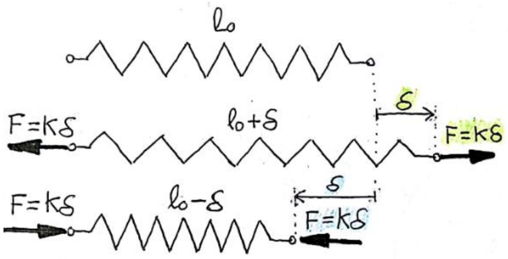
FUERZAS Y MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

FUERZA ELÁSTICA

Ley de Hooke. La *ley de Hooke* de un muelle nos dice: Para cada muelle, las fuerzas de módulo F de tracción o compresión que actúan en sus extremos son directamente proporcionales a la deformación δ que sufre el mismo debido a ellas, alargándose en caso de tracción o acortándose en caso de compresión. Dicha constante de proporcionalidad k se llama *constante elástica del muelle* o *constante de rigidez del muelle* y se mide en N/m. Así:

$$\boxed{F = k \cdot \delta}$$

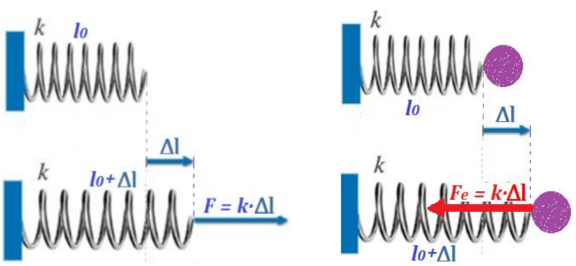


$$\boxed{\begin{array}{ll} l = l_0 + \delta & \text{si lo traccionamos} \\ l = l_0 - \delta & \text{si lo comprimimos} \end{array}}$$

Fuerza elástica. Dados un muelle y una partícula solidaria a un extremo del muelle, llamamos *fuerza elástica* $\vec{F}_e$ a la fuerza que recibe la partícula debido al muelle.

Centremos nuestra atención en el caso de muelle con extremos fijo y móvil, y partícula en contacto permanente con el extremo móvil del muelle. Por la 3LN la fuerza que realiza el muelle sobre la partícula tendrá el mismo módulo, la misma dirección y sentido contrario al que tiene la fuerza que realiza la partícula sobre el muelle:

$F = k \cdot \Delta l$ $\qquad$ $F_e = k \cdot \Delta l$



Para un muelle con un extremo fijo y el otro extremo solidario a una partícula, la ley de Hooke de un muelle y la fuerza elástica en forma vectorial quedan:

$$\boxed{\vec{F} = k \cdot \overrightarrow{\Delta l} \qquad \vec{F}_e = -k \cdot \overrightarrow{\Delta l} \qquad \vec{l} = \vec{l}_0 + \overrightarrow{\Delta l}}$$

Donde:

$\vec{F}$ es la fuerza que actúa sobre el extremo libre del muelle debido a la partícula,

$\vec{F}_e$ es la fuerza que actúa sobre la partícula debido al muelle,

k es la constante del muelle,

$\vec{l}_0$ es el vector que va del extremo fijo al extremo móvil cuando el muelle tiene su longitud natural,

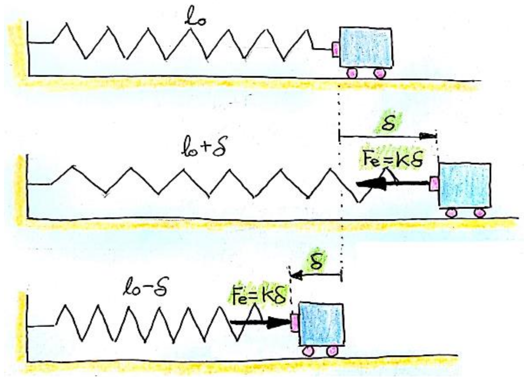
$\overrightarrow{\Delta l}$ es el vector desplazamiento que va del extremo móvil en su posición natural al extremo móvil cuando actúa la fuerza $\vec{F}$ y

$\vec{l}$ es el vector de va del extremo fijo al extremo móvil cuando actúa la fuerza $\vec{F}$ sobre el muelle.

Estrategias para problemas con fuerzas elásticas. Para resolver un problema con fuerzas elásticas, haremos lo siguiente:

(1) Dibujamos el vector deformación y le asignamos el escalar δ u otro que queramos.

(2) Dibujamos el vector fuerza elástica en sentido contrario al dibujado para el vector deformación y le asignamos el escalar $F_e = k\delta$.



FUERZAS Y MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Fuerzas y MAS. Llamamos *oscilador armónico* o simplemente *oscilador* a una partícula que describe un MAS.

Sea una partícula de masa m y elijamos el eje x de forma que se verifiquen:

a) La velocidad inicial de la partícula es nula o solo tiene componente x; esto es, $v_{y,0} = 0$.

b) La fuerza total aplicada sobre la partícula solo tiene componente x en cada instante; esto es, $F_{tot,y} = 0$.

c) En todo instante se cumple: $F_{tot,x} = -kx$, siendo k una constante positiva y x la posición de la partícula.

Entonces se cumple que la partícula describe un MAS en el eje x de expresión $x = A \cdot sen(\omega t + \phi_0)$, siendo:

(1) $\omega = \sqrt{k/m}$.

(2) $A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_{x,0}}{\omega}\right)^2$.

(3) $\phi_0 = arc\ sen(x_0/A)$.

Salvo que $x_0/A = 1$ o $x_0/A = -1$ habrá dos ángulos en la circunferencia cuyo seno valga x_0/A. Sin embargo, la calculadora solo nos dice uno de ellos, que llamaremos α; el otro será $(\pi - \alpha)$. Para saber si ϕ_0 es α o $(\pi - \alpha)$ debemos usar el signo de $v_{x,0}$:

$$\begin{cases} \phi_0\ es\ del\ 1^{\underline{o}}\ o\ 4^{\underline{o}}\ cuadrante\ si\ v_{x,0} > 0 \\ \phi_0\ es\ del\ 2^{\underline{o}}\ o\ 3^{\underline{o}}\ cuadrante\ si\ v_{x,0} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} v_{y,0} = 0 \\ F_{tot,x} = -kx \\ F_{tot,y} = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} MAS\ en\ eje\ x \\ \omega = \sqrt{k/m} \\ A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x,0}}{\omega}\right)^2} \\ \phi_0 = arc\ sen(x_0/A) \\ v_{x,0} > 0 \Rightarrow \phi_0\ en\ 1^{\underline{o}}\ o\ 4^{\underline{o}}\ cuad \\ v_{x,0} < 0 \Rightarrow \phi_0\ en\ 2^{\underline{o}}\ o\ 3^{\underline{o}}\ cuad \end{bmatrix}$$

Demostración. Veamos primero que las condiciones a) y b) garantizan movimiento rectilíneo a lo largo del eje x. Por 2LN en eje y se tiene $a_y = 0$. Como por a) también $v_{y,0} = 0$, se tiene que el movimiento es rectilíneo en el eje x.

Por 2LN en el eje x se tiene $-kx = ma_x$, luego $a_x = -\frac{k}{m}x$. Denotando $\omega = \sqrt{k/m}$, tenemos que $a_x = -\omega^2 x$, que es precisamente la definición de MAS.

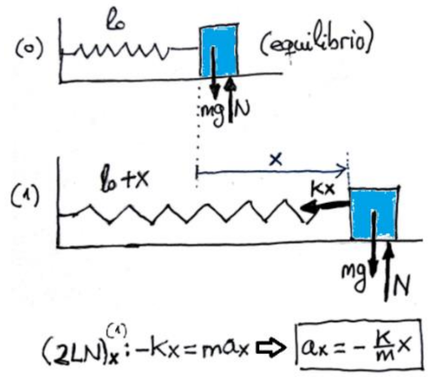
La demostración de las expresiones de A y de ϕ_0 ya se trató en cinemática del MAS, por lo que remitimos allí al lector interesado. ■

Oscilador tipo Masa-muelle. Si tenemos un muelle (de constante k) fijo en un extremo y solidario a una partícula (de masa m) en el otro extremo y alteramos la posición de equilibrio del sistema o dotamos a la partícula de velocidad inicial no nula en la dirección del muelle, para a continuación dejar libre el sistema, entonces la partícula seguirá un MAS de origen la posición de equilibrio de la partícula, de pulsación $\omega = \sqrt{k/m}$, y de amplitud A y fase inicial ϕ_0 dadas por la posición inicial y la velocidad inicial de la partícula.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y el origen es la posición de equilibrio

Usando 2LN y fuerza elástica, tanto si el muelle es horizontal, vertical o inclinado, la masa seguirá un MAS de pulso $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y origen la posición de equilibrio. Lo vemos a continuación para el caso horizontal y vertical, aunque también se cumple en el caso inclinado; el lector interesado puede probarlo para este último caso.

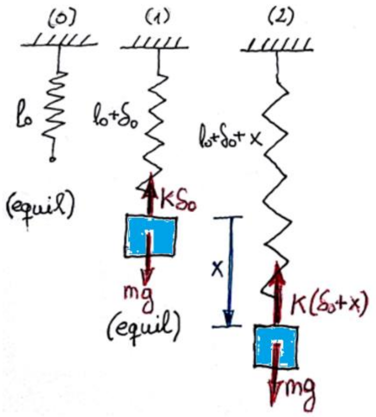
Comprobación caso horizontal



En la imagen (0) el muelle, de constante elástica k, tiene su longitud natural y el sistema está en equilibrio. Elegimos el origen del eje x donde se encuentra la partícula en equilibrio y el sentido, el de tracción del muelle.

En la imagen (1), tenemos el muelle más traccionado y el sistema ya no está en equilibrio. La velocidad inicial de la partícula, en caso de ser no nula tendrá la dirección del eje x. Llamaremos x a la posición en el eje x de la partícula. Con esto, el vector deformación del muelle está representado en la figura con el escalar x asignado. Por lo visto de fuerzas elásticas, ésta está representada en sentido contrario al vector deformación con el escalar kx asignado.
Aplicando 2LN en el eje x tenemos: $-kx = ma_x$.
Así, $a_x = -\frac{k}{m}x$. Denotando $\omega = \sqrt{k/m}$, tenemos que $a_x = -\omega^2 x$ con $\omega = cte > 0$. Por tanto, la partícula sigue un MAS de pulsación $\omega = \sqrt{k/m}$.

Comprobación caso vertical



$(2LN)_x^{(1)}: \ -K\delta_0 + mg = 0$

$(2LN)_x^{(2)}: \ -K(\delta_0+x) + mg = ma_x$

De (2): $-K\delta_0 - Kx + mg = ma_x$

De (1): $-\cancel{K\delta_0} - Kx + \cancel{mg} = ma_x$

$$\boxed{a_x = -\frac{K}{m}x}$$

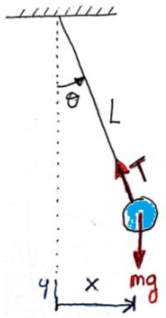
En la imagen (0) tenemos solo el muelle con su longitud natural l_0 en equilibrio. En la imagen (1) tenemos el sistema en equilibrio. Para ello, el muelle ha aumentado su longitud natural l_0 una cantidad δ_0. Elegiremos el origen del eje x donde se encuentra la partícula en equilibrio y el sentido, el de tracción del muelle.
Aplicando 2LN en el eje x tenemos: $-k\delta_0 + mg = 0$.

En la imagen (2), tenemos el muelle más traccionado y el sistema ya no está en equilibrio. Las mismas consideraciones que en el caso anterior. La diferencia es que el escalar asignado a la deformación del muelle ahora es $(\delta_0 + x)$.
Aplicando 2LN en el eje x: $-k(\delta_0 + x) + mg = ma_x$.
Usando ambas ecuaciones tenemos de nuevo que $a_x = -\frac{k}{m}x$. Por tanto, la partícula sigue un MAS de pulsación $\omega = \sqrt{k/m}$.

Oscilador tipo péndulo simple. Denominamos *péndulo simple* a una partícula que pende de un hilo, el cual es inextensible y sin peso. La trayectoria que seguirá la partícula estará contenida en una circunferencia, por lo que no será rectilínea. Sin embargo, lo consideraremos rectilíneo al imponer que el ángulo que separa el hilo de la vertical es pequeño (tomándolo con signo, entre -14° y +14°). De esta manera, se cumple que: si tenemos un péndulo simple, lo separamos de su posición de equilibrio un ángulo pequeño y dejamos libre el sistema, entonces la partícula seguirá un MAS en el eje x de origen la posición de equilibrio de la partícula, de pulsación $\omega = \sqrt{g/L}$, y de amplitud A y fase inicial ϕ_0 dadas por la posición inicial y la velocidad inicial de la partícula.

$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ y el origen es la posición de equilibrio

Comprobación caso péndulo simple.



$(2LN)_x: \ -T\sin\theta = ma_x$ (1)

$(2LN)_y: \ T\cos\theta - mg = ma_y$ (2)

$(\theta\downarrow\downarrow): \left\{\begin{array}{l} \text{sen}\theta \approx tg\theta = \frac{x}{L} \\ \cos\theta \approx 1 \\ a_y \approx 0 \end{array}\right\}$ (3)

De (2) y (3): $T - mg = 0 \Rightarrow T = mg$ (4)

De (1), (3) y (4): $-mg\frac{x}{L} = ma_x$

$$\boxed{a_x = \frac{-g}{L}x}$$

Atendiendo a la figura, si aplicamos la 2LN tenemos:
Eje x: $-Tsen\theta = ma_x$
Eje y: $Tcos\theta - mg = ma_y$

Con la simplificación de que θ está comprendido entre -14° y +14° tenemos que: $sen(\theta) \approx tg(\theta) = x/L$, (2) $cos(\theta) \approx 1$ y (3) $a_y \approx 0$. Con estas simplificaciones, despejando T del eje y, queda $T = mg$; sustituyendo T en el eje x y simplificando, tenemos que: $a_x = -\frac{g}{L}x$.

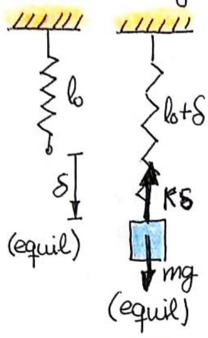
EJEMPLOS RESUELTOS

Ejemplo 1. Al colgar una masa de 120 kg de un muelle vertical, éste se alarga 6,4 cm.

a) ¿Cuál es la constante elástica del muelle?
b) ¿Cuánto se alargaría ese mismo muelle si cambiamos la masa de 120 kg por otra de 200 kg?

Solución

Datos: $m = 120\ kg$; vertical ; alarga $\delta = 0{,}064\ m$



$(2LN)_y$: $K\delta - mg = 0$ (1)

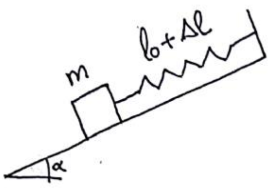
a) ¿K? (1) $\boxed{K = \frac{mg}{\delta}} = \frac{120\cdot 9{,}8}{0{,}064} = \boxed{18375\ N/m}$

b) ¿δ' si $m' = 200\ kg$?

(1) $\boxed{\delta' = \frac{m'g}{K}} = \frac{200\cdot 9{,}8}{18375} = \boxed{0{,}107\ m}$

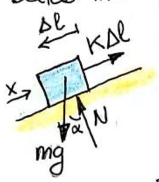
Ejemplo 2. El sistema de la figura está en equilibrio. El bloque tiene una masa m = 5 kg y se encuentra sobre un plano inclinado α = 30°. Por estar la masa unida al muelle, provoca en el mismo un alargamiento Δl = 4 cm.

a) ¿Cuál es la constante elástica del muelle?
b) ¿Por qué otra masa tendríamos que cambiar la de 5 kg para que ese mismo muelle se alargue 10 cm en vez de 4 cm?



Solución

Datos: $m = 5\ kg$; $\alpha = 30°$; $\Delta l = 0{,}04\ m$, equilibrio.



$(2LN)_x$: $K\Delta l - mg\,sen\alpha = 0$ (1)

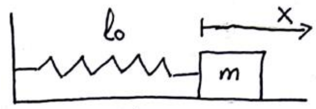
a) ¿K? (1): $\boxed{K = \frac{mg\,sen\alpha}{\Delta l}} = \frac{5\cdot 9{,}8\,sen30°}{0{,}04} = \boxed{612{,}5\ N/m}$

b) ¿m' si $\Delta l' = 0{,}1\ m$?

$\boxed{m' = \frac{K\Delta l'}{g\,sen\alpha}} = \frac{612{,}5\cdot 0{,}1}{9{,}8\cdot sen30°} = \boxed{12{,}5\ kg}$

Ejemplo 3*. El sistema de la figura, formado por un muelle de constante elástica k = 80 N/m y una masa m = 5 kg, está en equilibrio. Hallar la expresión instantánea de la posición $x = x(t)$ de la partícula al dejarla libre si las condiciones iniciales son:

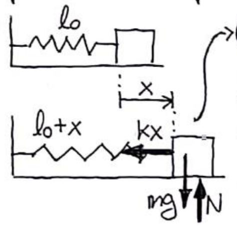
a) Muelle estirado 30 cm y partícula en reposo.
b) Muelle comprimido 25 cm y partícula en reposo.
c) Muelle con su longitud natural y partícula con velocidad de 2 m/s en el sentido de tracción.
d) Muelle con su longitud natural y partícula con velocidad 3 m/s en el sentido de la compresión.
e) Muelle comprimido 10 cm y partícula con velocidad 0,7 m/s en el sentido de la compresión.



Solución

Datos: $K = 80\ N/m$; $m = 5\ kg$

Hemos visto en teoría que si tenemos un sistema masa-muelle como el de la figura y alteramos su posición de equilibrio y/o damos de velocidad inicial no nula para dejarlo libre, entonces la partícula describirá un MAS de pulso $\omega = \sqrt{K/m}$ estando el origen en el punto de equilibrio. Aunque el problema no lo pide, vamos a probarlo:



$(2LN)_x$: $-Kx = ma_x \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} a_x = -\frac{K}{m}x \\ a_x = -\omega^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{MAS de } \omega = \sqrt{K/m}}$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = 4\ rad/s}$

Todos los apartados donde los datos son MAS, ω, x_0 y V_{x0} y nos piden $x = x(t)$ se hacen igual, como ya vimos en la sección de cinemática dedicada al MAS. Solo hay que calcular A y ϕ_0:

- $x = A\,sen(\omega t+\phi_0) \Rightarrow x_0 = A\,sen\,\phi_0$ (1)
- $x^2 + \left(\frac{V_x}{\omega}\right)^2 = A^2 \Rightarrow x_0^2 + \left(\frac{V_{x0}}{\omega}\right)^2 = A^2$ (2)
- De (2): $\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_{x0}}{\omega}\right)^2}}$
- De (1): $\boxed{\phi_0 = arcsen\,\frac{x_0}{A}}$ ¡ojo! porque salvo que $\frac{x_0}{A} = 1$ ó $\frac{x_0}{A} = -1$ habrá dos soluciones. Para saber cuál es la correcta debemos ver el signo de V_{x0}. Como $V_x = A\omega\cos(\omega t+\phi_0)$, entonces $V_{x0} = A\omega\cos\phi_0$. Por tanto, el signo de V_{x0} es el signo de $\cos\phi_0$. Como el coseno es positivo en 1er y 4º cuadrante, y negativo en el 2º y 3er cuadrante:

$V_{x0} > 0 \Rightarrow$  ; $V_{x0} < 0 \Rightarrow$ 

Al hacer el arco seno, la calculadora da el ángulo en $[-\pi/2\ rad, \pi/2\ rad]$. Si es $\frac{-\pi}{2}$ rad o $\frac{\pi}{2}$ rad ya está, pero si no, el otro ángulo será $\boxed{\pi - \lozenge}$ siendo $\lozenge$ el ángulo de la calculadora. Esto es así porque $sen(\lozenge) = sen(\pi - \lozenge)$.

Continuamos el ejercicio.

a) ¿$x(t)$ si $x_0 = +0{,}3\,m$ y $v_{x0} = 0\,m/s$?

Notar que la tracción del muelle, en este caso, se corresponde con la parte positiva del eje x.

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2} = \sqrt{0{,}3^2 + \left(\frac{0}{4}\right)^2} = 0{,}3\,m.$$

$$\phi_0 = arcsen\,\frac{x_0}{A} = arcsen\,\frac{0{,}3}{0{,}3} = \frac{\pi}{2}\,rad$$

$$x = A sen(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \boxed{x = 0{,}3 sen\left(4t + \frac{\pi}{2}\right)\ (SI)}$$

b) ¿$x(t)$ si $x_0 = -0{,}25\,m$ y $v_{x0} = 0\,m/s$?

Notar que la compresión del muelle, en este problema, se corresponde con la parte negativa del eje x.

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(-0{,}25)^2 + \left(\frac{0}{4}\right)^2} = 0{,}25\,m$$

$$\phi_0 = arcsen\,\frac{x_0}{A} = arcsen\,\frac{-0{,}25}{0{,}25} = \frac{-\pi}{2}\,rad \text{ ó } \frac{3\pi}{2}\,rad$$

$$x = A sen(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \boxed{x = 0{,}25 sen\left(4t - \frac{\pi}{2}\right)\ (SI)}$$

c) ¿$x(t)$ si $x_0 = 0\,m$ y $v_{x0} = +2\,m/s$?

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2} = 0{,}5\,m$$

$v_{x0} > 0 \Rightarrow \oplus$

$$\phi_0 = arcsen\,\frac{x_0}{A} = arcsen\,\frac{0}{0{,}5} = \begin{cases} 0\,rad \\ \pi\,rad \end{cases} = 0\,rad$$

$$x = A sen(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \boxed{x = 0{,}5 sen\,4t\ (SI)}$$

d) ¿$x(t)$ si $x_0 = 0\,m$ y $v_{x0} = -3\,m/s$?

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{-3}{4}\right)^2} = 0{,}75\,m$$

$v_{x0} < 0 \Rightarrow \oplus$

$$\phi_0 = arcsen\,\frac{x_0}{A} = arcsen\,\frac{0}{0{,}75} = \begin{cases} 0\,rad \\ \pi\,rad \end{cases} = \pi\,rad$$

$$x = A sen(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \boxed{x = 0{,}75 sen(4t + \pi)\ (SI)}$$

e) ¿$x(t)$ si $x_0 = -0{,}1\,m$ y $v_{x0} = -0{,}7\,m/s$?

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(-0{,}1)^2 + \left(\frac{-0{,}7}{4}\right)^2} = 0{,}2\,m$$

$v_{x0} < 0 \Rightarrow \oplus$

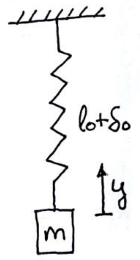
$$\phi_0 = arcsen\,\frac{x_0}{A} = arcsen\,\frac{-0{,}1}{0{,}2} = \begin{cases} -\pi/6 \\ -5\pi/6 \end{cases} = \frac{-5\pi}{6}\,rad$$

$$\pi - \left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = A sen(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \boxed{x = 0{,}2 sen\left(4t - \frac{5\pi}{6}\right)\ (SI)}$$

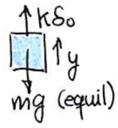
Ejemplo 4*. El sistema de la figura está en equilibrio, donde al colgarle el bloque de masa *m* desconocida el muelle se ha alargado δ_0 = 993 mm. A partir de esta posición de equilibrio estiramos el muelle otros 700 mm adicionales y soltamos, instante en el cual empezamos a contar el tiempo. Se pide:

a) Frecuencia del MAS.
b) Instante en que la partícula alcanza por primera vez la celeridad máxima con sentido hacia arriba y valor de dicha velocidad máxima.



Solución

Datos: $m = ?$; $\delta_0 = 0{,}993\,m$; $x_0 = -0{,}7\,m$; $v_{x0} = 0\,m/s$.



$(2LN)_y$: $k\delta_0 - mg = 0$ (1)

Nota: En este problema la tracción tiene el sentido negativo del eje y.

a) ¿f?

Sabemos que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, pero en (1) desconocemos k y m. Sin embargo sí es posible hallar $\frac{k}{m}$:

(1) $k\delta_0 = mg \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\delta_0}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_0}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}993}} = 3{,}142 \simeq \pi\ rad/s$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0{,}5\,Hz}$$

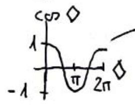
b) ¿t_1 y v_{max} si v_{x1} es máxima?

Hallamos A y ϕ_0 para tener todos los parámetros del MAS:

- $x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2 = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(-0{,}7)^2 + \left(\frac{0}{\pi}\right)^2} \Rightarrow$
  $\Rightarrow A = 0{,}7\,m$.
- $x_0 = A sen\,\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = arcsen\,\frac{x_0}{A} = arcsen\,\frac{-0{,}7}{0{,}7} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \phi_0 = \frac{-\pi}{2}\,rad$.
- $x = A sen(\omega t + \phi_0) \Rightarrow v_x = A\omega \cos(\omega t + \phi_0) \Rightarrow$
  $v_x = 0{,}7\pi \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow v_x = 2{,}2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (SI)

$\boxed{v_{máx} = A\omega = 2{,}2\,m/s}$

- $v_x\,máx \Rightarrow \underbrace{\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\,máx \Rightarrow \pi t - \frac{\pi}{2} = 0 + 2k\pi}_{\text{cos máx en 0 rad}} \Rightarrow$



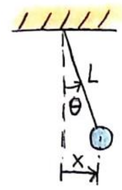
$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{\pi} = 0{,}5 + 2k$. El primer máximo se da para el menor k entero que haga t no negativo. Por tanto k=0, luego $\boxed{t_1 = 0{,}5\,s}$

Ejemplo 5*. Tenemos un péndulo simple de longitud 0,5 m y masa 3 kg. Se pide:

a) Expresión instantánea de la posición x(t) si inicialmente el ángulo del hilo con la horizontal es +10° y dejamos libre el sistema.
b) Expresión instantánea de la posición x(t) si inicialmente el ángulo del hilo con la horizontal es -14° y dejamos libre el sistema.

Solución

Datos: $L = 0,5\,m$; $m = 3\,kg$



Hemos visto en teoría que si tenemos un péndulo simple y alteramos su posición de equilibrio ($x=0$) y/o dotamos de velocidad inicial no nula para dejarlo libre, entonces la partícula describirá un MAS horizontal (siempre que $\theta_{máx}$ sea pequeño, lo que damos por supuesto), de pulsación $\omega = \sqrt{g/L}$ y origen en $\theta = 0\,rad$. Aunque el problema no lo pide, vamos a probarlo:

$$\begin{cases} (2LN)_x: -T\,sen\theta = m a_x \quad (1) \\ (2LN)_y: T\cos\theta - mg = m a_y \quad (2) \\ (Geom): sen\theta = \frac{x}{L} \quad (3) \\ (\theta\ pequeño): sen\theta \simeq tg\theta;\ \cos\theta \simeq 1;\ a_y \simeq 0 \quad (4) \end{cases}$$

(2) y (4): $T - mg = 0 \Rightarrow T = mg \quad (5)$

$(1), (3)$ y (5): $-\cancel{m}g\frac{x}{L} = \cancel{m}a_x \Rightarrow a_x = -\frac{g}{L}x \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{MAS\ de\ \omega = \sqrt{g/L}}$ luego tenemos un MAS de pulso $\boxed{\omega} = \sqrt{g/L} = \sqrt{9,8/0,5} = \boxed{4,43\,rad/s}$

Notar que la masa del péndulo no influye, pues sólo influye la longitud del hilo. Vamos al problema:

a) ¿$x(t)$ si $\theta_0 = 10°$ y $v_{x0} = 0\,m/s$?

· (3): $x_0 = L\,sen\theta_0 = 0,5\,sen\,10° = 0,087\,m$

· $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2} = \sqrt{0,087^2 + \left(\frac{0}{4,43}\right)^2} = 0,087\,m$

· $x_0 = A\,sen\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = arc\,sen\frac{x_0}{A} = arc\,sen\frac{0,087}{0,087} = \frac{\pi}{2}\,rad$

· $x = A\,sen(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \boxed{x = 0,087\,sen\left(4,43t + \frac{\pi}{2}\right)\ (SI)}$

b) ¿$x(t)$ si $\theta_0 = -14°$ y $v_{x0} = 0\,m/s$?

· (3): $x_0 = L\,sen\theta_0 = 0,5\,sen(-14°) = -0,121\,m$

· $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(-0,121)^2 + \left(\frac{0}{4,43}\right)^2} = 0,121\,m$

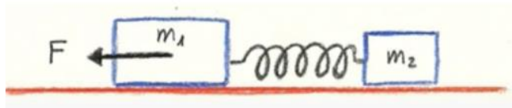
· $\phi_0 = arc\,sen\frac{x_0}{A} = arc\,sen\frac{-0,121}{0,121} = -\frac{\pi}{2}\,rad$

· $\boxed{x = 0,121\,sen\left(4,43t - \frac{\pi}{2}\right)\ (SI)}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

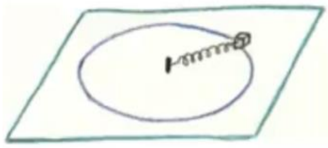
3.1*. En el sistema de la figura, inicialmente en reposo, m_1 = 5 kg, m_2 = 3 kg, la constante elástica del muelle es k = 80 N/m, el coeficiente de rozamiento entre ambos bloques y el suelo es μ = 0,1 y la fuerza F = 30 N. Se pide:

a) Tiempo para que el bloque 1 recorra 40 m.
b) Estiramiento del muelle.



Sol. a) 5,37 s; b) 0,14 m.

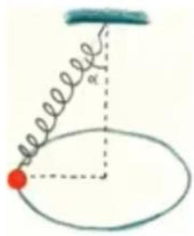
3.2. Una masa de 5 kg está unida a un muelle de longitud natural 65 cm y se encuentra apoyada sobre una superficie horizontal. Se hace girar la masa como indica la figura con una velocidad angular constante de 9 rad/s, describiendo una circunferencia de radio 75 cm. Se pide la constante elástica del muelle.



Sol. 3037,5 N/m.

3.3*. Una masa de 3 kg está unida a un muelle como indica la figura girando a velocidad angular constante de 4 rad/s. La longitud natural del muelle es de 80 cm y la constante recuperadora es de 1000 N/m. Se pide:

a) Alargamiento de muelle.
b) Ángulo que forma el muelle con la vertical.
c) Radio de giro.



Sol. a) 0,04 m; b) 42,69°; c) 0,57 m.

3.4. Un oscilador armónico de 50 Hz está formado por una partícula de 10 g de masa unida a un muelle. Se pide:

a) Constante elástica del muelle.
b) Módulo de la fuerza elástica cuando la partícula se encuentra a 3 cm de la posición de equilibrio.

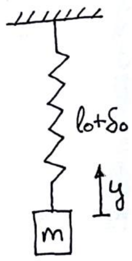
Sol. a) 987 N/m; b) 29,6 N.

3.5. Tenemos cierto muelle al que acoplamos una masa *m*, obteniendo un oscilador armónico de frecuencia *f*. En el mismo muelle, desacoplamos la masa *m* y acoplamos una masa *m'*, obteniendo un oscilador armónico de frecuencia *2f*. ¿Qué relación hay entre las masas m y m'?

Sol. m/m' = 4.

3.6*. El sistema de la figura está en equilibrio, donde al colgarle la partícula de masa m = 300 g el muelle se ha alargado δ_0 = 18 cm. A partir de esta posición de equilibrio se sabe que en el instante inicial el muelle está comprimido 9 cm respecto la posición de equilibrio y posee una velocidad de 4 m/s en el sentido de la tracción. Se pide:

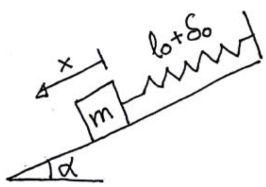
a) Constante elástica del muelle.
b) Pulsación, frecuencia y periodo del movimiento.
c) Expresión instantánea de la posición $y = y(t)$ de la partícula.



Sol. a) 16,33 N/m; b) 7,38 rad/s, 1,17 Hz, 0,852 s;
c) y = 0,55·sen(7,38t+2,98) (SI).

3.7*. El sistema de la figura está en equilibrio. La rampa tiene una inclinación α = 30°. Al colgarle cierta masa desconocida el muelle se ha alargado δ_0 = 16 cm. A partir de esta posición de equilibrio se sabe que en el instante inicial el muelle está traccionado 8 cm respecto la posición de equilibrio y posee una velocidad de 6 m/s en el sentido de la compresión. Se pide:

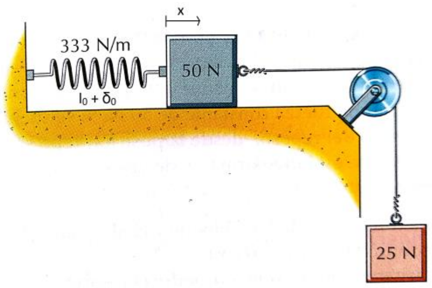
a) Frecuencia angular del movimiento.
b) Expresión instantánea de la posición $x = x(t)$ de la partícula.
c) Gráfica x = x(t).



Sol. a) 5,53 rad/s; b) x = 1,087·sen(5,53t+3,068) (SI).

3.8**. El sistema de la figura está en equilibrio y consta de un muelle de constante k = 333 N/m, un bloque de peso P_1 = 50 N, un bloque de peso P_2 = 25 N y una cuerda que une ambos bloques. A partir del mismo, adicionalmente bajamos 20 cm el bloque de 25 N y dejamos el sistema libre, momento en el que empieza a contar el tiempo. El cable es suficientemente largo para que los dos bloques no toquen la polea. Se pide:

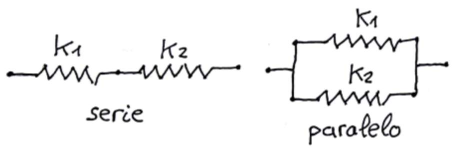
a) Probar que el bloque de 50 N describe un MAS de pulsación $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$.
b) Expresión $x = x(t)$ del bloque de 50 N.



Sol. b) x = 0,2·sen(6,6t + π/2) (SI).

3.9**. Tenemos dos muelles de constantes elásticas k_1 y k_2. Se pide la constante elástica del sistema resultante en función de k_1 y de k_2 si colocamos los dos muelles en:

a) Serie.
b) Paralelo.



Sol. a) $\frac{1}{k_{serie}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$; *b)* $k_{paralelo} = k_1 + k_2$.

3.10. Sabiendo que hablamos de un péndulo simple, responde las siguientes cuestiones:

a) ¿Influye la masa de la partícula en el movimiento?
b) Para una longitud y masa dados, ¿en qué parámetros del MAS influye el ángulo inicial?
c) ¿Influye la longitud del hilo en la frecuencia del movimiento?
d) Si a causa del rozamiento la amplitud del movimiento fuese cada vez menor, ¿afectaría dicho rozamiento a la frecuencia del movimiento?
e) Si a consecuencia del uso el hilo se estirase, ¿afectaría eso al periodo del movimiento?

Sol. a) No; b) Influye en la amplitud y en la fase inicial del movimiento (ambas dependerían también de la velocidad inicial); no influye en la pulsación del movimiento; c) No; d) Sí.

3.11*. Tenemos un péndulo simple de longitud 80 cm y masa 400 g. Inicialmente el ángulo del hilo con la horizontal es de +6° con una velocidad inicial de −0,5 m/s. Se pide:

a) Expresión instantánea de la posición x(t).
b) Aceleración máxima del péndulo.

Sol. a) x = 0,166·sen(3,5t + 2,611) (SI); b) 2,03 m/s².