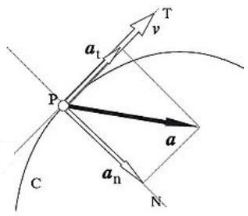
2.2 - FUERZAS Y MOVIMIENTO CIRCULAR

FUERZAS EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR

Segunda ley de Newton en componentes intrínsecas. Recordamos que el *eje tangencial* tiene su origen en la partícula, tiene la dirección y el sentido de la velocidad y su versor se llama versor tangencial $\vec{\tau}$. El *eje normal* tiene su origen en la partícula, tiene la dirección perpendicular al eje tangencial, el sentido hacia el centro de giro y su versor se llama versor normal $\vec{n}$. Estos ejes cambian con el paso del tiempo y no los elegimos nosotros, a diferencia de los ejes x e y.

De la misma manera que usamos la 2LN en los ejes x e y, también podemos usarla en los ejes normal n y tangencial τ; lo que se conoce como 2LN en componentes intrínsecas:

$$\boxed{\begin{cases} F_{tot,\tau} = ma_\tau \\ F_{tot,n} = ma_n \end{cases}}$$



Llamamos *resultante tangencial* a $F_{tot,\tau}$. Llamamos *resultante normal* a $F_{tot,n}$. Teniendo en cuenta las distintas expresiones de la aceleración tangencial y de la aceleración normal, tenemos:

$$F_{tot,\tau} = ma_\tau = m\frac{dv}{dt} = mR\alpha$$

$$F_{tot,n} = ma_n = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2$$

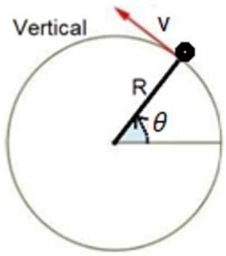
$$\left|\vec{F}_{tot}\right| = \sqrt{F_{tot,\tau}^2 + F_{tot,n}^2}$$

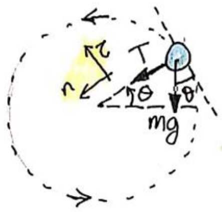
Usaremos las anteriores expresiones en problemas de movimiento circular MC; sobre todo en MCU.

Fuerzas en el movimiento circular. Recordamos que el movimiento circular se caracteriza porque el radio de curvatura es constante $R = cte$. Así, las fórmulas para el movimiento circular general son las anteriores con la simplificación de que sabemos que $R = cte$.

Estrategias para problemas de fuerzas y MC. Cuando sepamos que una partícula sigue MC actuamos así:

- Hacemos el diagrama del sólido libre como en otro problema de fuerzas cualquiera.





- Aplicamos la 2LN usando los ejes tangencial y normal. Si alguna fuerza no estuviera contenida en el plano del movimiento (en el dibujo anterior las dos fuerzas están en el plano del movimiento) llamamos, por ejemplo, eje y al eje perpendicular al plano de movimiento. Se cumple:

$$\begin{cases} F_{tot,\tau} = ma_\tau \\ F_{tot,n} = m\frac{v^2}{R} \\ F_{tot,y} = 0 \end{cases}$$

- A partir de aquí seguimos las indicaciones sobre estrategias para problemas de fuerzas y de cinemática del MC.

FUERZAS EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Fuerzas en el movimiento circular uniforme. Recordamos que el MCU se caracteriza porque el radio de curvatura es constante $R = cte$ y la velocidad de giro también lo es $\omega = cte$. Así, la aceleración tangencial en MCU es nula $a_\tau = 0$, por lo que la resultante tangencial también es nula $F_{tot,\tau} = 0$. El lector interesado puede probar que:

$$\boxed{MC + [F_{tot,\tau} = 0] \iff MCU}$$

En un MCU la 2LN queda:

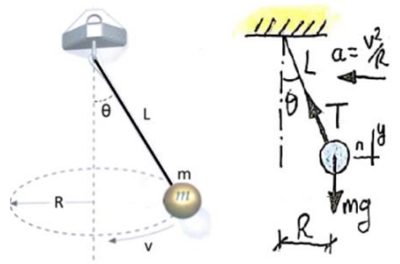
$$MCU \Rightarrow \begin{cases} F_{tot,\tau} = 0 \\ F_{tot,n} = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2 \end{cases}$$

$$\left|\vec{F}_{tot}\right| = F_{tot,n}$$

Estrategias para problemas de fuerzas y MCU. Cuando en un problema la partícula tenga MC y la componente tangencial de la fuerza total sea nula, entonces estamos ante un MCU. También puede pasar que el problema nos diga explícitamente que estamos ante un MCU. Ante un MCU actuamos así:

- Hacemos el diagrama del sólido libre como en otro problema de fuerzas cualquiera.

- Dibujamos el vector aceleración con la dirección y sentido que va de la partícula al centro de giro. Asignamos a dicha aceleración el escalar $a = \frac{v^2}{R}$.

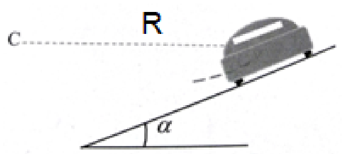


- Aplicamos la 2LN. Si alguna fuerza no estuviera contenida en el plano del movimiento (en el dibujo anterior la tensión no está contenida en el plano del movimiento) llamamos, por ejemplo, eje y al eje perpendicular al plano de movimiento. Se cumple:

$$\begin{cases} F_{tot,n} = m\frac{v^2}{R} \\ F_{tot,\tau} = 0 \\ F_{tot,y} = 0 \end{cases}$$

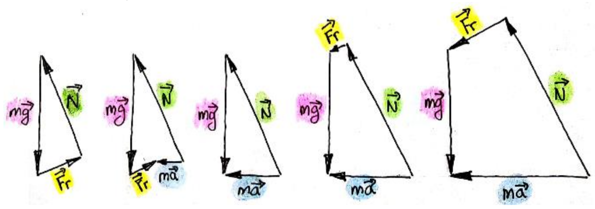
- A partir de aquí seguimos las indicaciones sobre estrategias para problemas de fuerzas y de cinemática del MCU.

Estrategias para el problema de peralte con rozamiento. Este tipo de problema es bastante habitual. Las magnitudes son: vehículo de masa m, dando una curva de radio R a celeridad constante v, gracias a un coeficiente de rozamiento μ entre las ruedas y la carretera y a un peralte de ángulo α.

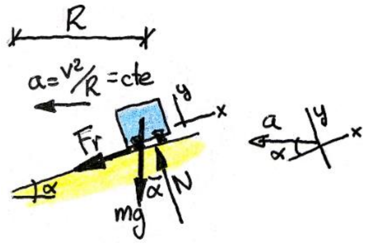


Veamos la aceleración. Nos dirán que el vehículo gira a celeridad constante, por lo que estamos ante un MCU, con todo lo que ello significa.

Veamos cómo actúa nuestro rozamiento en este problema. El rozamiento no actúa en la dirección del movimiento del vehículo y en sentido contrario al mismo, puesto que sus ruedas no deslizan sobre la carretera, sino que avanzan rodando. Así, el rozamiento intenta impedir que el vehículo deslice peralte arriba y peralte abajo (que no se salga de la carretera), por lo que la dirección del rozamiento es lateral al vehículo. Cuando el vehículo está parado, el rozamiento irá peralte arriba, para evitar que el vehículo descienda por el peralte. A medida que el vehículo aumente su celeridad, el módulo del rozamiento irá disminuyendo; llegará un instante en que el rozamiento se anulará. A partir de ahí el rozamiento tendrá sentido peralte abajo. Llegará un momento en que el rozamiento alcance su valor máximo; en ese momento es cuando el vehículo se sale de la carretera por exceso de velocidad. En la figura vemos cómo se comporta el rozamiento a medida que el vehículo aumenta su velocidad (y con ello su aceleración).



Dibujaremos el rozamiento en sentido peralte abajo. Haciendo el diagrama del sólido libre obtenemos:



Elegimos los ejes como indica la figura; esto es, el eje x paralelo al peralte y hacia arriba, tal como hacíamos con las rampas, y el eje y perpendicular al peralte. Con estos ejes x e y (que no están en el plano del movimiento), la 2LN y la desigualdad del rozamiento quedan:

$$(2LN)_x: -F_{roz} - mgsen\alpha = -m\frac{v^2}{R}cos\alpha \quad (1)$$

$$(2LN)_y: -mgcos\alpha + N = m\frac{v^2}{R}sen\alpha \quad (2)$$

$$(Roz): \quad -\mu N \leq F_{roz} \leq \mu N \quad (3)$$

Despejando F_{roz} de (1) y N de (2) obtenemos:

$$F_{roz} = m\frac{v^2}{R}cos\alpha - mgsen\alpha$$

$$N = m\frac{v^2}{R}sen\alpha + mgcos\alpha$$

Llevando estas expresiones a (3) obtenemos las dos desigualdades:

$$\frac{-\mu m v^2 sen\alpha}{R} - \mu mgcos\alpha \leq m\frac{v^2}{R}cos\alpha - mgsen\alpha$$

$$m\frac{v^2}{R}cos\alpha - mgsen\alpha \leq \frac{\mu m v^2 sen\alpha}{R} + \mu mgcos\alpha$$

Sacando factor común a la masa m y multiplicando todo por el radio R para eliminar denominadores:

$$\boxed{\begin{cases} -\mu v^2 sen\alpha - \mu Rgcos\alpha \leq v^2 cos\alpha - Rgsen\alpha \\ v^2 cos\alpha - Rgsen\alpha \leq \mu v^2 sen\alpha + \mu gRcos\alpha \end{cases} \quad (4)}$$

Estas son las dos desigualdades que deben satisfacer R, v, μ y α para que el vehículo tenga MCU por el peralte sin salirse de la carretera. Como vemos, la masa m no aparece en las desigualdades, por lo que no influye en el problema.

En buena parte de estos problemas nos piden el rango de velocidades para que el vehículo no se salga de la carretera. El lector interesado puede deducir que:

- Si $\mu > tg(\alpha)$, entonces no hay problema de que el vehículo se salga de la carretera peralte abajo por ir demasiado despacio. En caso contrario, la velocidad mínima para que no se salga se dará cuando el rozamiento tenga módulo máximo y sentido peralte arriba; dicha velocidad es $v_{mín} = \sqrt{\frac{Rg(sen\alpha - \mu cos\alpha)}{cos\alpha + \mu sen\alpha}}$.
- Si $\mu > \frac{1}{tg(\alpha)}$, entonces no hay problema de que el vehículo se salga de la carretera peralte arriba por ir demasiado deprisa. En caso contrario, la velocidad máxima para que no se salga se dará cuando el rozamiento tenga módulo máximo y sentido peralte abajo; dicha velocidad es $v_{máx} = \sqrt{\frac{Rg(sen\alpha + \mu cos\alpha)}{cos\alpha - \mu sen\alpha}}$.

FUERZAS EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO

Fuerzas en el movimiento circular uniformemente acelerado. Recordamos que el MCUA se caracteriza porque el radio de curvatura es constante $R = cte$ y la aceleración angular es constante no nula $\alpha = cte \neq 0$. Así, la aceleración tangencial en MCU es constante no nula $a_\tau = cte \neq 0$, por lo que la resultante tangencial también es constante no nula $F_{tot,\tau} = cte \neq 0$. El lector interesado puede probar que:

$$\boxed{MC + [F_{tot,\tau} = cte \neq 0] \quad \Leftrightarrow \quad MCUA}$$

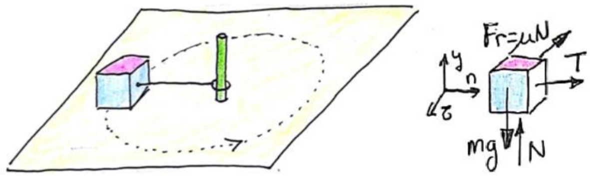
En un MCU la 2LN queda:

$$MCUA \Rightarrow \begin{cases} F_{tot,\tau} = ma_\tau = cte \\ F_{tot,n} = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2 \end{cases}$$

$$|\vec{F}_{tot}| = \sqrt{F_{tot,\tau}^2 + F_{tot,n}^2}$$

Estrategias para problemas de fuerzas y MCUA. Cuando en un problema la partícula tenga MC y la componente tangencial de la fuerza total sea constante no nula, entonces estamos ante un MCUA. También puede pasar que el problema nos diga explícitamente que estamos ante un MCUA. Ante un MCUA hacemos lo siguiente:

- Hacemos el diagrama del sólido libre como en otro problema de fuerzas cualquiera.



- Aplicamos la 2LN. Si alguna fuerza no estuviera contenida en el plano del movimiento (en el dibujo anterior el peso y la normal no están contenidos en el plano del movimiento) llamamos, por ejemplo, eje y al eje perpendicular al plano de movimiento. Se cumple:

$$\begin{cases} F_{tot,\tau} = ma_\tau \\ F_{tot,n} = m\frac{v^2}{R} \\ F_{tot,y} = 0 \end{cases}$$

- A partir de aquí seguimos las indicaciones sobre estrategias para problemas de fuerzas y de cinemática del MCUA.

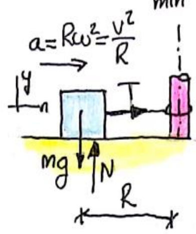
EJEMPLOS RESUELTOS

Ejemplo 1. Un bloque de 10 kg está situado sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El bloque está unido mediante una cuerda de 4 m a un poste fijo, de manera que gira alrededor del poste con una velocidad angular constante de 30 rpm. ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

Solución

Datos: $m = 10\,kg$; horizontal sin rozamiento; $R = 4\,m$;

$\omega = 30\frac{rev}{min}\cdot\frac{2\pi\,rad}{1\,rev}\cdot\frac{1\,min}{60\,s} = 3,142\,rad/s = cte \Rightarrow MCU$



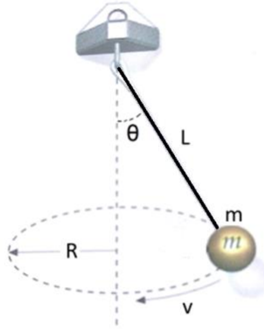
Se ofrece la vista de frente; visto desde arriba veríamos al bloque girando con MCU. Por ser MCU la aceleración es la aceleración normal, que es $a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$

$$\left.\begin{array}{l}(2LN)_n:\ T = mR\omega^2 \quad (1) \\ (2LN)_y:\ -mg + N = 0 \quad (2)\end{array}\right\}$$

¿T? De (1): $\boxed{T = mR\omega^2 = 10\cdot4\cdot3,142^2 = 394,89\,N}$

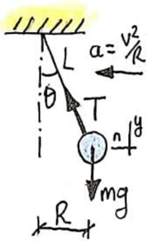
Ejemplo 2. En un péndulo cónico, el hilo tiene longitud *L*; la partícula suspendida tiene masa *m* y describe un MCU horizontal de radio *R*. Se pide:

a) Ángulo θ, que forma el hilo con la vertical, en función de *R* y *L*.
b) Tensión *T* de la cuerda en función de *m* y θ.
c) Velocidad *v* de la bola en función de *R* y θ.
d) Hallar θ, *T* y *v* para el caso particular de *m* = 4 kg, L = 1,2 m y *R* = 0,6 m.



Solución

Datos: L, m, R, MCU horizontal



$$\left.\begin{array}{ll}(2LN)_n: T\,\mathrm{sen}\,\theta = m\dfrac{v^2}{R} & (1)\\ (2LN)_y: T\cos\theta - mg = 0 & (2)\\ (\mathrm{Geom}): R/L = \mathrm{sen}\,\theta & (3)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{MCU} \Rightarrow a = a_n = \dfrac{v^2}{R} = R\omega^2$

Notar que aquí θ no es el ángulo recorrido.

a) ¿$\theta = \theta(R, L)$?

De (3): $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{R}{L} \Rightarrow \boxed{\theta = \arcsin\dfrac{R}{L} \in [0°, 90°)}$

b) ¿$T = T(m, \theta)$?

(2): $T\cos\theta = mg \Rightarrow \boxed{T = \dfrac{mg}{\cos\theta}}$

c) ¿$v = v(R, \theta)$?

$$\left.\begin{array}{l}(1): T\,\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{mv^2}{R}\\ (2)\ T\cos\theta = mg\end{array}\right\} \div \Rightarrow \frac{\cancel{T}\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cancel{T}\cos\theta} = \frac{\cancel{m}v^2}{R\cancel{m}g} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta = \frac{v^2}{Rg} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{Rg\,\mathrm{tg}\,\theta}}$

d) ¿θ, T, v si $m = 4\,kg$, $L = 1{,}2\,m$, $R = 0{,}6\,m$?

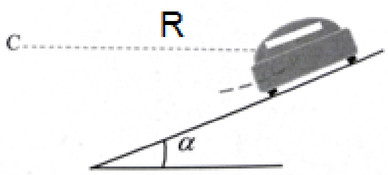
$\theta = \arcsin\dfrac{R}{L} = \arcsin\dfrac{0{,}6}{1{,}2} = 30° \Rightarrow \boxed{\theta = 30°}$

$T = \dfrac{mg}{\cos\theta} = \dfrac{4 \cdot 9{,}8}{\cos 30°} = 45{,}26\,N \Rightarrow \boxed{T = 45{,}26\,N}$

$v = \sqrt{Rg\,\mathrm{tg}\,\theta} = \sqrt{0{,}6 \cdot 9{,}8 \cdot \mathrm{tg}\,30°} = \boxed{1{,}84\ \mathrm{m/s}}$

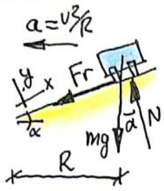
Ejemplo 3. Un coche de 800 kg está dando una curva de radio *R* = 100 m gracias a un coeficiente de rozamiento entre las ruedas y la carretera μ = 0,3 y a un peralte de ángulo α = 5°. Se pide:

a) Velocidad máxima con la que el automóvil puede tomar la curva sin salirse de la misma.
b) Rozamiento si tomara la curva a 36 km/h.



Solución

Datos: $m = 800\,kg$; $R = 100\,m$; $\mu = 0{,}3$; $\alpha = 5°$.



$$\left.\begin{array}{ll}(2LN)_x: -F_r - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = -m\dfrac{v^2}{R}\cos\alpha & (1)\\ (2LN)_y: -mg\cos\alpha + N = +m\dfrac{v^2}{R}\,\mathrm{sen}\,\alpha & (2)\\ (\mathrm{Roz}): -\mu N \le F_r \le \mu N & (3)\end{array}\right\}$$

Queremos un MCU. El rozamiento con peralte funciona así. Si el vehículo está parado, el rozamiento es rampa arriba. A medida que el vehículo coge velocidad el rozamiento bajará su módulo, llegará un momento en el que cambiará de sentido (rampa abajo), irá aumentando su módulo hasta que no pueda más; momento en que el coche se saldrá de la carretera por superar su velocidad máxima.

(1): $F_r = \dfrac{mv^2\cos\alpha}{R} - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = \dfrac{800v^2\cos 5°}{100} - 800 \cdot 9{,}8\,\mathrm{sen}\,5°$

$F_r = 7{,}97v^2 - 683{,}3$ (1')

(2): $N = \dfrac{mv^2\,\mathrm{sen}\,\alpha}{R} + mg\cos\alpha = \dfrac{800v^2\,\mathrm{sen}\,5°}{100} + 800 \cdot 9{,}8\cos 5°$

$N = 0{,}697v^2 + 7810{,}17 \Rightarrow \mu N = 0{,}209v^2 + 2343$ (2')

Si nos pidiesen el rango de velocidades para que no se salga usaríamos (3). Si nos piden la velocidad máxima para que no se salga, cambiamos (3) por $F_r = \mu N$, pues a mayor velocidad, mayor aceleración,

a) ¿$v_{máx}$ para tomar la curva sin salirse?

Cuando esté a punto de salirse por superar la velocidad máxima debe cumplirse: $F_r = \mu N$.

De (1') y (2'): $7{,}97v^2 - 683{,}3 = 0{,}209v^2 + 2343 \Rightarrow$

$7{,}761v^2 = 3026{,}3 \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{3026{,}3}{7{,}761}} = 19{,}75\,m/s$

$\boxed{v_{máx} = 19{,}75\,m/s}$

b) ¿$\vec{F}_r$ si $v = 36\,km/h = 10\,m/s$?

(1'): $F_r = 7{,}97 \cdot v^2 - 683{,}3 = 7{,}97 \cdot 10^2 - 683{,}3 = 113{,}7\,N$

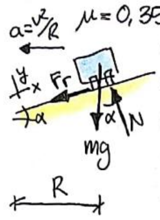
$\boxed{\vec{F}_r = -F_r\vec{i} = -113{,}7\vec{i}\,N}$ Como $F_r > 0$ significa que su sentido es el dibujado, esto es, rampa abajo.

Ejemplo 4*. Un vehículo de 10 t circula por una curva de radio 70 m a velocidad constante. El peralte tiene una inclinación de 15° y el coeficiente de rozamiento es de 0,35. Se pide:

a) Rango de velocidades para que el vehículo no se salga de la carretera.
b) Velocidad para poder girar con rozamiento nulo.
c) Rozamiento (módulo y sentido) a 36 km/h.
d) Rozamiento (módulo y sentido) a 72 km/h.
e) Repetir el apartado a) con los mismos datos salvo el peralte, que pasa a valer 30°.

Solución

Datos: $m = 10t = 10000\,kg$; $R = 70m$; $v = cte$; $\alpha = 15°$; $\mu = 0,35$



$(2LN)_x: -Fr - mg\,sen\alpha = -m\dfrac{v^2}{R}\cos\alpha \quad (1)$

$(2LN)_y: -mg\cos\alpha + N = m\dfrac{v^2}{R}sen\,\alpha \quad (2)$

$(Roz): -\mu N \leq Fr \leq \mu N \quad (3)$

Recordemos que si $-\mu N = Fr$, está a punto de deslizar rampa abajo y si $Fr = \mu N$, está a punto de deslizar rampa arriba.

a) ¿v para que no se salga? Deben cumplirse (1), (2) y (3).

(1): $Fr = -mg\,sen\alpha + \dfrac{mv^2\cos\alpha}{R} =$

$= -10000\cdot 9,8\,sen15° + \dfrac{10000\cdot v^2\cos 15°}{70} =$

$= -25364 + 138\,v^2 \quad (1')$

(2): $N = mg\cos\alpha + \dfrac{mv^2 sen\,\alpha}{R} =$

$= 10000\cdot 9,8\cdot\cos 15° + \dfrac{10000\cdot v^2 sen 15°}{70} =$

$= 94661 + 36,97\,v^2$

$\mu N = 0,35(94661 + 36,97\,v^2) = 33131 + 12,94\,v^2$

(3.1): Con $-\mu N \leq Fr$ hallaremos la velocidad mínima para que no deslice rampa abajo, como veremos:

$-33131 - 12,94v^2 \leq -25364 + 138v^2 \Rightarrow$

$-7767 \leq 150,94v^2 \Rightarrow v \geq \sqrt{\dfrac{-7767}{150,94}} \Rightarrow$

como la raíz cuadrada de un número negativo no existe, no hay velocidad mínima para que no deslice rampa abajo: $v \geq 0$.

(3.2): Con $Fr \leq \mu N$ hallaremos la velocidad máxima para que no deslice rampa arriba, como veremos:

$-25364 + 138v^2 \leq 33131 + 12,94v^2 \Rightarrow$

$125,06\,v^2 \leq 58495 \Rightarrow v \leq \sqrt{\dfrac{58495}{125,06}} = 21,63\,m/s$

$\boxed{\text{No desliza} \Leftrightarrow 0 \leq v \leq 21,63\,m/s}$

b) ¿v si Fr = 0?

(1): $\cancel{m}g\,sen\alpha = \dfrac{\cancel{m}v^2\cos\alpha}{R} \Rightarrow v^2 = \dfrac{Rg\,sen\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow v = \sqrt{Rg\,tg\alpha}$

$v = \sqrt{70\cdot 9,8\cdot tg\,15°} \Rightarrow \boxed{v = 13,56\,m/s}$ Otra forma:

(1'): $Fr = -25364 + 138v^2 \Rightarrow 0 = -25364 + 138v^2 \Rightarrow$

$v = \sqrt{\dfrac{25364}{138}} = 13,56\,m/s$

c) ¿$\vec{F}_r$ si $v = 36\,km/h = 10\,m/s$?

$v = 10\,m/s \in [0\,m/s, 21,63\,m/s] \Rightarrow$ No se sale.

(1'): $Fr = -25364 + 138\cdot 10^2 = -11564\,N < 0$

$\boxed{\text{El rozamiento es de 11564 N en sentido contrario al dibujado; esto es, rampa arriba.}}$

d) ¿$\vec{F}_r$ si $v = 72\,km/h = 20\,m/s$?

$v = 20\,m/s \in [0\,m/s, 21,63\,m/s] \Rightarrow$ No se sale.

(1'): $Fr = -25364 + 138\cdot 20^2 = 29836\,N > 0$

$\boxed{\text{El rozamiento es de 29836 N en el sentido dibujado; esto es, rampa abajo.}}$

e) Repetir a) con $\alpha = 30°$.

$Fr = -mg\,sen\alpha + \dfrac{mv^2\cos\alpha}{R} =$

$= -10000\cdot 9,8\,sen30° + \dfrac{10000\cdot v^2\cos 30°}{70} =$

$= -49000 + 123,72\,v^2$

$\mu N = \mu mg\cos\alpha + \dfrac{\mu m v^2 sen\alpha}{R} =$

$= 0,35\cdot 10000\cdot 9,8\cos 30° + \dfrac{0,35\cdot 10000\,v^2 sen 30°}{70}$

$= 29705 + 25v^2$

$-\mu N \leq Fr \Rightarrow -29705 - 25v^2 \leq -49000 + 123,72v^2 \Rightarrow$

$19295 \leq 148,72v^2 \Rightarrow v \geq \sqrt{\dfrac{19295}{148,72}} = 11,39\,m/s$

$v \geq 11,39\,m/s$

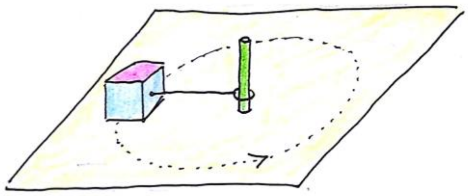
$Fr \leq \mu N \Rightarrow -49000 + 123,72v^2 \leq 29705 + 25v^2 \Rightarrow$

$98,72\,v^2 \leq 78705 \Rightarrow v \leq \sqrt{\dfrac{78705}{98,72}} = 28,24\,m/s$

$\boxed{\text{No desliza} \Leftrightarrow 11,39\,m/s \leq v \leq 28,24\,m/s}$

Ejemplo 5*. Un bloque de 8 kg está situado sobre una superficie horizontal con coeficiente de rozamiento 0,15. El bloque está unido mediante una barra de 2 m a un poste fijo, de manera que gira alrededor del poste con una velocidad inicial de 100 rpm. Se pide:

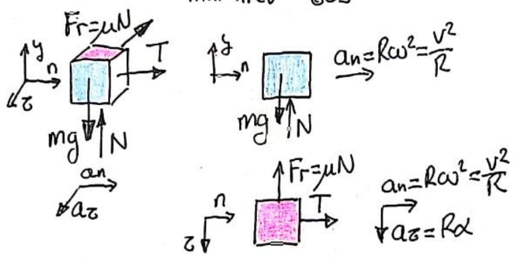
a) Tensión inicial.
b) Tiempo que tarda en pararse por completo.
c) Distancia recorrida hasta que se para.



Solución

Datos: $m = 8Kg$; horizontal; $\mu = 0{,}15$; $R = 2m$

$$\omega_0 = 100\frac{rev}{min}\cdot\frac{2\pi rad}{1rev}\cdot\frac{1min}{60s} = 10{,}47\,rad/s$$



$$\left.\begin{aligned}(2LN)_n&: T = mR\omega^2 \quad (1)\\ (2LN)_\tau&: -\mu N = mR\alpha \quad (2)\\ (2LN)_y&: -mg+N=0 \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

a) ¿T si t=0s? La tensión depende de ω y, en este caso, ω≠cte ya que α≠0 como veremos.

$$\boxed{T_0 = mR\omega_0^2 = 8\cdot 2\cdot 10{,}47^2 = \boxed{1754N}}$$

b) ¿t_1 si $\omega_1 = 0$? Debemos hallar α.

(3): $N = mg$; (2): $-\mu \cancel{m}g = \cancel{m}R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-\mu g}{R}$

$$\alpha = -\frac{0{,}15\cdot 9{,}8}{2} = -0{,}735\,rad/s^2 = cte \Rightarrow MCUA \Rightarrow$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2;\quad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega_1 = 0 \Rightarrow \omega_0 + \alpha t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-10{,}47}{-0{,}735} \Rightarrow$$

$$\boxed{t_1 = 14{,}24s}$$

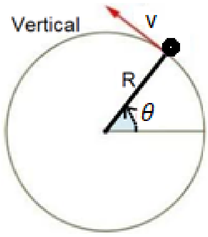
c) ¿s_1?

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = 10{,}47\cdot 14{,}24 - 0{,}5\cdot 0{,}735\cdot 14{,}24^2 = 74{,}57\,rad$$

$$\boxed{s_1 = R\cdot\theta_1 = 2\cdot 74{,}57 = \boxed{149{,}14m}}$$

Ejemplo 6*. Un objeto de 800 g está sujeto a una cuerda de 1,25 m, describiendo un círculo *vertical* en sentido antihorario. La expresión de la celeridad del objeto en función del ángulo θ (medido en sentido antihorario) viene dada por $v = \sqrt{49{,}5 - 24{,}5sen\theta}$ (m/s). Se pide:

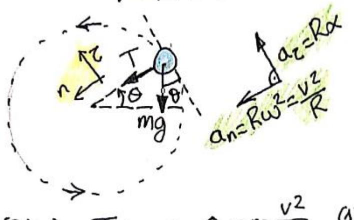
a) Módulo de la aceleración total y tensión en θ = +30°.
b) Tensión de la cuerda en función de θ.
c) Tensiones máxima y mínima de la cuerda y ángulo en el que se producen.



Solución

Datos: $0{,}8Kg$; $R = 1{,}25m$, vertical ↺,

$$v = \sqrt{49{,}5 - 24{,}5sen\theta}\ (m/s)$$



$$\left.\begin{aligned}(2LN)_n&: T + mg\,sen\theta = m\frac{v^2}{R} \quad (1)\\ (2LN)_\tau&: -mg\cos\theta = mR\alpha \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

a) ¿a_1 y T_1 siendo $\theta_1 = 30°$?

$$v_1 = \sqrt{49{,}5 - 24{,}5sen30°} = 6{,}10\,m/s$$

$$(2): \alpha_1 = \frac{-g\cos\theta_1}{R} = \frac{-9{,}8\cos 30°}{1{,}25} = -6{,}79\,rad/s^2$$

$$a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_{\tau 1}^2} = \sqrt{\left(\frac{v_1^2}{R}\right)^2 + (R\alpha_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{6{,}1^2}{1{,}25}\right)^2 + (1{,}25\cdot(-6{,}79))^2}$$

$$\boxed{a_1 = 30{,}95\,m/s^2}$$

$$(1): T_1 = \frac{mv_1^2}{R} - mg\,sen\theta_1 = \frac{0{,}8\cdot 6{,}1^2}{1{,}25} - 0{,}8\cdot 9{,}8\cdot sen30°$$

$$\boxed{T_1 = 19{,}89N}$$

b) ¿$T = T(\theta)$?

$$(1): T = \frac{mv^2}{R} - mg\,sen\theta =$$

$$T = \frac{0{,}8\cdot(49{,}5 - 24{,}5sen\theta)}{1{,}25} - 0{,}8\cdot 9{,}8\,sen\theta =$$

$$T = 31{,}68 - 15{,}68\,sen\theta - 7{,}84\,sen\theta =$$

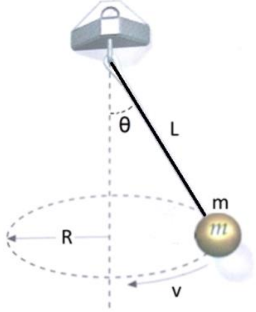
$$\boxed{T = 31{,}68 - 23{,}52\,sen\theta\ (N)}$$

c) ¿$T_{mín}$ y $T_{máx}$ y sus ángulos?
Observando $T = 31,68 - 23,52 \operatorname{sen}\theta$, la tensión será mínima cuando $\operatorname{sen}\theta = 1$, luego
$\boxed{T_{mín} = 31,68 - 23,52 = 8,16\ N}$ y se produce en $\theta = 90°$ (el punto más alto)
La tensión será máxima cuando $\operatorname{sen}\theta = -1$, luego
$\boxed{T_{máx} = 31,68 + 23,52 = 55,2\ N}$ y se produce en $\theta = -90°$ (el punto más bajo).

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1*. De un péndulo cónico sabemos que la longitud del hilo es L = 50 cm y que la bola de masa m = 3 kg describe un MCU horizontal.

a) En el caso particular de que el ángulo que formara la vertical con el hilo fuera de θ = 60°, ¿qué velocidad tendría la bola y cuál sería la tensión del hilo?
b) En el caso particular de que la velocidad de la bola fuera de v = 4 m/s, ¿qué ángulo formaría la vertical con el hilo y cuál sería la tensión del hilo?



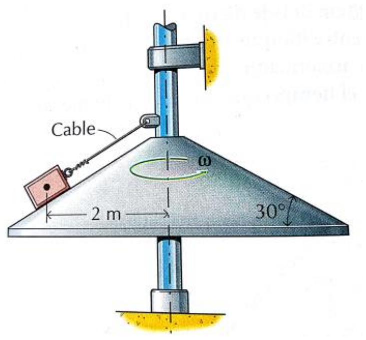
Sol. a) 2,71 m/s, 58,8 N; b) 73,63°, 104,3 N.

2.2. De un péndulo cónico con MCU se pide la expresión de la velocidad de giro ω en función de la longitud L del hilo y del ángulo θ que forma la vertical.

Sol. $\omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}$.

2.3*. Un bloque de 5 kg descansa sobre una superficie cónica lisa que gira en torno a un eje vertical con velocidad constante ω como indica la figura. Se pide:

a) Tensión del cable cuando el sistema gira a 20 rpm.
b) Velocidad angular, en rpm, para que se anule la fuerza normal entre el bloque y la superficie.



Sol. a) 62,49 N; b) 27,82 rpm.

2.4. Un coche quiere girar en una curva sin peralte de radio 60 m. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo es de 0,25, ¿a qué velocidad podrá dar la curva como máximo para no derrapar?

Sol. 12,12 m/s.

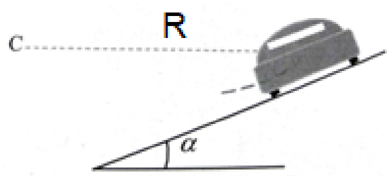
2.5. Un coche describe un movimiento circular uniforme de radio 80 m por una rotonda sin peralte, tardando 25 s en dar una vuelta completa. Se pide:

a) Aceleración centrípeta del coche.
b) Valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre las ruedas del coche y la rotonda.

Sol. a) 5,053 m/s²; b) 0,52.

2.6*. Obtener el rango de valores del radio R que debe tener una curva peraltada para que un coche no se salga de la carretera sabiendo que gira a una velocidad constante de 24 m/s y con un coeficiente de rozamiento de 0,25 entre las ruedas y la carretera, en los siguientes casos:

a) El peralte es de 10°.
b) El peralte es de 20°.



Sol. a) R ≥ 131,77 m; b) 87,02 m ≤ R ≤ 562,39 m.

2.7*. Obtener el rango de valores del coeficiente de rozamiento μ entre las ruedas y la carretera para que un coche no se salga de una curva de radio 60 m y peralte 20°, en los siguientes casos:

a) Da la curva a 30 km/h.
b) Da la curva a 90 km/h.
c) Hallar la velocidad en km/h a la que puede dar la curva sin rozamiento.

Sol. a) μ ≥ 0,236; b) μ ≥ 0,504; c) 52,67 km/h.

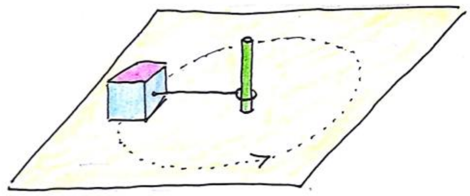
2.8*. Un coche desea tomar una curva a 72 km/h. Sabiendo que dicha curva tiene un radio R = 70 m y un peralte de ángulo α desconocido, se pide:

a) Ángulo α para que el coche no se salga de la curva en el caso de que no haya rozamiento.
b) Rango de valores del ángulo α para que el coche no se salga de la curva si el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y la carretera es de 0,1.

Sol. a) 30,25°; b) 24,51° ≤ α ≤ 35,96°.

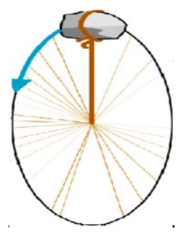
2.9*. Un bloque de 5 kg está situado sobre una superficie horizontal unido mediante una barra de 3 m a un poste. Inicialmente, gira alrededor del poste a 80 rpm. Debido al rozamiento frena uniformemente hasta pararse por completo a los 20 s, se pide:

a) Coeficiente de rozamiento.
b) Tensión de la barra a los 10 s.
c) Número de vueltas que da hasta que se para.



Sol. a) 0,128; b) 263,1 N; c) 13,33 vueltas.

2.10. Una piedra atada a una cuerda tiene un movimiento circular en un plano *vertical* gracias a la tensión de la cuerda. Razonar que la piedra no puede describir un MCU ni un MCUA.



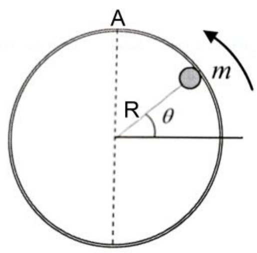
Sol. Se debe probar que la aceleración tangencial no es constante, por lo que no puede ser MCU ni MCUA.

2.11. Un objeto de 600 g está sujeto a una cuerda de 1,25 m, describiendo un círculo *vertical*. La tensión de la cuerda en el punto más alto es de 80 N. La velocidad del objeto en el punto más bajo es de 15 m/s. Se pide:

a) Fuerza centrípeta y velocidad del objeto en el punto más alto.
b) Tensión de la cuerda y fuerza centrípeta del objeto en el punto más bajo.

Sol. a) 85,88 N, 13,38 m/s; b) 113,88 N, 108 N.

2.12*. La partícula de masa 300 g se mueve por la cara interna de un aro liso de radio 0,5 m situado en un plano *vertical*. ¿Cuál es la velocidad mínima que debe tener la partícula en el punto *A* para no perder contacto con el aro en dicho punto? ¿Influye la masa de la partícula?



Sol. 2,21 m/s; la masa no influye.

2.13**. Una pelota de golf de 40 g se lanza desde el suelo a una velocidad de 50 m/s, con una inclinación de 35° sobre la horizontal. Una ráfaga de viento ejerce sobre la pelota una fuerza horizontal 0,3 N a favor del movimiento de la pelota. Se pide hallar el radio de curvatura de la trayectoria a los 2 s.

Sol. 295,38 m.