movimiento circular. Las ecuaciones lineales (las de la derecha) son válidas y tienen el significado explicado en la teoría cuando el movimiento circular verifica: (1) la posición angular inicial es nula y (2) no hay cambio de sentido de giro, que consideraremos positivo.

$\theta = \theta(t)$	$s = R\theta$
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$v = R\omega = \frac{ds}{dt}$
$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$a_\tau = R\alpha = \frac{dv}{dt}$
	$a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$
	$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

donde $v \equiv |\vec{v}|$ y $a \equiv |\vec{a}|$

a)

$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{3t^2 + 4}$ **(SI)**.

$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{6t}$ **(SI)**.

Aunque no lo piden, comprobemos que las ecuaciones lineales son válidas; esto es, que se verifican las dos simplificaciones:

$\theta_0 = 0^3 + 4\cdot 0 = 0\,rad$ (1)
$\omega(t) = 3t^2 + 4 \geq 0$ (2)

b)

Llamo $t_2 = 2\,s$.
$\theta_2 = 2^3 + 4\cdot 2 = \mathbf{16\,rad}$.
$\omega_2 = 3\cdot 2^2 + 4 = \mathbf{16\,rad/s}$.
$\alpha_2 = 6\cdot 2 = \mathbf{12\,rad/s^2}$.
$s_2 = R\theta_2 = 1{,}5\cdot 16 = \mathbf{24\,m}$.
$v_2 = R\omega_2 = 1{,}5\cdot 16 = \mathbf{24\,m/s}$.
$a_{\tau,2} = R\alpha_2 = 1{,}5\cdot 12 = \mathbf{18\,m/s^2}$.
$a_{n,2} = R\omega_2^2 = 1{,}5\cdot 16^2 = \mathbf{384\,m/s^2}$.
$a_2 = \sqrt{a_{\tau,2}^2 + a_{n,2}^2} = \sqrt{18^2 + 384^2} = \mathbf{384{,}42\,m/s^2}$.

Ejemplo 2. Una partícula sigue un movimiento circular de radio 0,5 m con una velocidad angular constante de 180 rpm. Se pide:

a) Posición angular instantánea, velocidad angular instantánea y aceleración angular instantánea.
b) Hallar en el instante 4 s las siguientes magnitudes: posición angular, velocidad angular, aceleración angular, distancia recorrida, celeridad, aceleración tangencial, aceleración normal y módulo de la aceleración.
c) Periodo y frecuencia.

Solución

Datos:
MCU [$R = 0{,}5\,m$;
$\omega(t) = 180\,\frac{rev}{min}\cdot\frac{2\pi\,rad}{1\,rev}\cdot\frac{1\,min}{60\,s} = 18{,}85\,rad = cte$]

Si de un MCU nos dan el radio R y la velocidad de giro constante ω, podemos saber cualquier cosa de él. En este caso es así.

Las fórmulas del MCU son las del MC particularizadas a $\omega = cte$:

$\theta = \omega t$	$s = R\theta$
$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = cte$	$v = R\omega = cte$
$\alpha = 0 = cte$	$a_\tau = R\alpha = 0 = cte$
$T = {2\pi}/{\omega}$	$a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} = cte$
	$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = a_n = cte$

a)

$\theta(t) = \mathbf{18{,}85}\boldsymbol{t}$ **(SI)**.

$\omega(t) = \mathbf{18{,}85\,rad/s}$.

$\alpha(t) = \mathbf{0\,rad/s^2}$.

b)

Llamo $t_4 = 4\,s$.

$\theta_4 = 18{,}85 \cdot 4 = \mathbf{75{,}4\,rad}$.

$\omega_4 = \mathbf{18{,}85\,rad/s}$.

$\alpha_4 = \mathbf{0\,rad/s^2}$.

$s_4 = R\theta_4 = 0{,}5 \cdot 75{,}4 = \mathbf{37{,}7\,m}$.

$v_4 = R\omega_4 = 0{,}5 \cdot 18{,}85 = \mathbf{9{,}425\,m/s}$.

$a_{\tau,4} = R\alpha_4 = 0{,}5 \cdot 0 = \mathbf{0\,m/s^2}$.

$a_{n,4} = R\omega_4^2 = 0{,}5 \cdot 18{,}85^2 = \mathbf{177{,}66\,m/s^2}$.

$a_4 = \sqrt{a_{\tau,4}^2 + a_{n,4}^2} = \mathbf{177{,}66\,m/s^2}$.

c)

En un MCU una partícula tarda siempre lo mismo en dar una vuelta (2π rad). Esto es así porque la velocidad de giro es constante. Al tiempo que tarda una partícula con MCU en dar una vuelta lo llamamos periodo T.

$\omega = \frac{2\pi}{T} \to T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{18{,}85} = \mathbf{0{,}333\,s}$.

La frecuencia es el inverso del periodo. Significaría las vueltas que da una partícula con MCU en un segundo.

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}333} = \mathbf{3\,Hz}$.

Ejemplo 3. Una partícula sigue un movimiento circular de radio 80 cm con velocidad angular inicial de 120 rpm y acelerando de forma constante, aumentando la velocidad de giro 6 rad/s cada segundo. Se pide:

a) Posición angular instantánea, velocidad angular instantánea y aceleración angular instantánea.
b) Hallar en el instante 5 s las siguientes magnitudes: posición angular, velocidad angular, aceleración angular, distancia recorrida, celeridad, aceleración tangencial, aceleración normal y módulo de la aceleración.

Solución

Datos:

MCUA [$R = 80\,cm = 0{,}8\,m$;

$$\omega_0 = 120\,\frac{rev}{min} \cdot \frac{2\pi\,rad}{1\,rev} \cdot \frac{1\,min}{60\,s} = 12{,}566\,rad;$$

$$\alpha(t) = +6\,rad/s^2 = cte]$$

La aceleración angular α tiene signo; es positiva si gira cada vez más deprisa y es negativa si gira cada vez más despacio. En efecto, más deprisa significa que velocidad de giro y aceleración angular tienen el mismo signo. Más despacio significa que velocidad de giro y aceleración angular tienen distinto signo. Como la velocidad de giro es positiva (o nula), se tiene la afirmación que hemos hemos.

En nuestro caso gira cada vez más deprisa, luego la aceleración angular será positiva $+6\,rad/s^2$.

Si de un MCUA nos dan el radio R, la velocidad de giro inicial ω_0 y la aceleración angular constante α, podemos saber cualquier cosa de él. En este caso es así.

Las fórmulas del MCUA son las del MC particularizadas a $\alpha = cte$:

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$s = R\theta$
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = R\omega$
$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = cte$	$a_\tau = R\alpha = cte$
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$	$a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$
	$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

a)

$\theta(t) = 12{,}566t + \frac{1}{2}6t^2 = \mathbf{12{,}566}\boldsymbol{t} + \mathbf{3}\boldsymbol{t^2}$ **(SI)**.

$\omega(t) = \mathbf{12{,}566} + \mathbf{6}\boldsymbol{t}$ **(SI)**.

$\alpha(t) = \mathbf{6\,rad/s^2}$.

b)

Llamo $t_5 = 5\,s$.

$\theta_5 = 12{,}566 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 = \mathbf{137{,}83\,rad}$.

$\omega_5 = 12{,}566 + 6 \cdot 5 = \mathbf{42{,}566\,rad/s}$.

$\alpha_5 = \mathbf{6\,rad/s^2}$.

$s_5 = R\theta_5 = 0{,}8 \cdot 137{,}83 = \mathbf{110{,}264\,m}$.

$v_5 = R\omega_5 = 0{,}8 \cdot 42{,}566 = \mathbf{34{,}053\,m/s}$.

$a_{\tau,5} = R\alpha_5 = 0{,}8 \cdot 6 = \mathbf{4{,}8\,m/s^2}$.

$a_{n,5} = R\omega_5^2 = 0{,}8 \cdot 42{,}566^2 = \mathbf{1449{,}49\,m/s^2}$.

$a_5 = \sqrt{a_{\tau,5}^2 + a_{n,5}^2} = \mathbf{1449{,}50\,m/s^2}$.

Ejemplo 4*. Una partícula describe una circunferencia de 4 m de radio con una velocidad constante de 2,5 m/s. En un instante dado frena con una aceleración tangencial constante de 0,5 m/s^2 hasta pararse. Se pide:

a) Velocidad en rpm antes de comenzar a frenar.
b) Aceleración antes de empezar a frenar.
c) Aceleración angular mientras frena.
d) Aceleración 2 s después de empezar a frenar.
e) Tiempo que tarda en detenerse.
f) Número de vueltas que da desde que comienza a frenar hasta que se detiene del todo.

Solución

Datos:
MCUA [$R = 4\,m$;
$v_0 = 2{,}5\,m/s$;
$a_\tau = -0{,}5\,m/s^2 = cte$]

Comenzamos a contar tiempos cuando comienza a frenar, por eso $v_0 = 2{,}5\,m/s$. Tomamos esta velocidad positiva porque en MC siempre lo hacemos así. Por eso la aceleración tangencial cuando está frenando será negativa, como es el caso. Como la aceleración tangencial es constante, la aceleración angular también lo es; por eso estamos ante un MCUA.

Si de un MCUA conocemos R, ω_0 y α, podemos saber cualquier cosa de él. En este caso aún no es así, pero sabemos

$v = R\omega \rightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{R} = \frac{2{,}5}{4} = 0{,}625\,rad/s.$

$a_\tau = R\alpha \rightarrow \alpha = \frac{a_\tau}{R} = \frac{-0{,}5}{4} = -0{,}125\,rad/s^2.$

Ya conocemos los tres parámetros del MCUA.

a)
Antes de comenzar a frenar tenemos un MCU, pues gira a la velocidad angular constante $\omega_0 = 0{,}625\,\frac{rad}{s}$.

$\omega_0 = 0{,}625\,\frac{rad}{s} \cdot \frac{1\,rev}{2\pi\,rad} \cdot \frac{60\,s}{1\,min} = 5{,}968\,rpm.$

b)
Antes de empezar a frenar la aceleración tangencial es nula $a_\tau = 0\,rad/s^2$, pues la velocidad de giro es constante.
$a_n = R\omega_0^2 = 4 \cdot 0{,}625^2 = 1{,}5625\,rad/s^2.$
$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0^2 + 1{,}5625^2} = \mathbf{1{,}5625\,rad/s^2}.$

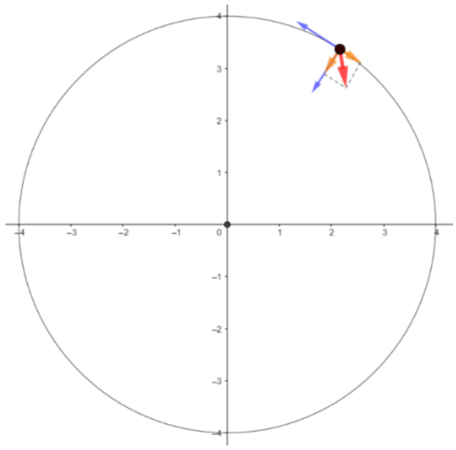
c) $\alpha = \mathbf{-0{,}125\,rad/s^2}$

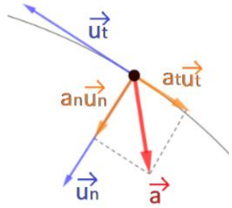
d)
Después de empezar a frenar es cuando tenemos el MCUA de aceleración angular $\alpha = -0{,}125\,rad/s^2$ hasta que se para por completo. Llamo $t_2 = 2\,s$. Por el enunciado no parece claro si pide el módulo de la aceleración o el vector aceleración, así que calcularemos los dos.

$a_{\tau,2} = R\alpha_2 = 4 \cdot (-0{,}125) = -0{,}5\,m/s^2.$
$\omega_2 = \omega_0 + \alpha t_2 = 0{,}625 - 0{,}125 \cdot 2 = 0{,}375\,rad/s.$
$a_{n,5} = R\omega_2^2 = 4 \cdot 0{,}375^2 = 0{,}5625\,m/s^2.$

$a_2 = \sqrt{a_{\tau,2}^2 + a_{n,2}^2} = \mathbf{0{,}7526\,m/s^2}.$
$\vec{a}_2 = a_{\tau,2}\vec{u}_{\tau,2} + a_{n,2}\vec{u}_{n,2} = \mathbf{-0{,}5\vec{u}_{\tau,2} + 0{,}5625\vec{u}_{n,2}}.$

Recordamos que $\vec{u}_{\tau,2}$ es el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}_2$, y que $\vec{u}_{n,2}$ es el vector unitario que va desde la posición de la partícula en t_2 hasta el centro de la circunferencia de su trayectoria.





e)
Llamo t_1 al instante en el que la partícula se detiene. Por tanto, $\omega_1 = 0\,rad/s$.
$\omega_0 + \alpha t_1 = 0 \rightarrow t_1 = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-0{,}625}{-0{,}125} = \mathbf{5\,s}.$

f)
θ_1 es el ángulo recorrido desde que comienza a frenar hasta que para del todo. Solo habrá que pasar este ángulo recorrido, que está en radianes, a vueltas.
$\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = 0{,}625 \cdot 5 + \frac{1}{2}(-0{,}125)5^2 =$
$= 1{,}5625\,rad.$
$\theta_1 = 1{,}5625\,rad \cdot \frac{1\,vuelta}{2\pi\,rad} = \mathbf{0{,}249\,vueltas}.$

EJERCICIOS PROPUESTOS

6.1. Una rueda de 60 cm de diámetro gira a razón de 4 vueltas por segundo. Se pide:

a) Velocidad angular, periodo y frecuencia.
b) Velocidad tangencial de un punto situado a 20 cm del centro de la rueda.
c) Aceleración tangencial, aceleración centrípeta y módulo de la aceleración de los puntos más alejados del centro.

Sol. a) 25,13 rad/s; 0,25 s; 4 Hz;
b) 5,03 m/s;
c) 0 m/s^2; 189,5 m/s^2; 189,5 m/s^2

6.2. Un ventilador gira a 320 rpm. En determinado momento se desenchufa, tardando 25 s en pararse. Se pide:

a) Aceleración angular.
b) Velocidad angular a los 10 s.
c) Si tenía una mosca pegada en un aspa a 15 cm del centro, ¿cuál es la aceleración (módulo) de la mosca a los 10 s?

Sol. a) −1,34 rad/s^2; b) 20,11 rad/s; c) 60,66 m/s^2.

6.3. El eje de un motor gira inicialmente a 800 rpm, descendiendo uniformemente hasta que se para por completo. Se sabe que gira a 30 rad/s después de dar 40 vueltas. Se pide:

a) Aceleración angular.
b) Tiempo necesario en dar 40 vueltas.
c) Vueltas que da hasta que se para por completo.

Sol. a) −12,17 rad/s^2; b) 4,42 s; c) 45,9 vueltas.

6.4*. Una partícula que sigue un MCUA a los 3 s ha recorrido 16,8 m y tiene una velocidad de 3,2 m/s. También se sabe que ha tardado 2,52 s en dar las tres primeras vueltas. Se pide la aceleración angular, la velocidad de giro inicial y el radio de la trayectoria.

Sol. −2 rad/s^2; 10 rad/s; 0,8 m.

6.5*. Un volante de 80 cm de diámetro parte del reposo y acelera durante 30 s hasta alcanzar una velocidad angular de 240 rpm. Después de girar minuto y medio a dicha velocidad, se aplica un freno durante 50 s hasta que el volante se para por completo. Se pide:

a) Gráfica ω-t.
b) Expresión instantánea de la posición angular.
c) Vueltas dadas hasta que para.
d) Aceleración (módulo) en la periferia 10 s después de empezar a frenar.

Sol. a) Desde los 0 s hasta los 30 s es un segmento de recta creciente que va desde los 0 rad/s hasta los 25,133 rad/s. Desde los 30 s hasta los 120 s es un segmento de recta horizontal de valor constante 25,133 rad/s. De los 120 s a los 170 s es un segmento de recta decreciente que va desde los 25,133 rad/s hasta los 0 rad/s. A partir de los 170 s la velocidad angular es nula.
b) En el SI tenemos que $\theta =$

$$\left\{\begin{array}{cc} 0{,}42t^2, & 0 \le t \le 30 \\ 377{,}1 + 25{,}1(t-30), & 30 \le t \le 120 \\ 2639{,}1 + 25{,}1(t-120) - 0{,}25(t-120)^2, & 120 \le t \le 170 \\ 3267, & 170 \le t \end{array}\right\}$$

c) 520 vueltas;
d) 161,65 m/s^2.

6.6**. De un MC conocemos su radio R y su posición angular instantánea θ = θ(t). Se pide obtener el vector de posición instantánea, el vector velocidad instantánea y el vector aceleración instantánea en función de R, θ, ω y α en la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Sol. Tenemos en cuenta que R es una constante pero que θ es función del tiempo, que $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ y que $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$.

$\vec{r} = Rcos\theta\vec{\imath} + Rsen\theta\vec{\jmath}$;
$\vec{v} = -R\omega sen\theta\vec{\imath} + R\omega cos\theta\vec{\jmath}$;
$\vec{a} = [-R\omega^2 cos\theta - R\alpha sen\theta]\vec{\imath} +$
$+[-R\omega^2 sen\theta + R\alpha cos\theta]\vec{\jmath}$.

6.7*. Tres partículas A, B y C giran alrededor de la misma circunferencia, en el mismo sentido y partiendo inicialmente del mismo punto. La partícula A se mueve con MCU con velocidad angular 10 rad/s. La partícula B se mueve con MCU con velocidad angular 6 rad/s. La partícula C se mueve con MCUA partiendo del reposo y con una aceleración angular de 2 rad/s^2. Se pide:

a) Instantes de tiempo en los que las partículas A y B coinciden en la misma posición, comentando qué partícula adelanta a la otra.
b) Instante de tiempo positivo en el que las partículas A y C han recorrido el mismo ángulo.
c) Instantes de tiempo en los que las partículas A y C coinciden en la misma posición, comentando qué partícula adelanta a la otra. (Este apartado es **).

Sol. a) Instantes del tipo $\frac{k\pi}{4}$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $k \ge 0$.
b) 10 s;
c) A adelanta a C en los instantes 0 s, 0.675 s, 1.475 s y 2.52 s. C adelanta a A en los instantes del tipo $\frac{10+\sqrt{100+8k\pi}}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $k \ge -3$.

6.8**. Un disco de 40 cm de diámetro gira inicialmente a 100 rpm en sentido antihorario. Se le aplica una aceleración angular de módulo constante, que primero frenará el disco para, una vez parado, hacerlo girar en sentido horario. De esta manera, a los 5 s ya gira a 6 rad/s en sentido horario. Se pide:

a) Expresiones instantáneas de la posición angular, velocidad angular y aceleración angular, todas ellas con signo, tomando como positivo el antihoriario.
b) Instante en el que el disco se para.
c) Expresiones instantáneas de la posición angular, velocidad angular y aceleración angular con el convenio de signos de esta sección: la posición angular es el ángulo recorrido, la velocidad angular es la celeridad angular y el signo de la aceleración angular nos dice si la partícula aumenta su celeridad o la disminuye.
d) Módulo de la aceleración total en la periferia del disco a los 4 s.

e) Distancia recorrida por la periferia del disco desde el inicio hasta los 5 s.

Sol. a) $\theta_z = 10{,}472t - 1{,}647t^2$ *(SI)*
$\omega_z = 10{,}472 - 3{,}294t$ *(SI)*
$\alpha_z = -3{,}294$ *rad/s²*.
El subíndice z significa que estas magnitudes tienen signo, considerándose positivo el sentido antihorario.
b) 3,18 s.
c) Con el convenio de esta sección desde los 0 s hasta los 3,18 s el sentido de movimiento es antihorario; a partir de los 3,18 s el sentido de movimiento es horario. Las expresiones están en el SI.

$$\theta = \begin{cases} 10{,}47t - 1{,}65t^2, \circlearrowleft & 0 \le t \le 3{,}18 \\ 16{,}65 + 1{,}65(t - 3{,}18)^2, \circlearrowright & 3{,}18 \le t \end{cases}$$
$$\omega = \begin{cases} 10{,}47 - 3{,}29t, \circlearrowleft & 0 \le t \le 3{,}18 \\ -10{,}47 + 3{,}29t, \circlearrowright & 3{,}18 \le t \end{cases}$$
$$\alpha = \begin{cases} -3{,}29, \circlearrowleft & 0 \le t \le 3{,}18 \\ +3{,}29, \circlearrowright & 3{,}18 \le t \end{cases}$$

d) 1,60 m/s².
e) 4,42 m.

6.9*. Una partícula se mueve por una circunferencia de radio 20 m con una celeridad instantánea:
$v = 20 - 0{,}2t^2$ (SI) hasta pararse por completa. Se pide:

a) Posición angular instantánea.
b) Vector de posición instantánea en la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
c) Módulo de la aceleración a los 3 s.
d) Vueltas que da hasta que se detiene.

Nota. El apartado a) es ** y su solución es:
$\theta = t - \frac{1}{300}t^3$ (SI).

Sol. a) $\theta = t - \frac{1}{300}t^3$ *(SI).*
b) $\vec{r} = 20cos(t - \frac{1}{300}t^3)\vec{\imath} + 20sen(t - \frac{1}{300}t^3)\vec{\jmath}$ *(SI).*
c) 16,56 m/s².
d) 1,06 vueltas.

6.10*. De un movimiento arbitrario nos dicen que su aceleración normal es constante en el tiempo e igual a cero.

a) ¿Qué podemos decir acerca de este movimiento?
b) Si además su aceleración tangencial es constante distinta de cero, ¿qué podemos decir ahora del movimiento?
c) Si además su aceleración tangencial es constante e igual a cero, ¿qué podemos decir ahora del movimiento?

Sol. a) MR; b) MRUA; c) MRU.

6.11*. Desde una altura de 20 m lanzamos una piedra con una velocidad inicial de 50 m/s y una inclinación de 30° sobre la horizontal. Se pide el módulo de la aceleración total, la aceleración tangencial, la aceleración normal y el radio de curvatura en los siguientes puntos:

a) Punto de lanzamiento.
b) Punto más alto.
c) A los 3 s.

Sol. a) 294,57 m; b) 191,33 m; c) 194,30 m.

6.12**. Probar que en un tiro parabólico lanzado sobre la horizontal el radio de curvatura mínimo se produce en el punto más alto. Hallar dicho radio de curvatura mínimo en función de v_0 y α.

Sol. $R_{mín} = \frac{v_0^2 cos^2\alpha}{g}$